УДК 629.78

© Кукушкин С. С., Гладков И. А.

АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КНС

На основании байесовского критерия минимального среднего риска разработан алгоритм, позволяющий в оперативном режиме установить момент несанкционированного воздействия вероятного противника на работу космической навигационной системы (КНС).

Среди возможных вариантов воздействия вероятного противника на работу КНС наиболее вероятным является искажение сигнала с целью ухудшения точностных характеристик.

Мерой противодействия в таких условиях, особенно при оперативной работе, является непрерывный контроль достоверности принимаемой информации, выявление момента воздействия на точностные характеристики КНС и исключение измерений, подвергшихся внешнему воздействию.

Проверка может осуществляться сравнением текущих результатов с расчетными значениями, полученными экстраполированием некоторого участка, где измерения можно считать достоверными.

В результате аппроксимации некоторого массива достоверных измерений

$$M_0 = \left\{ \begin{matrix} R_i(t_i) \\ i \in m_0 \end{matrix} \right\}, \qquad (1)$$

полученного на интервале $t_0 \div t_a$ с шагом τ, получаем значения коэффициентов аппроксимирующих полиномов. Затем в аппроксимирующий полином подставляем значения полученных коэффициентов и значение времени, равное

$$t_{ý} = t_{à} + \tau_{ý}$$

где $\tau_{ý}$ - шаг экстраполяции,

т.е. производим восстановление функции по аппроксимирующему полиному с экстраполяцией.

Таким образом, используя значения времени в точках

$$t_{э1} = t_a + \tau_э;$$
$$t_{э2} = t_a + 2\tau_э;$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$t_{эk} = t_a + k\tau_э,$$

получаем значения экстраполируемой функции на заданном временном интервале.

В качестве аппроксимирующей функции можно принять степенной полином

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n. \qquad (2)$$

Коэффициенты полинома выбираются из условия, чтобы средний квадрат отклонения был минимальным.

$$Q = \sum_i \left[r_i^* - (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) \right]^2 = \min. \qquad (3)$$

Для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \dots a_n$ продифференцируем выражение (3) и приравняем частные производные к нулю.

$$\frac{\partial Q}{\partial Q_0} = -2\sum_{i=1}^{N} \left[r_i^* - (a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots a_n t_i^n) \right] = 0;$$
$$\frac{\partial Q}{\partial Q_1} = -2\sum_{i=1}^{N} \left[r_i^* - (a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots a_n t_i^n) \right] = 0; \qquad (4)$$
$$\dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots$$
$$\frac{\partial Q}{\partial Q_n} = -2\sum_{i=1}^{N} \left[r_i^* - (a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots a_n t_i^n) \right] = 0.$$

Кукушкин Сергей Сергеевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ;
Гладков Игорь Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ.

В результате (для равноточных измерений) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} r_i^* = a_0\sum_{i=1}^{N}1 + a_1\sum_{i=1}^{N}t_i + a_2\sum_{i=1}^{N}t_i^2 + \ldots a_n\sum_{i=1}^{N}t_i^n;\\
&\sum_{i=1}^{N} r_i^* t_i = a_0\sum_{i=1}^{N}t_i + a_1\sum_{i=1}^{N}t_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{N}t_i^3 + \ldots a_n\sum_{i=1}^{N}t_i^{n+1};\\
&\ldots \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad \ldots\\
&\sum_{i=1}^{N} r_i\, t_i^n = a_0\sum_{i=1}^{N}t_i^n + a_1\sum_{i=1}^{N}t_i^{n+1} + a_2\sum_{i=1}^{N}t_i^{n+2} + \ldots a_n\sum_{i=1}^{N}t_i^{2n}.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Эта система в матричной форме может быть записана в следующем виде:

$$\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\mathbf{A} = \Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{R} \qquad (6)$$

где $\Phi = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_N & t_N^2 & \ldots & t_N^n \end{vmatrix}$;

R – вектор измерений, размерности $N\times 1$;

A – вектор искомых коэффициентов полинома размерности $(n+1)\times 1$.

Из (6) находим

$$\mathbf{A} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\,\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{R}. \qquad (7)$$

Если измерения некоррелированы и имеют дисперсию σ_R^2, то корреляционная матрица ошибок коэффициентов полинома будет равна

$$K_A = \sigma_R^2 p^{-1}, \qquad (8)$$

где $p = \Phi^{\mathrm{T}}\Phi$.

В результате задача сводится к различению гипотез, т.е. к принятию решения: является ли отклонение оцениваемой точки от расчетной результатом ошибок измерений или здесь имеется аномальное измерение, которое необходимо исключить из обработки.

Выбор решающего правила необходимо сделать таким образом, чтобы, с одной стороны, уменьшить вероятность вовлечения в обработку аномальных измерений, с другой стороны, сохранить достоверную информацию.

