УДК 539.55

© Кузнецов В.И.
Kuznetsov V. I.

КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННЫЕ ПРОЕКЦИИ ТРАЕКТОРИЙ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

COORDINATE-TIME PROJECTIONS OF TRAJECTORIES OF THE CONDITION OF DYNAMIC SYSTEMS

Аннотация. *Рассмотрены теоретические положения и выводы по приведению реализаций нестационарных случайных процессов, полученных при решении задач оценивания состояний и идентификации параметров динамических систем, к условиям статистической однородности.*

Annotation. *Theoretical positions and conclusions on reduction of realizations of the non-stationary casual processes received at the decision of problems(tasks) оценивания of conditions and identification of parameters of dynamic systems, conditions of statistical uniformity are considered.*

Ключевые слова. *Модель, нестационарность, однородность, параметр, процесс, случайный, состояние.*

Key words. *Model, non-stationary, uniformity, parameter, process, casual, condition.*

Решение задач оценивания состояний и параметрической идентификации динамических систем по результатам измерений позволяет восстановить их траектории в пространстве состояний Ω^n конечной размерности n, определяемой размерностью вектора состояний и параметров используемой математической модели. Рассмотренные ранее методические положения [1] по обеспечению адекватности математических моделей реальным динамическим системам и инвариантности к изменениям условий испытаний приводят к необходимости представления математических моделей в классе нелинейных динамических стохастических с нестационарными параметрами.

Нестационарность параметров используемых моделей состояния требует более детального изучения, поскольку характер изменения оценок случайных реализаций оцениваемых параметров зависит от комплекса факторов, проявившихся в эксперименте (вариации начальных условий, воздействия внутренних и внешних возмущений), что может приводить к нарушениям статистической однородности результирующих оценок. В связи с этим возникает задача приведения оценок параметров состояния и оценок нестационарных параметров используемых математических моделей к условиям статистической однородности. Следует обратить внимание на то, что для приведения анализируемой случайной реализации к тем или иным условиям, которые характеризуют условия проведения эксперимента, необходимым является наличие случайной реализации нестационарного параметра, полученной в этих условиях и рассматриваемой в качестве опорной.

Здесь необходимо выделить, по крайней мере, два важных момента:

- во-первых, требуется понять, что именно подлежит приведению из одних условий эксперимента к другим, т.е. какая именно координата или какие координаты вектора состояния должны претерпевать те или иные преобразования и какие преобразования с этой целью необходимо осуществлять;
- во-вторых, вопросы анализа самих условий экспериментов, выделения и оценивания факторов таких условий выносятся за рамки исследования ввиду нетривиальности самой постановки такой задачи, а также в связи с тем, что в дальнейшем предполагается статистическое осреднение преобразованных случайных реализаций нестационарных параметров, а не оценок тех или

Кузнецов Валерий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник отдела ОАО «Военно-инженерной корпорации», тел. 543-36-76.

Kuznetsov Valeriy Ivanovich – the candidate of technical sciences, the senior research scientist, the chief of division of OJSC "Military-engineering corporation", tel. 543-36-76.

иных факторов, характеризующих условия протекания экспериментов.

В отношении первого из обозначенных моментов следует указать, что нестационарный характер анализируемого параметра вызван воздействием на него формирующего шума, для которого медленно меняющаяся марковская составляющая позволяет компенсировать допускаемые погрешности формализации используемой математической модели [1]. Также следует отметить, что в результате решения задачи параметрической идентификации предполагается, что на каждый момент временного ряда получены оценки значений параметра, его производной и соответствующие ковариационные матрицы погрешностей оценок. Из этого следует, что при заданных начальных значениях параметра знание скорости его изменения в виде оценки производной по времени на всём временном отрезке позволяет восстановить и всю реализацию анализируемого параметра.

В дальнейшем предполагается, что оценка случайной траектории параметра, полученная в одних условиях эксперимента, проецируется на оценку случайной траектории этого же параметра, но для других условий эксперимента, из которых можно выделить следующие:

• различные объёмы измерительных данных, получаемых в экспериментах и используемых для получения оценок параметров;

• различные погрешности в регистрируемых данных в различных экспериментах;

• различные начальные состояния динамических систем, над которыми проводились эксперименты;

• различные начальные значения одних и тех же параметров в различных экспериментах;

• различные интегральные (терминальные) значения одних и тех же параметров в различных экспериментах;

• различия воздействий внешних факторов на состояния и параметры системы в различных экспериментах.

