**УДК 681.5.015.4**

**© Кузнецов В. И.**

# АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Рассмотрены вопросы синтеза дискретного адаптивного алгоритма нелинейной фильтрации в условиях априорной неопределённости случайных возмущений в уравнениях состояния динамических систем. Получены правила, определяющие дискретный алгоритм фильтрации, описывающие функционирование адаптивного приемника с идентификатором и обеспечивающие учет флуктуаций первых статистических моментов случайных возмущений, возникающих вследствие ограниченной глубины формализации используемых моделей состояния.*

**П**олучившие глубокое теоретическое обоснование и широкое практическое применение алгоритмы оптимальной линейной и квазиоптимальной нелинейной фильтрации [1-10] предполагают использование больших объёмов априорных данных как о параметрах законов распределений вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ динамической системы и помехи $\mathbf{v}(t)$, действующей в канале измерений, так и вектора формирующего шума $\boldsymbol{\omega}(t)$ в уравнениях состояния.

В большинстве практических задач оценивания параметров моделей и идентификации параметров состояния динамических систем не удаётся достигнуть требуемых объемов априорных данных по целому ряду причин, связанных в основном с ограниченной степенью формализации моделей состояния и измерения, невозможностью учесть все многообразие внешних воздействующих факторов. Это может приводить как к снижению качества получаемых оценок, так и к практической невозможности их получения. Причем степень априорной неопределенности наибольшим образом проявляется при экспериментах в экстремальных условиях их проведения, когда используемые модели состояния динамических систем и процессов измерения их параметров состояния в силу ограниченной глубины формализации уже не гарантируют адекватного описания исследуемых объектов и процессов.

К настоящему времени в технической литературе описан широкий набор алгоритмов фильтрации как скалярного, так и векторного полезного сообщения из зашумленных результатов измерений [1, 10, 11]. Известен также ряд работ по восстановлению вектора состояния динамических систем в условиях, когда используемые математические модели содержат погрешности формализации [12, 13]. Однако имеющиеся работы не предоставляют достаточных обоснований для синтеза эффективных алгоритмов фильтрации применительно к рассматриваемым условиям априорной неопределенности параметров закона распределения векторного формирующего шума в уравнениях состояния. Так, в работах [10, 11, 14] предложен наиболее известный подход, базирующийся на расширении вектора состояния за счет включения в него априорно неизвестного вектора случайных возмущений $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$, т.е.:

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),t]+\mathbf{g}[\mathbf{x}(t),t]\cdot\boldsymbol{\omega}(t);\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)=0,\end{cases}$$

где $\mathbf{z}(\cdot)$ – расширенный вектор состояния; $\mathbf{f}[\cdot]$ – векторная функция; $\mathbf{g}[\cdot]$ – матрица интенсивностей формирующего шума $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$.

Хотя такой подход и позволяет достигнуть большей устойчивости алгоритмов фильтрации, однако применяемое расширение вектора состояния не уменьшает степени априорной неопределённости, поскольку вместо априорно неизвестной ковариационной матрицы $\mathrm{cov}\{\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\omega}(\tau)\}$ алгоритм требует задания ковариационной матрицы $\mathrm{cov}\{\dot{\boldsymbol{\omega}}(t),\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau)\}$, значения элементов которой также априорно неизвестны.

Приведенный в работе [2] алгоритм Мегилла – Лайниотиса теоретически позволяет получать несмещенные эффективные оценки параметров вектора состояния, однако отличается сложностью практической реализации и возможности его практического применения ограничены конечным множеством возможных уровней интенсивности формирующего шума $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$, действующего в уравнениях состояния. Возможности практического применения алгоритмов фильтрации, рассмотренных в работах [12, 13], также ограничены, но областью скалярных сообщений. Эти алгоритмы не обеспечивают оптимальной стратегии поиска оценок параме-

*Кузнецов Валерий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник отдела ОАО «Военно-инженерная корпорация».*

тров закона распределения действующих возмущений $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$, входящих в уравнения состояния. При этом к основному их недостатку можно отнести изначальную ориентированность на стационарность формирующего шума $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$. Для последнего предположения в практическом большинстве случаев нет достаточных оснований.