Для случая многомерного нормального закона распределения вероятность расположения точки вне объема, определяемого заданными пределами $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$, вычисляется через эквивалентный радиус гиперсферы

$$X^2 = (\alpha-\mu)^T k^{-1}(\alpha-\mu),$$

как m – кратный интеграл вида

$$p(x_1>\alpha_1; x_2>\alpha_2;\ldots) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|k|}}\int_{x^2}^{\infty}\ldots\int e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T k^{-1}(x-\mu)}dx. \qquad (9)$$

При построении решающего правила воспользуемся байесовским критерием минимального среднего риска.

Согласно этому критерию необходима проверка неравенства:

$$\sum_{m=1}^{M} p_m c_{mk} f(\frac{x}{\mu_m}) \le \sum_{m=1}^{M} p_m c_{ml} f(\frac{x}{\mu_m}) \qquad (10)$$

где c_{mk}– стоимость принятия правильного решения о наличии гипотезы типа к;

c_{kl} – стоимость ошибочного принятия решения о наличии гипотезы типа κ;

$p_m \ne p(\mu_m)$ - априорная вероятность появления каждой гипотезы.

Если в результате измерений получен случайный вектор **X**, то при выполнении неравенства (10) принимается решение о справедливости гипотезы κ, т.е. в этом случае мы имеем дело с достоверной информацией.

Если неравенство не выполняется, то это свидетельствует о наличии аномальных измерений, которые могут быть следствием внешнего воздействия.

В случае, если потери (стоимость) правильного решения равны 0, т. е. $c_{\kappa\kappa}=c_{ll}=0$, и стоимость неверного решения во всех случаях одинакова, то неравенство (10) упрощается:

$$\sum_{\substack{m=1\\m\ne k}}^{M} p_m f(\frac{x}{\mu_m}) \le \sum_{\substack{m=1\\m\ne l}}^{M} p_m f(\frac{x}{\mu_m}). \qquad (11)$$

После сокращения имеем

$$p_l f(\frac{x}{\mu_l}) \le p_k f(\frac{x}{\mu_k}). \qquad (12)$$

Так как $p_l f(\frac{x}{\mu_l})$ всегда положительно и не равно нулю, то отношение

$$\Lambda_{kl} = \frac{p_k f(\frac{x}{\mu_k})}{p_l f(\frac{x}{\mu_l})} \ge 1 \qquad (13)$$

при всех $l \ne k$.

Для удобства вычислений прологарифмируем (13)

$$L = \ln\Lambda_{kl} = \ln\frac{p_k}{p_l} + \ln\frac{f(\frac{x}{\mu_k})}{f(\frac{x}{\mu_l})} \ge 0. \qquad (14)$$

Подставив в (14) выражение для плотности вероятности

$$f(\frac{x}{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|k|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T k^{-1}(x-\mu)}, \qquad (15)$$

получим

$$L^* = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |k|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T k^{-1}(x-\mu_k)}}{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |k|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_l)^T k^{-1}(x-\mu_l)}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-\mu_k)^T k^{-1}(x-\mu_k) - (x-\mu_l)^T k^{-1}(x-\mu_l)\right]. \quad (16)$$

Дальнейшие преобразования приводят к следующему выражению:

$$L^* = -\sum_{\nu=1}^{N}\left[(x_\nu - \mu_k{}^\nu)\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_k{}^i)k_{i\nu}^1\right] + \\ + \sum_{\nu=1}^{N}\left[(x_\nu - \mu_l{}^\nu)\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_l{}^i)k_{i\nu}^1\right]. \quad (17)$$

Если измерения равноточны и корреляционными связями можно пренебречь, то формула (17) упрощается.

$$L^* = \sum_{j=1}^{N}(x_j - \mu_l{}^j)^2 \cdot \frac{1}{\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^{N}(x_j - \mu_k{}^j)\frac{1}{\sigma_j^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \cdot \frac{1}{\sigma_j^2} - 2\sum_{j=1}^{N} x_j \mu_l{}^j \frac{1}{\sigma_j^2} + \sum_{j=1}^{N} \mu_l{}^{j2} \frac{1}{\sigma_j^2} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} x_j{}^2 \frac{1}{\sigma_j^2} + 2\sum_{j=1}^{N} x_j \mu_k{}^j \frac{1}{\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^{N} \mu_k{}^{j2} \frac{1}{\sigma_j^2} =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{N} x_j(\mu_k{}^j - \mu_l{}^j) \cdot \frac{1}{\sigma_j^2} + \sum_{j=1}^{N}(\mu_l{}^{j2} - \mu_k{}^{j2})\frac{1}{\sigma_j^2}. \quad (18)$$

Если вектор X задан не в абсолютных значениях, а в отклонениях от расчетной точки, то получаем окончательную формулу

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_l{}^{j2} \frac{1}{\sigma_j^2} - 2\sum_{j=1}^{N} x_j \mu_l{}^j) \frac{1}{\sigma_j^2} \geq 0. \quad (19)$$

При обнаружении аномального отклонения совместная обработка информации с измерениями, полученными ранее невозможна, так как в этом случае навигационные определения будут получены с искажениями.

Материал поступил в редакцию 21. 12. 2007г.