В этом случае можно говорить об оценке случайной реализации параметра, когда:

• начальное состояние системы и её параметров соответствует опорной траектории;

• отклонения терминальных значений параметра и воздействующих факторов соответствуют проецируемой траектории,

Приведение оценок параметров, в общем случае нестационарных, к условиям статистической однородности целесообразно рассматривать с позиции интегральных показателей, характеризующих накопленный или выработанный ресурс анализируемого параметра. В этом случае изменение параметра, его интегральных и дифференциальных показателей может рассматриваться в качестве случайного векторного процесса, описываемого в виде дифференциального стохастического уравнения, которое для дискретной временной шкалы может рассматриваться в виде дискретного случайного процесса.

Выработанный или накопленный ресурс можно характеризовать интегральным показателем случайной реализации нестационарного параметра на интервале функционирования динамической системы, т.е.

$$Ip(t) = \int_0^t p(t)dt. \qquad (1)$$

Для сопоставления двух случайных реализаций нестационарного параметра, полученных в различных экспериментах, можно осуществить переход в иную временную шкалу проецируемой реализации, для которой будет справедливо

$$Ip_1(t) = Ip_2(t^*), \qquad (2)$$

где $p_1(t), p_2(t^*)$ – случайные реализации нестационарного параметра в шкале времени t и t^* соответственно.

Выполнение равенства (2) требует вполне определённого «сжатия/растяжения» исходной временной шкалы, в которой наблюдается проецируемая реализация параметра в иную, для которой на каждом элементарном временном отрезке должно выполняться условие

$$Ip_1(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} p_1(t)dt = Ip_2(t^*_{k-1}) + \int_{t^*_{k-1}}^{t^*_k} p_2(t^*)dt^*$$

или с учётом (2)

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_1(t)dt = \int_{t^*_{k-1}}^{t^*_k} p_2(t^*)dt^*, \qquad (3)$$

где символом * помечена преобразованная временная шкала.

Необходимо обеспечивать такое «сжатие/растяжение» временной шкалы проецируемой траектории, при котором условие (3) выполняется на каждом элементарном временном отрезке. Для обеспечения этого необходимо более детально рассмотреть модели состояния, описывающие опорную и проецируемую траектории некоторого нестационарного параметра.

Так, для опорной траектории модель состояния в дискретной форме имеет вид

$$\mathbf{z}_1(t_k) = \mathbf{F}_1(t_k / t_{k-1}) \cdot \mathbf{z}_1(t_{k-1}) + \mathbf{B}_1(t_k / t_{k-1}) \cdot u_1(t_{k-1}),$$

где $\mathbf{z}_1^T(\cdot) = \left[Ip_1(\cdot),\ p_1(\cdot),\ \dot{p}_1(\cdot) \right]^T$ – вектор состояния;

$u_1(\cdot)$ – медленно меняющаяся марковская составляющая формирующего шума;

$\mathbf{F}_1(\cdot)$ и $\mathbf{B}_1(\cdot)$ – переходные матрицы состояния и возмущений, имеющие следующие сопровождающие формы

$$\mathbf{F}_1(t_k/t_{k-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{1}{2}\cdot\tau^2 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_1(t_k/t_{k-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\tau^2 \\ \tau \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Модель состояния проецируемой траектории имеет несколько иной вид

$$\mathbf{z}_2(t_k^*) = \mathbf{F}_2(t_k^*/t_{k-1}^*)\cdot\mathbf{z}_2(t_{k-1}^*) + \\ +\mathbf{B}_2(t_k^*/t_{k-1}^*)\cdot u_2(t_{k-1}^*) + \mathbf{G}_2(t_k^*/t_{k-1}^*)\cdot w_2(t_{k-1}^*), \quad (4)$$

где $\mathbf{z}_2^T(\cdot) = \left[Ip_1(\cdot),\, p_1(\cdot),\, \dot{p}_1(\cdot),\, \lambda(\cdot)\right]^T$ – расширенный вектор состояния, включающий в свой состав масштабный коэффициент $\lambda(\cdot)$, характеризующий «сжатие/растяжение» временной шкалы проецируемой траектории на каждый момент времени с номером, совпадающим с номером временного момента опорной траектории;

$u_2(\cdot)$ – медленно меняющаяся марковская составляющая формирующего шума;

