УДК 519.711

© Дедков В.К.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТИПА «СВЕРТКИ» ЗАКОНА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Представлена модель преобразования закона экстремальных распределений, позволяющая выразить непрерывный случайный процесс нагрузки, действующей на объект, последовательностью функций распределения экстремальных (наибольших) независимых случайных величин.

Работа выполнена по гранту 08-08-00086-а

Процесс, получаемый из некоторого стационарного случайного процесса с непрерывным временем по правилу «некоррелированных максимумов», представляет собой дискретную последовательность коротких импульсов, некоррелированных и независимых. Такой процесс называется полностью некоррелированным или чисто случайным процессом

$$<\sup \widehat{u}(\tau)> \overset{d}{=} <\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, ..., \widehat{u}_j, ..., \widehat{u}_n> = \widehat{U}_{<n>} \qquad (1)$$

где $\widehat{u}_i = <\sup \widehat{u}(\tau)>_i$, $[i=1(1)n]$; $\tau \in (t_i, t_i + \tau_{кор})$.

Функция распределения многомерного, случайного вектора, являющаяся адекватным описанием случайного процесса нагружения, может быть представлена следующим выражением:

$$F_{\widehat{U}_{<n>}}(U_{<n>}) = P\left[(\widehat{u}_1 \le u_1) \cap (\widehat{u}_2 \le u_2) ... \cap (\widehat{u}_n \le u_n)\right],$$

$$[i=1(1)n]. \qquad (2)$$

Принимая во внимание, что наибольшие значения стационарного случайного процесса, преобразованные по методу «некоррелированных максимумов», независимы, а границы множеств соответствующих событий A_1, A_2,..., A_n неизменны во времени, функцию распределения $F_{\widehat{U}_{<n>}}$ можно представить в следующем виде:

$$F_{\widehat{U}_{<n>}}(U_{<n>}) = \prod_n P(\widehat{u}_n \le u). \qquad (3)$$

Поскольку наибольшие некоррелированные значения стационарного случайного процесса, образующие последовательность событий $\widehat{A} = (\widehat{u}_i \le u)$ для любого i-го события, распределены по одному и тому же закону, то выражение (3) принимает следующий вид:

$$F_{\widehat{U}_{<n>}}(U_{<n>}) = \left[F_{\widehat{u}}(u)\right]^n = F_{\widehat{u}_{<n>}}(u), \qquad (4)$$

где $\widehat{u}_{<n>} = sup(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, ..., \widehat{u}_n)$ – случайная величина, представляющая собой наибольшее значение из последовательности n независимых одинаково распределенных случайных величин (являющихся наибольшими значениями процесса на интервалах времени $\tau_{кор}$).

Поскольку

$$\widehat{u}_i \overset{d}{=} <\sup_{\tau \in (t_i, t_i + \tau_{кор})} \widehat{u}(\tau)>,$$

то соответственно наибольшее значение из последовательности n случайных величин записывается в следующем виде:

$$\widehat{u}_{<n>} = sup\left[<\sup_{\tau \in (t_i, t_i + \tau_{кор})} \widehat{u}(\tau)>_n\right]; [i=1(1)n]; \ t_i \neq t_i - 1 + \tau_{кор}, \qquad (5)$$

где $\widehat{u}_{<n>}$ – это по-прежнему наибольшее значение случайного процесса на интервале времени, равном n периодам корреляции.

В последнем случае случайный вектор $\widehat{U}_{<n>}$ является вырожденным, т.е. может рассматриваться как точка в одномерном пространстве со случайной координатой $\widehat{u}_{<n>}$.