Таким образом, задача синтеза алгоритмов фильтрации скалярных и векторных сообщений из зашумлённых результатов измерений в условиях априорной неопределённости случайных возмущений $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$ в уравнениях состояния динамических систем требует дальнейшей теоретической проработки с целью обеспечения методической основы для решения задач статистического анализа экспериментальных данных, получаемых в статистически неоднородных условиях экспериментов.

Априорная параметрическая неопределённость приводит к целесообразности применения адаптивного подхода к решению задач оценивания параметров моделей и идентификации параметров состояния динамических систем. Под адаптивными алгоритмами фильтрации или оценивания в дальнейшем понимаются такие, при формировании которых для преодоления априорной неопределенности используется предварительное обучение. Целью обучения является формирование на основе измеряемой реализации случайного процесса (выборки) оценок неизвестных параметров распределения (при априорной параметрической неопределённости). Эти оценки используются затем вместо неизвестных вероятностных характеристик при синтезе алгоритмов фильтрации [5].

В дальнейшем при обосновании алгоритмов фильтрации для рассматриваемых условий неопределённости учтено следующее:

– поскольку речь идет об идентификации параметров состояния динамических систем из зашумленных результатов измерений в условиях априорной неопределённости векторов формирующих шумов в уравнениях состояния, то вывод основных уравнений фильтрации рассматривается из анализа трехмерного векторного процесса $\{\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\omega}(t)\}$, включающего вектор измерений $\mathbf{y}(t)$, вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ и вектор формирующего шума $\boldsymbol{\omega}(t)$;

– учитывая, что результаты измерений фиксируются в дискретные моменты времени

$$t_k \in \mathbf{T}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, N),$$

вывод уравнений рассматривается для условий дискретной фильтрации.

Последнее допускается, с одной стороны, с целью более компактного изложения материала, а с другой – не исключает возможностей представления рассматриваемых ниже теоретических выводов для непрерывного времени, что может быть достигнуто при соответствующем предельном переходе, когда шаг дискретизации стремиться к бесконечно малой величине, т.е. $(t_k - t_{k-1}) \to 0$.

## Постановка задачи адаптивной фильтрации

Рассмотрим нелинейную (в общем случае) динамическую систему, поведение которой описывается математической моделью, содержащей $\mathbf{n}$-мерный вектор фазовых координат:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t] \cdot \boldsymbol{\omega}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)$ – вектор фазовых координат размерности $(n \times 1)$; а $\mathbf{f} : R_n \to R_n$ – непрерывная векторная функция в проекции пространства состояний $\Omega_{\mathbf{x}}^{\infty}$ бесконечной размерности на пространство состояний ограниченной размерности $\Omega_{\mathbf{x}}^{n}$ $(\Omega_{\mathbf{x}}^{n} \subset \Omega_{\mathbf{x}}^{\infty})$; $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t] : R_n \to R_n$. Вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ – гауссов шум (процесс) с априорно неизвестными статистическими характеристиками, относительно которых предполагается следующее:

$$E\{\boldsymbol{\omega}(t)\} = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\omega}}(t);$$

$$E\{[\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\omega}}(t)] \cdot [\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\omega}}(t)]^T\} = \\ = \mathbf{Q}(t) \cdot \delta(t - \tau),$$

где $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция, $\mathbf{Q}(t)$ – матрица интенсивностей.

