УДК 681.5.015.4

© Кузнецов В.И.
Kuznetsov V.I.

НАБЛЮДАЕМОСТЬ И ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

OBSERVABILITY AND IDENTIFIABILITY OF NONLINEAR NON-STATIONARY DYNAMIC STOCHASTIC SYSTEMS

Аннотация. *В статье рассмотрены вопросы анализа выполнимости условий наблюдаемости и идентифицируемости моделей состояния нелинейных динамических систем с нестационарными параметрами. Представлены перспективные направления исследований, основанные на полученных результатах.*

Annotation. *In article questions of the analysis of feasibility of conditions of observability and identifiability of models of a condition of nonlinear dynamic systems with non-stationary parameters are considered. The perspective directions of the researches based on received results are submitted.*

Ключевые слова. *Адаптивный, идентифицируемость, матрица, наблюдаемость, нестационарный, параметр, процесс, случайный, состояние, фильтрация.*

Key words. *Adaptive, identifiability, matrix, observability, non-stationary, parameter, process, casual, condition, filtration..*

Практическое применение адаптивных алгоритмов нелинейной фильтрации [1] при решении задач параметрической идентификации и оценивании состояний нелинейных динамических стохастических систем ограничивается условиями принципиальной возможности решения подобных задач. К таким условиям следует отнести:

- наличие математической модели анализируемой динамической системы;
- наличие и доступность необходимого объёма измерительных данных на интересующем временном отрезке;
- выполнение условий наблюдаемости и идентифицируемости используемой математической модели по наблюдаемым параметрам.

Математические описания динамических объектов при случайных воздействиях практически мало отличаются от соответствующего описания объектов в детерминированной постановке. Однако при этом подразумеваются существенные отличия, заключающиеся в том, что как вектор состояния, так и вектор выходных переменных системы представляют собой случайные процессы, порождаемые либо случайными возмущениями на входе объекта, либо случайными начальными условиями, либо помехами в результатах измерений.

Вопросы, затрагивающие формализованное описание реальных динамических систем и представление их в виде конечномерных моделей состояния, рассмотрены в ранее опубликованной статье [2]. Там же обоснованы причины, приводящие к нестационарности параметров моделей состояния. В отношении принятой терминологии, как и ранее [1, 2], вводится различие между состояниями и параметрами математических моделей, отождествляемых с анализируемыми динамическими системами.

Под параметрами математической модели динамической системы понимаются независимые (свободные) компоненты вектора состояния $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, т.е. те компоненты, для которых не заданы или отсутствуют формальные связи с другими компонентами вектора состояния.

Под параметрами состояния математической модели динамической системы, которые иногда называют координатами [4], понимаются зависимые компоненты вектора состояния $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, т.е. те компоненты, для которых заданы формальные связи с теми или иными параметрами и компонентами вектора состояния.

В качестве вектора состояния $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ рассматривается расширенный вектор состояния $\mathbf{x} = \left\{\mathbf{x}^{*T}, \mathbf{a}^T\right\}^T$, под которым понимается совокупность как зависимых, так и независимых компонент вектора состояний принятой ма-

Кузнецов Валерий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник отдела ОАО «Военно-инженерная корпорация», тел. (495)543-36-76.
Kuznetsov Valery Ivanovich – Cand.Tech.Sci., the senior scientific employee, the chief of a department of Open Society « Military-engineering corporation », tel. (495)543-36-76.

тематической модели реальной динамической системы.

Исходя из представленных пояснений, постановка задачи оценивания состояний и идентификации параметров рассматривается в терминах задачи параметрической идентификации или идентификации в узком смысле [3], которая представляет собой возможность определения параметров математической модели системы или процесса по результатам измерения определённых выходных величин в течение некоторого интервала времени [4]. В этом смысле абстрактно-теоретическое рассмотрение понятия параметрической идентификации является частным случаем наблюдаемости, под которой понимается [4] возможность косвенного определения величин на основе измерения некоторых других величин и использования априорной информации.

Освещение вопросов исследования наблюдаемости и идентифицируемости достаточно широко представлено в технической литературе [2, 4-10]. Однако необходимо отметить, что исследование свойства идентифицируемости нелинейных систем сводится либо к системам со стационарными параметрами, либо замене нестационарных параметров их кусочно-постоянными представлениями на временных отрезках. Последнее допустимо лишь в случаях, когда параметры могут быть отнесены к медленно меняющимся. В реальной практике такое допущение не всегда выполнимо, что особенно проявляется при возникновении нештатных режимов функционирования, либо возникновении аварийных ситуаций. В связи с этим исследование наблюдаемости и идентифицируемости моделей состояния нелинейных динамических стохастических систем с нестационарными параметрами представляет актуальную задачу.