Деление случайного процесса на «участки», в пределах каждого из которых случайная переменная $\widehat{u}$ проходит (в стохастическом смысле) все фазы своего изменения, благодаря чему ее наибольшее значение имеет «свободу выбора», по сути дела, позволяет представить стационарный, случайный процесс в форме так называемых «сезонных» подпроцессов [1,2]. Изучение подобных процессов производится на основе применения к ним *законов распределения крайних членов выборки или законов экстремальных распределений.*

Так, например, при расчете гидротехнических сооружений принимают во внимание не текущие уровни расхода воды в реках, а максимальные расходы в году, которые варьируют из года в год. При проектировании некоторых сооружений приходится учитывать максимальные значения силы ветра и его скорости, максимальные (или минимальные) значения температуры, электрических напряжений, механических нагрузок и т.д. Применение теории экстремальных распределений ко многим

Дедков Виталий Кирилович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник ВЦ им. А.А.Дородницына РАН.

природным и техническим явлениям широко освещено в литературе [2].

Найдено, например, что порывы ветра, встречаемые самолетом в полете, подчиняются закону экстремальных распределений. Этому же закону подчиняются распределения наибольших значений «ударных ускорений» при вибрациях и вариации температур. Показано, в частности, что использование других законов распределения, например, нормального для описания наибольших величин вибраций при больших последовательностях (совокупностях) воздействий приводит к опасной недооценке нагрузок.

Таким образом, функции, описывающие распределения вероятностей наибольших (наименьших) значений «сезонных» процессов, подчиняются закону экстремальных распределений. Этот вывод в значительной мере является результатом многочисленных экспериментальных наблюдений, нежели результатом теории. Действительно, законы экстремальных распределений называют также «распределениями для крайних членов последовательности независимых величин».

На основании изложенного в качестве «теоретического» распределения «амплитуд» случайных сигналов, образующих последовательности независимых нагружений, будем принимать *закон экстремальных распределений*.

В зависимости от особенностей физического процесса, образующего вариационный ряд независимых максимальных (минимальных) значений $\hat{u}_i$ исследуемой случайной величины, различают три типа экстремальных распределений [2].

Так, закон экстремальных распределений «третьего типа» характерен для случаев, когда случайные величины рассматриваемой последовательности имеют границы, т.е. каждая величина может принимать значения, ограниченные некоторой областью (a,b) $\hat{u} \in (a,b)$.

Как правило, наибольшие (наименьшие) значения нагрузки могут отклоняться от своего наиболее вероятного значения на сколь угодно большую величину, хотя вероятность подобного отклонения может быть сколь угодно малой.

Распределению наибольших значений, образованных подобными процессами, соответствует закону экстремального распределения «первого типа», функция распределения которого имеет вид [2]

$$F_{\hat{u}}(u) = \exp\{-\exp[-\beta(u-\mu)]\}, \qquad (6)$$

где β и μ – параметры распределения.

Подставив выражение (6) в формулу (4), определяющую общую закономерность распределения случайного n-мерного вектора $\hat{U}_{<n>}$, получим

$$F_{\hat{U}_{<n>}}(U_{<n>}) = \exp\{-n\exp[-\beta(u-\mu)]\} \qquad (7)$$

или после некоторых преобразований

$$F_{\hat{u}_{(n)}}(u) = \exp\{-\exp[-\beta(u-\mu_{(n)})]\}, \qquad (8)$$

где $$\mu_{(n)} = \mu + \frac{\ln n}{\beta}.$$

Из выражений (7) и (6) следует, что функция распределения экстремальных значений обладает свойством «самовоспроизведения» при преобразованиях типа «свертки», которое заключается в том, что параметр β не зависит от объема n выборки экстремумов, каждый из которых распределен по закону (6). Причем параметр «свертки» $\mu_{(n)}$ отличается от соответствующего параметра μ (соответствующего одному нагружению) сдвигом на величину, равную $\ln n/\beta$. Форма распределения при этом остается неизменной.

Рассмотренная модель преобразования закона экстремальных распределений позволяет выразить непрерывный случайный процесс нагрузки, действующей на объект, последовательностью функций распределения экстремальных (наибольших) независимых случайных величин.

Литература

1. Дедков В.К. Модели прогнозирования индивидуальных показателей надежности. М.: ВЦ им. Дородницына РАН. 2003. –188 с.

2. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир. 1967.

Материал поступил в редакцию 03.28. 2008г.