Начальное значение $\mathbf{x}_0$ вектора $\mathbf{x}(t)$ принимается за гауссов случайный вектор с известным средним $E\{\mathbf{x}_0\} = \hat{\mathbf{x}}_0$ и матрицей ковариаций вида:

$$E\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T\} = \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{x}}(t = 0).$$

Пусть в дискретные моменты времени $t_k$ проводятся измерения, образующие последовательность $m$-мерных величин (рис.1):

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k),$$

где $\mathbf{x}(k) \equiv \mathbf{x}(t_k)$; $\mathbf{h}(k)$ – матрица измерений [1,8] размерности $(m \times n)$; $\mathbf{v}(k)$ – белый гауссов шум (последовательность) размерности $(m \times 1)$, не зависящий от $\mathbf{x}_0$, со следующими статистическими характеристиками:

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = 0 \quad \forall k,$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{v}^T(j)\} = \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{v}}(k) = \mathbf{R}(k) \cdot \delta(k - j),$$

где $\mathbf{R}(k)$ – матрица интенсивностей.

Последовательность $\mathbf{x}(k)$ описывается дискретной моделью состояния вида:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1) \cdot \mathbf{x}(k-1) + \\ +\mathbf{G}(k/k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1),$$

где $\mathbf{F}(k/k-1)$, $\mathbf{G}(k/k-1)$ – переходные матрицы вектора состояний $\mathbf{x}(\cdot)$ и случайных возмущений $\mathbf{w}(\cdot)$ со-

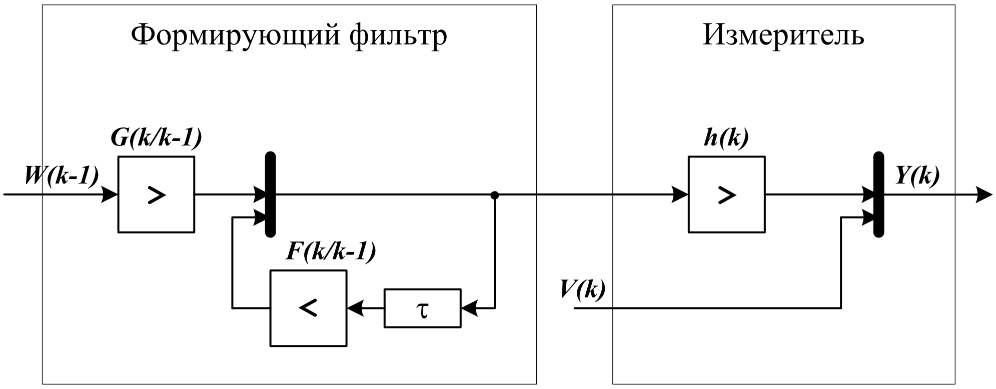


Рис.1. Структурная схема дискретного формирующего фильтра и измерителя

ответственно.

Задача, таким образом, состоит в отыскании наилучшей в смысле максимума апостериорной плотности вероятности оценки $\hat{\mathbf{x}}(k)$ вектора $\mathbf{x}(k)$ по мере поступления данных $\mathbf{y}(k)$, что с учетом априорной неопределённости формирующего шума $\mathbf{w}(k)$ можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = E\{\mathbf{x}(k)/\mathbf{y}(k)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(k)\cdot\pi[\mathbf{x}(k)/\mathbf{y}(k),\mathbf{w}(k)]\times \\ \times\pi[\mathbf{w}(k)/\mathbf{y}(k)]d\mathbf{w}d\mathbf{x},$$

где $\pi[\mathbf{x}(k)/\mathbf{y}(k),\mathbf{w}(k)]$, $\pi[\mathbf{w}(k)/\mathbf{y}(k)]$ – условные плотности распределения вероятностей.

## Синтез алгоритма адаптивной фильтрации

Пусть, как и ранее [1], модель состояния динамической системы представлена в виде разностного стохастического уравнения вида:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1) + \\ +\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1), \qquad (1)$$

а уравнение измерений представляет аддитивную смесь полезного сообщения и помехи:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k).$$

Относительно векторов $\mathbf{x}(\cdot)$, $\mathbf{w}(\cdot)$, $\mathbf{y}(\cdot)$ предполагается известным следующее:

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = 0 \quad \forall k, \quad E\{\mathbf{v}(k)\cdot\mathbf{w}^T(j)\} = 0 \quad \forall k\forall j; \\ E\{\mathbf{v}(k)\cdot\mathbf{v}^T(j)\} = \mathrm{cov}\{\mathbf{v}(k),\mathbf{v}(j)\} = \mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}(k) = \\ = \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(k)\cdot\delta(k-j),$$

а также начальные условия:

$$\mathbf{x}(k=0) = \mathbf{x}(0), \quad \mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k=0) = \mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(0).$$

Отметим, что последовательность случайных величин $\mathbf{w}(\cdot)$ в уравнении (1) непосредственно не наблюдается. Однако, поскольку вектор $\mathbf{w}(\cdot)$ входит в уравнение состояний и влияет на параметры состояния, то это влияние должно проявляться в результатах измерений $\mathbf{y}(\cdot)$. В связи с этим целесообразно рассматривать трехмерную случайную векторную последовательность $\{\mathbf{y}(k),\mathbf{x}(k),\xi(k)\}$, где

$$\xi(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\Delta\mathbf{w}(k-1).$$

Плотность совместного распределения вероятности трехмерной случайной последовательности в соответствии с формулой полной вероятности [15] имеет вид:

$$\pi[\mathbf{y}(k),\mathbf{x}(k),\xi(k)] = \\ = \pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k),\xi(k)]\cdot\pi[\xi(k)/\mathbf{x}(k)]\cdot\pi[\mathbf{x}(k)] = \\ = \pi[\mathbf{x}(k)/\mathbf{y}(k),\xi(k)]\cdot\pi[\xi(k)/\mathbf{y}(k)]\cdot\pi[\mathbf{y}(k)],$$

откуда следует, что

$$\pi[\mathbf{x}(k)/\mathbf{y}(k),\xi(k)] = \\ = \frac{\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k),\xi(k)]\cdot\pi[\xi(k)/\mathbf{x}(k)]\cdot\pi[\mathbf{x}(k)]}{\pi[\xi(k)/\mathbf{y}(k)]\cdot\pi[\mathbf{y}(k)]}. \qquad (2)$$

Полученное выражение (2) для апостериорной плотности вероятности можно существенно упростить, принимая во внимание, что

$$\pi[\xi(k)/\mathbf{y}(k)] = \pi[\xi(k)], \qquad (3)$$

так как векторная случайная величина $\xi(k)$ от $\mathbf{y}(k)$ не зависит, а определяется только возмущениями модели состояния, возникающими в связи с допускаемыми погрешностями ее формализации.

Кроме того, можно показать, что и

$$\pi[\xi(k)/\mathbf{x}(k)] = \pi[\xi(k)]. \qquad (4)$$

Последнее предположение (4) связано с принятой формой модели состояния, для которой случайные возмущения $\mathbf{w}(\cdot)$ проявляются для тех компонент вектора состояния реальной динамической системы (в пространстве параметров состояния $\Omega_{\mathbf{x}}^{\infty}$), которые не учтены при переходе к формализованному представлению модели состояния конечномерным вектором $\mathbf{x}(\cdot)$ (в пространстве параметров состояния $\Omega_{\mathbf{x}}^{n}\subset\Omega_{\mathbf{x}}^{\infty}$) ввиду их предполагаемой малой значимости.

С учетом (3), (4) выражение (2) принимает вид:

$$\pi[\mathbf{x}(k)/\mathbf{y}(k),\xi(k)] = \frac{\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k),\xi(k)]\cdot\pi[\mathbf{x}(k)]}{\pi[\mathbf{y}(k)]}, \quad (5)$$

где $\pi[\mathbf{x}(k)] = \left[(2\pi)^n \cdot \det \mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k)\right]^{-\frac{1}{2}} \times$

$$\times \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot\left\|\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)\right\|^2 \mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}^{-1}(k)\right\}.$$

Поскольку плотность распределения $\pi[\mathbf{y}(k)]$ от $\mathbf{x}(k)$ не зависит, то может быть представлена в (5) нормирующим множителем. Целесообразно более детально рассмотреть условную плотность распределения вероятности $\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k),\xi(k)]$.

