УДК 593.3

© Осяев О.Г., Стус А. М., Татурин Ю.А.
Osyaev O.G., Stus A.M., Taturin U.A.

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СТАРЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

EQUATIONS OF THE CREEP THEORY BASED ON THE THEORY OF AGEING AND THE KINETIC THEORY UNDER COMPLEX INTENSE-DEFORMED CONDITION

Аннотация. *Получены уравнения для решения задач ползучести на основе теории старения и кинетической теории для конструкций ракетно-космической техники из полимерных композитных материалов, находящихся в условиях длительной эксплуатации и стационарного термосилового нагружения.*

Annonfnion. *The equations for solution of creep tasks are obtained on the basis of the theory of ageing and the kinetic theory for designs of space-rocket technical equipment from polymeric composite materials which being in conditions of long-term operations and stationary thermo-power loading.*

Ключевые слова. *Уравнения ползучести, теория старения, полимерные композиты, длительная эксплуатация, термосиловое нагружение, физические уравнения, функция ползучести, принцип соответствия, операторный модуль вязкоупругости.*

Key words. *Creep equations, the theory of ageing, polymeric composites, long-term operation, thermo-power loading, physical equations, creep function, principle of conformity, operational module of ductile-elastisity.*

Полная система уравнений теории ползучести, как и в теории упругости и пластичности, включает три основные группы: равновесия или движения, физические и геометрические. Рассмотрим уравнения ползучести на основе теории старения и кинетической теории для полимерных композитных материалов (ПКМ) конструкций ракетно-космической техники (РКТ), находящихся в условиях длительной эксплуатации и стационарного термосилового нагружения (ТСН).

Уравнения равновесия в тензорном виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i = 0;\ \ i = 1,2,3. \qquad (1)$$

Геометрические уравнения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);\ \ i,k = 1,2,3, \qquad (2)$$

где σ_{ij}, ε_{ij}, u_i – соответственно компоненты тензоров напряжений, деформаций, перемещений;

x_i - переменные осей координат;

X_i - компоненты объемных сил в направлениях x_i.

Физические соотношения в предположении, что мгновенные деформации являются упругими, кривые ползучести – подобными и существует степенная зависимость деформаций ползучести от напряжений, удобно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] + \varepsilon_T + \frac{3}{2}\sigma_i^{n-1}\Omega(t)\left(\sigma_{11} - \sigma_{cp}\right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \mu(\sigma_{33} + \sigma_{11})\right] + \varepsilon_T + \frac{3}{2}\sigma_i^{n-1}\Omega(t)\left(\sigma_{22} - \sigma_{cp}\right);$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] + \varepsilon_T + \frac{3}{2}\sigma_i^{n-1}\Omega(t)\left(\sigma_{33} - \sigma_{cp}\right);$$

Осяев Олег Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент, старший преподаватель Ростовского военного института Ракетных войск, тел. 7(495) 453-36-76;
Стус Александр Михайлович – начальник Управления строительства, инженерно-технического обеспечения и расквартирования РВСН, тел. 7(495) 453-36-76;
Татурин Юрий Александрович – начальник факультета Ростовского военного института Ракетных войск, тел. 7(495) 453-36-76.

Osyaev Oleg Gennadevich – the candidate of technical sciences, the senior lecturer, the senior teacher of the Rostov Military Institute of Missile Troops, tel. 7(495) 453-36-76;
Stus Alexander Michailovich – the chief of Department of construction, engineering-technical supply and quartering of MTSP, tel. 7(495) 453-36-76;
Taturin Yuriy Alexandrovich – the chief of faculty of the Rostov Military Institute of Missile Troops, tel. 7(495) 453-36-76.

$$\varepsilon_{12}=\frac{\sigma_{12}}{G}+3\sigma_i^{n-1}\Omega(t)\sigma_{12}; \qquad (3)$$
$$\varepsilon_{23}=\frac{\sigma_{23}}{G}+3\sigma_i^{n-1}\Omega(t)\sigma_{23};$$
$$\varepsilon_{13}=\frac{\sigma_{13}}{G}+3\sigma_i^{n-1}\Omega(t)\sigma_{13},$$

где ε_T – температурные деформации;

$\sigma_{cp}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$ – среднее напряжение;

$\Omega(t)=\frac{\varepsilon_i^{П}}{\sigma_i^n}$ – функция ползучести;

σ_i – интенсивность напряжений;

$\varepsilon_i^{П}$ – интенсивность деформаций ползучести.