$\mathbf{F}_2(\cdot)$, $\mathbf{B}_2(\cdot)$ и $\mathbf{G}_2(\cdot)$ – переходные матрицы состояния и возмущений. Здесь для коэффициента $\lambda(\cdot)$ должно выполняться условие

$$\lambda(t_{k-1})\cdot(t_k - t_{k-1}) = t_k^* - t_{k-1}^*$$

или

$$\lambda(t_{k-1})\cdot\tau = \tau^*.$$

С учётом такого коэффициента, подлежащего восстановлению, дифференциальные уравнения проецируемой траектории можно записать в виде

$$\mathbf{z}_2(t^*) = \begin{pmatrix} z_{2,1} = \int p(t^*)dt^* & \dot{z}_{2,1} = \lambda(t)\cdot p(t^*) \\ z_{2,2} = p(t^*) & \dot{z}_{2,2} = \lambda(t)\cdot\dot{p}(t^*) \\ z_{2,3} = \dot{p}(t^*) & \dot{z}_{2,3} = 0 \\ z_{2,4} = \lambda(t) & \dot{z}_{2,4} = 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Исходя из представленного вектора состояния переходные матрицы $\mathbf{F}_2(\cdot)$, $\mathbf{B}_2(\cdot)$ и $\mathbf{G}_2(\cdot)$ принимают следующие сопровождающие формы

$$\mathbf{F}_2(t_k^*/t_{k-1}^*) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda(t_{k-1}^*)\cdot\tau & \frac{1}{2}\cdot\lambda^2(t_{k-1}^*)\cdot\tau^2 & p(t_{k-1}^*)\cdot\tau \\ 0 & 1 & \lambda(t_{k-1}^*)\cdot\tau & \dot{p}(t_{k-1}^*)\cdot\tau \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2(t_k^*/t_{k-1}^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\lambda^2(t_{k-1}^*)\cdot\tau^2 \\ \lambda(t_{k-1}^*)\cdot\tau \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_2(t_k^*/t_{k-1}^*) = \begin{pmatrix} p(t_{k-1}^*)\cdot\tau \\ \dot{p}(t_{k-1}^*)\cdot\tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В общем случае наличие случайных погрешностей в оценках как опорной, так и проецируемой траекторий приводит к необходимости определения текущей оценки коэффициента исходя из анализа условной плотности распределения вероятностей

$$\varphi\left(\mathbf{z}_2(t_{k/k-1})/\mathbf{z}_1(t_k^*)\right) = \\ = C\cdot\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot\left\|h_{z1}\cdot\mathbf{z}_1(t_k) - h_{z2}\cdot\mathbf{z}_2(t_{k/k-1}^*)\right\|^2\cdot\sigma_v^{-2}(t_k) - \right. \\ \left. -\tfrac{1}{2}\cdot\left\|\hat{\mathbf{z}}_2(t_k^*) - \mathbf{z}_2(t_{k/k-1}^*)\right\|^2\cdot\Psi_{z,2}^{-1}(t_{k/k-1}^*)\right\}.$$

Из условия минимума функционала

$$J = -\tfrac{1}{2}\cdot\left\|h_{z1}\cdot\mathbf{z}_1(t_k) - h_{z2}\cdot\mathbf{z}_2(t_{k/k-1}^*)\right\|^2\cdot\sigma_v^{-2}(t_k) - \\ -\tfrac{1}{2}\cdot\left\|\hat{\mathbf{z}}_2(t_k^*) - \mathbf{z}_2(t_{k/k-1}^*)\right\|^2\cdot\Psi_{z,2}^{-1}(t_{k/k-1}^*)$$

оценка проекции вектора состояния $\mathbf{z}_2(t_k^*)$ на ось времени вектора состояния $\mathbf{z}_1(t_k)$ определяется из выражения

$$\mathbf{z}_2(t_k^*) = \mathbf{z}_2(t_{k/k-1}^*) + \\ +\Psi_{z2}(t_{k/k-1}^*)\cdot h_{z2}^T\cdot\left[h_{z2}\cdot\Psi_{z2}(t_{k/k-1}^*)\cdot h_{z2}^T + \sigma_v(t_k)\right]\times \\ \times\left[h_{z1}\cdot\mathbf{z}_1(t_k) - h_{z2}\cdot\mathbf{z}_2(t_{k/k-1}^*)\right]. \quad (6)$$

Определение текущей оценки коэффициента $\lambda(\cdot)$, входящего в состав расширенного вектора состояния $\mathbf{z}_2(\cdot)$, обеспечивается на основе ранее рассмотренных [2] алгоритмов адаптивной фильтрации, когда в качестве априорно неизвестного параметра выступает формирующий шум в уравнении (4).