Пусть $E\left\{\left\|\xi(k)\right\|^2\right\}=0$, что возможно при $E\left\{\xi(k)\right\}=0$ и означает полную адекватность модели состояния реальной динамической системе. Тогда

$$\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k),\xi(k)] = \pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k)].$$

Если $E\left\{\xi(k)\right\}\neq 0$, то и $E\left\{\left\|\xi(k)\right\|^2\right\}\neq 0$. В этом случае необходимо каким-либо образом учитывать возникающие вариации $\xi(k)$, вызванные случайными возмущениями $\mathbf{w}(k)$.

С учетом последних замечаний плотность распределения вероятности $\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k),\xi(k)]$ может быть приведена к виду $\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k)]$ в том случае, когда удается выполнить условие $E\left\{\xi(k)\right\}=0$. В этом случае вывод уравнений фильтрации в полной мере соответствует выводу уравнений квазиоптимальной нелинейной фильтрации [1, 3], т.е. для

$$\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k)] = \\ = C\cdot\exp\{-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k)\right\|^2 \times \\ \times\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}^{-1}(k) - \frac{1}{2}\left\|\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)\right\|^2\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}^{-1}(k)\}$$

наилучшая в смысле максимума условной плотности вероятности $\pi[\mathbf{y}(k)/\mathbf{x}(k)]$ оценка $\hat{\mathbf{x}}(k)$ может быть найдена из условия минимума функционала:

$$J = \left\|\mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k)\right\|^2\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}^{-1}(k) + \\ +\left\|\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)\right\|^2\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}^{-1}(k). \quad (6)$$

Из равенства

$$\frac{dJ}{d\mathbf{x}(k)} = -2\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}^{-1}(k)\times[\mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\hat{\mathbf{x}}(k)] + \\ +2\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}^{-1}(k)\cdot[\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k)] = 0$$

оптимальная оценка вектора $\mathbf{x}(k)$ будет выражена уравнением:

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}^{-1}(k)\times \\ \times[\mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\hat{\mathbf{x}}(k)]. \quad (7)$$

В дальнейшем, полагая в качестве априорной оценки $\hat{\mathbf{x}}(k)$ в правой части равенства (7) ее прогнозируемое значение, определяемое в соответствии с уравнением

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1), \quad (8)$$

преобразуем уравнение (7) к рекуррентному виду:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k/k-1) + \mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\times \\ \times\cdot[\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k) + \\ +\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}(k)]^{-1}\cdot[\mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k/k-1)].$$

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{y}}(k/k-1) = \\ = \mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}(k) + \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k).$$

Следует отметить, что ковариационная матрица $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)$ определяется выражением:

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1) = \\ = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k-1)\cdot\mathbf{F}^T(k/k-1) + \\ +\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{w}}(k-1)\cdot\mathbf{G}^T(k/k-1),$$

в которое входит ковариационная матрица $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{w}}(k-1)$ формирующего шума, погрешности описания которой приводят к появлению медленно меняющейся векторной компоненты $\xi(k)$:

$$\xi(k) = E\left\{\mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k)\right\} \cong \\ \cong \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\Delta\mathbf{w}(k-1). \quad (9)$$

Соотношение

$$\xi(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\Delta\mathbf{w}(k-1) \quad (10)$$

позволяет осуществить переход к определению вариаций $\Delta\mathbf{w}(k-1)$ в тех случаях, когда модели измерений относятся к классу линейных, т.е. элементы матрицы измерений $\mathbf{h}(k)\in[0,1]$ (вопросы линейного отображения нелинейных моделей измерения будут рассмотрены в отдельной статье). Учитывая, что для линейных моделей измерения $\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{h}^T(k)=\mathbf{I}$, соотношение (10) можно записать в виде:

$$\mathbf{h}^T(k)\cdot\xi(k) = \mathbf{G}(k/k-1)\cdot\Delta\mathbf{w}(k-1),$$

откуда следует

$$\Delta\mathbf{w}(k-1) = \\ = \left[\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{G}^T(k/k-1)\right]^{-1}\times \\ \times\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\xi(k). \quad (11)$$