Математическое представление реальных систем в классе нелинейных нестационарных стохастических, как это было показано в статье [2], позволяет достигнуть адекватности модели реальной системы по наблюдаемым параметрам и обеспечить инвариантность математической модели к изменениям условий функционирования динамической системы. Для рассматриваемых математических моделей полный вектор состояния содержит, как это было отмечены выше, зависимые и независимые компоненты, по этой причине в настоящей статье проведено изучение совместной наблюдаемости и идентифицируемости нелинейных нестационарных моделей состояния, заданных в виде системы стохастических дифференциальных уравнений в форме Ланжевена [4]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t), t\right] + \mathbf{g}\left[\mathbf{x}(t), t\right] \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ - вектор состояния; $\mathbf{f}[\cdot]$, $\mathbf{g}[\cdot]$ – векторные функции; $\boldsymbol{\omega}(t)$ - векторный формирующий шум; t – независимая переменная времени.

Связь между параметрами и вектором состояния задаётся отношением

$$\mathbf{a} = \mathbf{h}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{a}$ – вектор параметров математической модели, для которых $\mathbf{a} \subset \mathbf{x}$; $\mathbf{h}_{\mathbf{a}}$ – матрица выбора, для которой индекс $\mathbf{a}$ характеризует тот факт, что формирующий шум воздействует не на весь вектор состояния, а только на параметры модели.

Дискретная форма представления модели состояния (1) имеет вид

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1) \cdot \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}(k/k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1), \qquad (3)$$

где $\mathbf{F}(\cdot)$, $\mathbf{G}(\cdot)$ – переходные матрицы состояний и возмущений соответственно, для которых согласно (2) можно записать

$$\mathbf{G}(k/k-1) = \mathbf{F}(k/k-1) \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{a}}^{T}. \qquad (4)$$

Уравнения наблюдения выходных параметров могут быть заданы в виде линейной модели, практическая реализуемость которой обеспечивается при включении нелинейных моделей измерения в вектор состояния анализируемой динамической системы

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\eta}(k), \qquad (5)$$

где $\mathbf{y}(\cdot)$ – вектор измерений; $\mathbf{h}(\cdot)$ – матрица наблюдений; $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ – векторная случайная помеха в измерениях.

Рассматриваемая нестационарность параметров модели состояния (3) предъявляет дополнительное требование, смысл которого сводится к необходимости выполнения условия совместной наблюдаемости и идентифицируемости на каждый момент поступления результатов измерений. Это требование обусловлено тем, что априорно неизвестны частотные свойства параметров модели состояния, поэтому не обеспечиваются возможности обоснованного выбора временных интервалов статистического оценивания состояний и идентификации параметров модели, а также кусочно-постоянного представления параметров на временных отрезках.

Совместная наблюдаемость и идентифицируемость рассматриваются относительно вектора параметров ограниченной размерности, а именно относительно тех параметров, которые используются в качестве независимых переменных. В отношении остальных компонент вектора состояния (координат) следует отметить, что они являются функционально зависимыми и их определение не вызывает затруднений в случаях, когда удаётся найти оценки независимых параметров модели состояния (параметров системы). В дальнейшем предполагается, что анализ нелинейных динамических систем осуществляется с использованием конечномерных моделей состояния с нестационарными параметрами и предполагает применение адаптивных алгоритмов нелинейной фильтрации, возможная реализация которых рассмотрена в работе [1]. Для таких алгоритмов является характерным наличие двух операций обращения матриц при следующих операциях:

• определении матричного коэффициента усиления нелинейного фильтра

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{V}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\times$$
$$\times\left[\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{V}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)+\mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(k)\right]^{-1}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{V}_{\mathbf{x}}(\cdot)$ – ковариационная матрица погрешностей априорной оценки вектора состояния; $\mathbf{h}(\cdot)$ – матрица наблюдений; $\mathbf{V}_{\eta}(\cdot)$– ковариационная матрица погрешностей измерений;

• определении апостериорной оценки ковариационной матрицы действующих возмущений в уравнениях состояния

$$\mathbf{V}_{\mathbf{w}}(k-1) = \left[\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right]^{-1}\times$$
$$\times\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\boldsymbol{\xi}(k), \qquad (7)$$

где $\mathbf{V}_{\mathbf{w}}(\cdot)$ – ковариационная матрица действующих возмущений в уравнениях состояния; $\mathbf{G}(\cdot)$ – переходная матрица возмущений; $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ – медленно меняющаяся марковская составляющая, характеризующая погрешности формализации используемой математической модели динамической системы.

В первом случае наличие диагонально определённой матрицы $\mathbf{V}_{\eta}(\cdot)$ позволяет рассматривать её в качестве регуляризирующего члена [12]. Однако для соблюдения условия диагональной определённости этой матрицы необходимо выполнить условия линейного представления моделей наблюдения, что является достижимым при переходе к линейным моделям наблюдения, т.е. соответствующему формализованному описанию нелинейных моделей наблюдения в терминах моделей состояния наблюдаемых динамических систем.