Функцию ползучести и температурные деформации определим с помощью кинетических уравнений [1]. В соответствии с работой [2] деформация ползучести может быть определена в виде произведений функций

$$\varepsilon^{П}(\sigma,t)=\psi(\sigma)\Omega(t). \qquad (4)$$

В практических расчетах функцию $\psi(\sigma)$ считают степенной

$$\psi(\sigma)=\sigma^n, \qquad (5)$$

где $n \succ 1$ – постоянная для данной температуры и материала величина.

Используя полученные выше выражения для деформаций ползучести, определим выражения для функций $\psi(\sigma)$, $\Omega(t)$.

Экспоненциальную функцию $\varepsilon^{П}$ можем записать через эмпирические константы [2]

$$\varepsilon^{П}=\frac{1}{E}\lambda\beta\sigma_0 te^{-\lambda t}=\frac{\beta}{\eta}\sigma_0 te^{-\lambda t}=\psi(t)\Omega(t). \qquad (6)$$

Тогда, в соответствии с выражениями для напряжений, получим

$$\psi(\sigma)=\beta\sigma_0; \qquad (7)$$

$$\Omega(t)=\frac{1}{E}\lambda te^{-\lambda t}=\frac{1}{\eta}te^{-\lambda t}. \qquad (8)$$

В кинетическом виде искомые функции можно определить с помощью уравнений [1]

$$\varepsilon^{П}=\frac{t}{\eta}\sigma\ln\frac{t}{\tau_0}=\psi(t)\Omega(t). \qquad (9)$$

Сравнив полученные уравнения (8) и (9), запишем аналогичные по виду кинетические функции:

$$\psi(\sigma)=\sigma; \qquad (10)$$

$$\Omega(t)=\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}. \qquad (11)$$

В соответствии с теорией старения сомножитель $\sigma_i^{n-1}\Omega(t)$ в (3) определяется соотношением

$$\sigma_i^{n-1}\Omega(t)=\frac{\varepsilon_i^{П}}{\sigma_i}. \qquad (12)$$

Тогда согласно (6)–(11) сомножитель (12) можно записать

• через эмпирические коэффициенты

$$\sigma_i^{n-1}\Omega(t)=\frac{\varepsilon_i^{П}}{\sigma_i}=\frac{\sigma_0}{E\sigma_i}\lambda\beta te^{-\lambda t}=\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}te^{-\lambda t}, \qquad (13)$$

• согласно кинетической теории

$$\sigma_i^{n-1}\Omega(t)=\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}. \qquad (14)$$

Использовав полученные выражения (13), (14), а также кинетическое выражение для температурных деформаций [1], можем записать для каждого фиксированного момента времени t систему физических уравнений теории старения в полуэмпирическом виде

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\mu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]+\\
&+\alpha\Delta T+\frac{3}{2}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}te^{-\lambda t}\left(\sigma_{11}-\sigma_{cp}\right);\\
&\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\mu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\right]+\\
&+\alpha\Delta T+\frac{3}{2}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}te^{-\lambda t}\left(\sigma_{22}-\sigma_{cp}\right);\\
&\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{33}-\mu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right]+\\
&+\alpha\Delta T+\frac{3}{2}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}te^{-\lambda t}\left(\sigma_{33}-\sigma_{cp}\right);\\
&\varepsilon_{12}=\sigma_{12}\left(\frac{1}{G}+3te^{-\lambda t}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}\right);\\
&\varepsilon_{23}=\sigma_{23}\left(\frac{1}{G}+3te^{-\lambda t}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}\right);\\
&\varepsilon_{13}=\sigma_{13}\left(\frac{1}{G}+3te^{-\lambda t}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}\right)
\end{aligned} \qquad (15)$$