С учетом полученного выражения (11) для апостериорной оценки вариаций вектора формирующего шума $\Delta\mathbf{w}(k-1)$, а также принимая во внимание взаимную некоррелированность векторов $\mathbf{w}(k-1)$ и $\Delta\mathbf{w}(k-1)$, т.е. $\mathrm{cov}\left\{\mathbf{w}(k-1),\Delta\mathbf{w}(k-1)\right\}=0$, становиться возможным определить апостериорную оценку ковариационной матрицы формирующего шума $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{w}}(k-1)$ в виде:

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{w}}(k-1) = \left\|\mathbf{w}(k-1)\right\|^2 + \left\|\Delta\mathbf{w}(k-1)\right\|^2, \quad (12)$$

а для апостериорной оценки реализации формирующего шума будет справедливо:

$$\mathbf{w}_{ps}(k-1) = \mathbf{w}_{pr}(k-1) + \Delta\mathbf{w}_{ps}(k-1). \qquad (13)$$

Полученные правила определяют дискретный алгоритм адаптивной фильтрации, описывающий функционирование адаптивного приемника с идентификатором, причем рассматриваемый принцип адаптации (самонастройка априорно неизвестной матрицы ковариаций $\mathbf{\Psi_w}(\cdot)$ вектора формирующего шума в уравнениях состояния) осуществляется по результатам апостериорных оценок вектора состояния, что не требует расширения вектора оцениваемых параметров. Это достигается введением контура параметрической адаптации, обеспечивающего учет флуктуаций первых статистических моментов случайных возмущений, возникающих вследствие ограниченной формализации используемых моделей состояния. В общем случае алгоритм адаптивного нелинейного цифрового фильтра сводиться к схеме: предиктор – контур параметрической адаптации – корректор – идентификатор (см. рис.2), что обеспечивает устранение динамической погрешности фильтрации. Последнее позволяет расширить область применения полученных адаптивных фильтров для решения задач фильтрации и параметрической идентификации динамических систем, для которых математические модели состояния имеют ограниченную глубину формализации, что наиболее полно соответствует решению задач прикладного характера по статистическому анализу экспериментальных данных в статистически неоднородных условиях испытаний динамических систем.

## Дискретный алгоритм адаптивной фильтрации

Модель сообщения

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1) + \\ +\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1);$$

модель измерений

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k);$$

априорные данные

$$E\{\mathbf{w}(k)\} = E\{\mathbf{v}(k)\} = 0;$$
$$E\{\mathbf{x}(k_0)\} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{x}(k_0);$$
$$\mathrm{cov}\{\mathbf{w}(k),\mathbf{w}(j)\} = \\ = \mathbf{\Psi_w}(k) = \mathbf{Q_w}(k)\cdot\delta_k(k-j);$$
$$\mathrm{cov}\{\mathbf{w}(k),\mathbf{v}(j)\} = 0;$$
$$\mathrm{var}\{\mathbf{v}(k_0)\} = \mathbf{\Psi_v}(k_0);$$
$$\mathrm{var}\{\mathbf{x}(k_0)\} = \mathbf{\Psi_x}(k_0);$$
$$\mathrm{cov}\{\mathbf{x}(k_0),\mathbf{v}(j)\} = 0, \quad j \ge k_0;$$

*предиктор*

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1);$$

$$\mathbf{\Psi_x}(k/k-1) = \\ = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi_x}(k-1)\cdot\mathbf{F}^T(k/k-1) + \\ +\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi_w}(k-1)\cdot\mathbf{G}^T(k/k-1);$$