В дальнейшем найденная оценка коэффициента $\lambda(\cdot)$ позволяет осуществить проецирование координат вектора состояния $\mathbf{z}_2(t_k^*)$ на момент времени t_k опорной траектории в соответствии с (5), т.е.

$$p^*(t_k) = \lambda(t_k)\cdot p(t_k^*);$$
$$\dot{p}^*(t_k) = \lambda^2(t_k)\cdot\dot{p}(t_k^*);$$
$$u^*(t_k) = \lambda^2(t_k)\cdot u(t_k^*).$$

В качестве иллюстрации рассмотренных теоретических положений ниже представлены:

- графики случайных реализаций некоторого нестационарного параметра (рис. 1);
- графики интегральных показателей случайных реализаций параметра в двух независимых экспериментах (рис.2);
- графики случайных реализаций параметра, полученных в двух независимых экспериментах, и его проекции из второго опыта на реализацию из первого опыта, а также усреднённой оценки случайных реализаций параметра, приведенной к реализации из первого опыта (рис. 3).

Последующее статистическое осреднение случай-

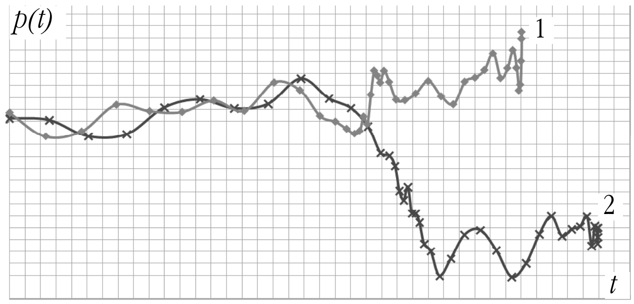

Рис.1. Графики случайных реализаций параметра в двух независимых экспериментах:
1– первый эксперимент; 2– второй эксперимент

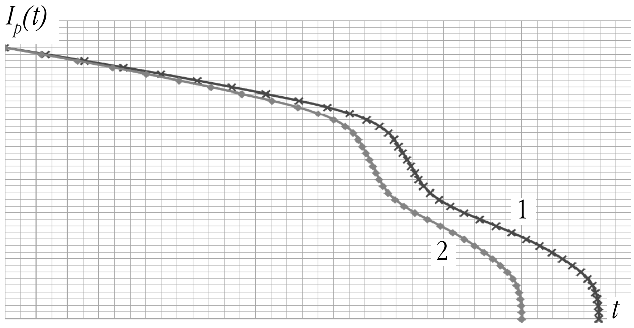

Рис.2. Графики интегральных показателей случайных реализаций параметра в двух независимых экспериментах: 1– первый эксперимент;
2– второй эксперимент

ных реализаций нестационарного параметра позволяет перейти к определению параметров случайного процес-

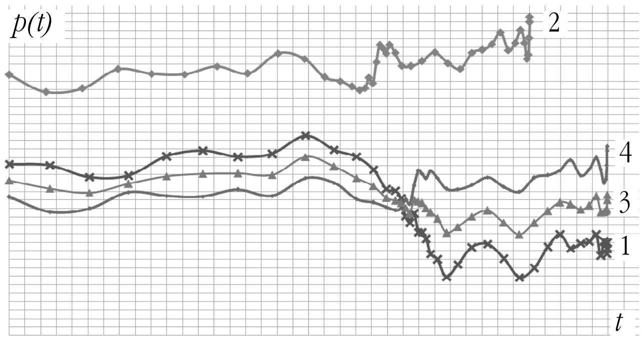

Рис. 3. Графики случайных реализаций параметра в двух независимых экспериментах: 1– первый эксперимент; 2– второй эксперимент; 3 – усредненная реализация; 4 – проекция реализации первого эксперимента на реализацию второго

са в пространстве распределений случайных терминальных значений параметра и проявления случайных возмущений. Это является наиболее важным, поскольку позволяет изучать опорную траекторию применительно к условиям, реализовавшимся в других экспериментах, что в совокупности со статистическим распределением начальных значений параметров обеспечивает переход к изучению процесса развития параметра во всей области выборочного пространства технологических и внешних возмущений.

Литература

1. Кузнецов В.И. Применимость конечномерных моделей состояния и измерений в задачах параметрической идентификации динамических систем. Двойные технологии, 2008 – № 2.

2. Кузнецов В.И. Адаптивная фильтрация в задачах параметрической идентификации нестационарных динамических систем. Двойные технологии, 2008 – № 1.

Материал поступил в редакцию 03. 02. 2009г.