или, согласно выражению (14), полученному на основе кинетического подхода

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\mu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]+;\\
&+\ln\frac{t}{\tau_0}\left[\frac{\alpha kT}{C}+\frac{3}{2}\left(\sigma_{11}-\sigma_{cp}\right)\frac{t}{\eta}\right];\\
&\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\mu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\right]+\\
&+\ln\frac{t}{\tau_0}\left[\frac{\alpha kT}{C}+\frac{3}{2}\left(\sigma_{22}-\sigma_{cp}\right)\frac{t}{\eta}\right];
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] +$$

$$+ \ln\frac{t}{\tau_0}\left[\frac{\alpha kT}{C} + \frac{3}{2}\left(\sigma_{33} - \sigma_{cp}\right)\frac{t}{\eta}\right]; \qquad (16)$$

$$\varepsilon_{12} = \sigma_{12}\left(\frac{1}{G} + 3\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}\right);$$

$$\varepsilon_{23} = \sigma_{23}\left(\frac{1}{G} + 3\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}\right);$$

$$\varepsilon_{13} = \sigma_{13}\left(\frac{1}{G} + 3\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}\right).$$

Анализ полученных уравнений показывает, что в физических уравнениях для деформаций сдвига последний сомножитель играет роль операторного модуля сдвига $\bar{G}$ теории вязкоупругости, соответствующего модулю сдвига G в теории упругости по аналогии с определенным ранее операторным модулем упругости $\bar{E}$.

В соответствии с полученными кинетическими и полуэмпирическими уравнениями (15) и (16) теории старения, можем записать выражения для операторного модуля сдвига

• в полуэмпирическом виде

$$\bar{G} = \left(\frac{1}{G} + 3te^{-\lambda t}\frac{\beta\sigma_0}{\eta\sigma_i}\right)^{-1}; \qquad (17)$$

• на основе кинетического подхода

$$\bar{G} = \left(\frac{1}{G} + 3\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1}. \qquad (18)$$

Перепишем кинетическое уравнение для одноосного деформирования в раскрытом виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} + \ln\frac{t}{\tau_0}\frac{\alpha kT}{C} + \sigma_{11}\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}, \qquad (19)$$

тогда по аналогии с выражением для напряжений кинетической теории [1] получим после преобразования выражения (19)

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 + \ln\frac{t}{\tau_0}\left(\frac{\alpha kT}{C} + \sigma_{11}\frac{t}{\eta}\right). \qquad (20)$$

Учтя, что второе слагаемое в скобках выражения (19) представляет собой напряжения, обусловленные тепловой составляющей, запишем

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} + \sigma_{11}(T)\right] + \sigma_{11}\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}, \qquad (21)$$

тогда для обобщенных напряжений, обусловленных действием тепловой и механической составляющей ТСН, получим обобщенное уравнение связи деформаций и напряжений при одноосном деформировании

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11}(\sigma, T) + \sigma_{11}\frac{t}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0} \qquad (22)$$

или после преобразования

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}\left(1 + \frac{1}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}t\right). \qquad (23)$$

Тогда выражение для величины, обратной операторному модулю упругости, примет обобщенный вид

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{\eta}\ln\frac{t}{\tau_0}t\right). \qquad (24)$$

Таким образом, на основании принципа соответствия теории упругости и вязкоупругости справедливы физические соотношения между напряжениями и деформациями ползучести для реологических материалов, выраженные через операторные модули вязкоупругости $\bar{E}$ и вязкого сдвига $\bar{G}$, полученные в кинетической и полуэмпирической форме (17), (18), (24)

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{\bar{E}_{ii}}; \ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{ij}}{\bar{G}_{ij}}, \ i = 1,2,3, \ j = 1,2,3. \qquad (25)$$

Литература

1. Журков С.Н. Дилатонный механизм прочности твердых тел / Физика прочности и пластичности. М.: Наука. – 1986. С.5–10.

2. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении.– М.– Машиностроение, 1977. – 248 с.

Материал поступил в редакцию 23. 10. 2008г.