*контур адаптации*

вычисление коэффициента усиления фильтра

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{x}(k) = \\ = \mathbf{\Psi_x}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot[\mathbf{h}(k)\times \\ \times\mathbf{\Psi_x}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k) + \mathbf{\Psi_v}(k)]^{-1};$$

расчет вариаций вектора измерений

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{y}(k) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{h}(k)\cdot\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{x}(k)\right]\times \\ \times\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k/k-1)\right];$$

определение медленно меняющейся компоненты

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \beta\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{y}(k) + (1-\beta)\cdot\boldsymbol{\xi}(k-1);$$

расчет вариаций формирующего шума

$$\Delta\mathbf{w}(k-1) = \left[\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{G}^T(k/k-1)\right]^{-1}\times \\ \times\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\boldsymbol{\xi}(k);$$

вычисление ковариационной матрицы формирующего шума

$$\mathbf{\Psi_w}(k-1) = \left\|\mathbf{w}(k-1)\right\|^2 + \left\|\Delta\mathbf{w}(k-1)\right\|^2;$$

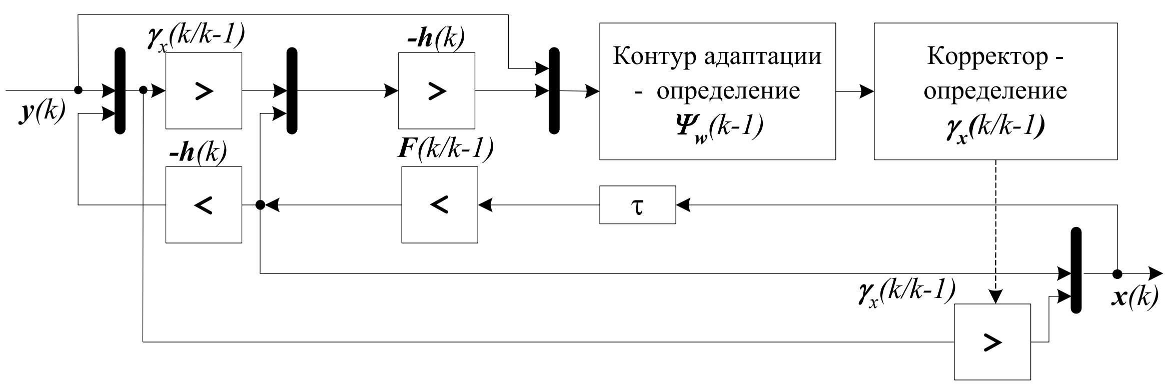


Рис.2. Структурная схема дискретного адаптивного приемника с идентификатором

расчет оценок реализации формирующего шума

$$\mathbf{w}(k-1) = \mathbf{w}(k-1) + \Delta\mathbf{w}(k-1);$$

*корректор*

расчет ковариационной матрицы погрешностей прогноза

$$\mathbf{\Psi_x}(k/k-1) =$$
$$= \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi_x}(k-1)\cdot\mathbf{F}^T(k/k-1) +$$
$$+\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi_w}(k-1)\cdot\mathbf{G}^T(k/k-1);$$

вычисление коэффициента усиления фильтра

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{x}(k) =$$
$$= \mathbf{\Psi_x}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot[\mathbf{h}(k)\times$$
$$\times\mathbf{\Psi_x}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k) + \mathbf{\Psi_v}(k)]^{-1};$$

*идентификатор*

алгоритм фильтрации (идентификации) вектора состояния

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\hat{\mathbf{x}}(k-1) +$$
$$+\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{x}(k)\cdot[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\hat{\mathbf{x}}(k-1)];$$

вычисление ковариационной матрицы ошибок фильтрации

$$\mathbf{\Psi_x}(k) =$$
$$= \mathbf{\Psi_x}(k/k-1) - \mathbf{\Psi_x}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{x}(k)\times$$
$$\times[\mathbf{\Psi_v}(k) + \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{\Psi_x}(k/k-1)\times$$
$$\times\mathbf{h}^T(k)\cdot\boldsymbol{\gamma}(k)]^{-1}\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{\Psi_x}(k/k-1).$$

На рис. 3 представлен фрагмент графика, иллюстрирующий функционирование рассмотренного алгоритма фильтрации, на примере выделения полезного сообщения из зашумлённых результатов измерений нестационарного процесса.

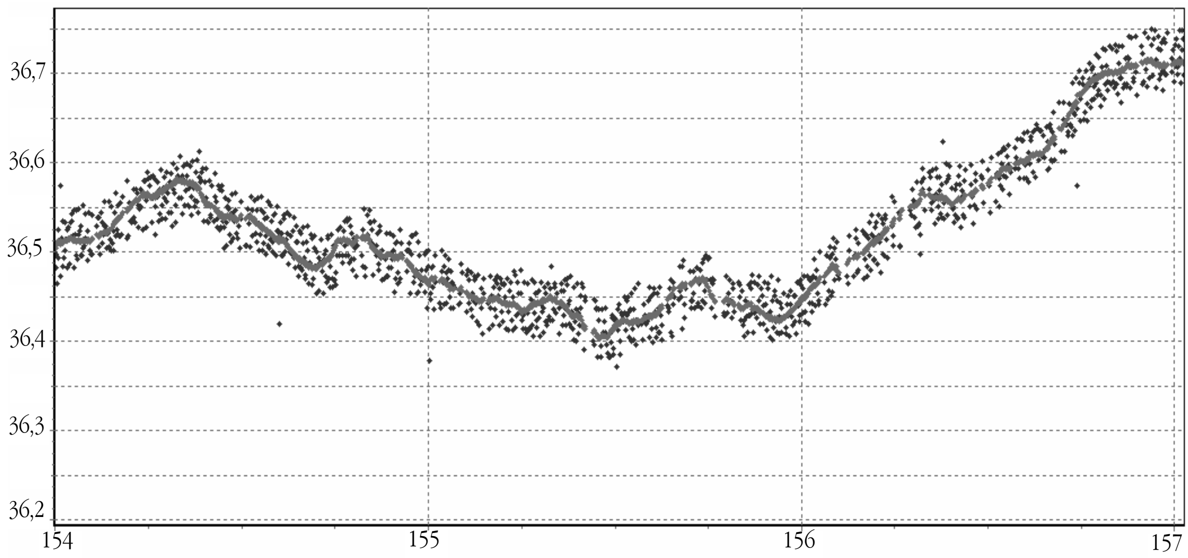


Рис. 3. Фрагмент графика зашумлённых результатов измерений нестационарного процесса и оценки математического ожидания полезного сообщения.

*Литература*

*1. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении/ Пер. с англ. – М.: Связь, 1976.*
*2. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы/ Пер. с англ. – М.: Наука, 1980.*
*3. Тихонов В.И., Кульман А.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975.*
*4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1966.*
*5. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1984.*
*6. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. – М.: Радио и связь, 1981.*
*7. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1983.*
*8. Гроп Д. Методы идентификации систем/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.*
*9. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Сов. радио, 1973.*
*10. Петров А.В., Яковлев А.А. Анализ и синтез радиотехнических комплексов. – М,6 Радио и связь, 1984.*
*11. Острем К.Й. Введение в стохастическую теорию управления/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.*
*12. Мук Д.Дж., Джанкинс Дж.Л. Метод минимальной ошибки модели для оценивания динамических систем с неточной моделью// Аэрокосмическая техника. – 1989. - №1.*
*13. Мук Д.Дж. Оценка и идентификация нелинейных динамических систем// Аэрокосмическая техника. – 1990. - №2.*
*14. Острем К.Й. Адаптивное управление с обратной связью/ Пер. с англ. –1987. – Т. 75, №2.*
*15. Справочник по теории вероятности и математической статистике/ В.С.Королюк, Н.И.Портенко, А.В.Скороход, А.Ф.Турбин. – М.: Наука, 1985.*

Материал поступил в редакцию 20. 12. 2007г.