Здесь могут возникнуть возражения относительно того, что значения диагональных элементов матрицы $\mathbf{V}_{\eta}(\cdot)$ могут быть существенно (на несколько порядков) меньше абсолютных значений элементов матрицы $\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{V}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)$, что не позволит снять проблему плохой обусловленности результирующей суммы матриц в (6) даже с учётом рассматриваемой естественной регуляризации. Однако в задачах оценивания состояний и параметрической идентификации вопросы обращения плохо обусловленных матриц не являются самоцелью, но выступают в качестве факторов, влияющих как на качество получаемых оценок, так и принципиальную возможность получения интересующих оценок. Поэтому существенное превышение абсолютных значений элементов ковариационной матрицы погрешностей оценок в сравнении со значениями диагональных элементов ковариационной матрицы случайных погрешностей в измерениях является свидетельством неудачно спланированного эксперимента и требует пересмотра в первую очередь используемых математических моделей, принятия следующих мер:

• уменьшения размерности вектора параметров модели состояния;

• привлечения дополнительных измерительных данных;

• использования доступной априорной информации, что имеет целью повышение качества получаемых оценок (и уменьшение, в том числе абсолютных значений элементов ковариационной матрицы погрешностей оценок).

В общем случае связь измеряемых параметров и параметров состояния системы с учётом (3) и (5) определяется уравнением

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(k)\times$$
$$\times\left[\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1)+\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1)\right]. \qquad (8)$$

Равенство не будет нарушено, если его записать в виде

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\left(\mathbf{I}-\mathbf{h}_{\mathbf{a}}^T\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{a}}\right)\times$$
$$\times\mathbf{x}(k-1)+\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{a}}^T\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{x}(k-1)+$$
$$+\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1). \qquad (9)$$

Далее, принимая во внимание, что

$$\mathbf{G}(k/k-1) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{a}}^T,$$

равенство (9) можно записать следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{y}(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{F}(k/k-1)\times$$
$$\times\left(\mathbf{I}-\mathbf{h}_{\mathbf{a}}^T\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{a}}\right)\cdot\mathbf{x}(k-1) =$$
$$= \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{x}(k-1)+$$
$$+\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1) =$$
$$= \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{a}(k-1)+$$
$$+\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1), \qquad (10)$$

где $\mathbf{a}(k-1) = \mathbf{h}_{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{x}(k-1)$.

Выражение (10) в свою очередь можно привести к виду

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\tilde{\mathbf{x}}(k-1), \qquad (11)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(k-1) = \mathbf{a}(k-1)+\mathbf{w}(k-1) =$

$$= \mathbf{h}_{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{x}(k-1)+\mathbf{w}(k-1).$$

Разрешение равенства (11) относительно вектора приводит к следующему соотношению:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k-1) =$$
$$= \left[\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{y}}(k). \qquad (12)$$

Анализ полученного выражения (12) позволяет сформулировать условие совместной наблюдаемости и идентифицируемости нелинейных нестационарных динамических стохастических систем. Это условие сводится к анализу существования обратной матрицы.

$$\left[\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right]^{-1}. \quad (13)$$

Для проверки выполнения условия (13) достаточно установить, что

$$det\left\{\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right\}\neq 0.$$

Выполнение полученного условия свидетельствует как об однозначной взаимной различимости влияния вектора $\tilde{\mathbf{x}}(k-1)$ на наблюдаемые параметры (так называемой функции влияния [11]), так и самом факте наличия такого влияния. Причём условие взаимной различимости функций влияния связано с отсутствием в матрице $\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)$ нулевых или линейно зависимых строк или столбцов. Таким образом, динамическая нестационарная стохастическая система является совместно наблюдаемой и идентифицируемой в том случае, когда выполняется условие

$$det\left\{\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right\}\neq 0. \quad (14)$$

Особо стоит отметить тот факт, что правило (14) определено для произвольной пары подряд идущих временных отсчётов с номерами (k–1), k. Поэтому полученные условия наблюдаемости и идентифицируемости рассматриваются в качестве локальных, выполнение которых на всём временном отрезке анализа динамической системы позволяет получить условия её глобальной наблюдаемости и идентифицируемости. Другим важным моментом является вычислительная простота полученных правил.

В качестве иллюстрации полученных выводов можно рассмотреть следующий пример.

Пусть для некоторой динамической системы заданы:

• переходная матрица состояний

$$\mathbf{F}(k/k-1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & f_{15}(k-1) & f_{16}(k-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & f_{25}(k-1) & f_{26}(k-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & f_{35}(k-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & f_{46}(k-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

• матрица наблюдений

$$\mathbf{h}(k)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

• матрица выбора независимых компонент вектора состояния

$$\mathbf{h_a}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для заданных условий следует, что

$$\mathbf{G}(k/k-1)=\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}_\mathbf{a}^T=$$

$$=\begin{pmatrix} f_{15}(k-1) & f_{25}(k-1) & f_{35}(k-1) & 0 & 1 & 0 \\ f_{16}(k-1) & f_{26}(k-1) & 0 & f_{46}(k-1) & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

и

$$\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)=$$

$$=\begin{pmatrix} f_{15}^2(k-1)+1 & f_{15}(k-1)\cdot f_{16}(k-1) \\ f_{16}(k-1)\cdot f_{15}(k-1) & f_{16}^2(k-1) \end{pmatrix},$$

откуда

$$det\left\{\mathbf{G}^T(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^T(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right\}=$$

$$=f_{16}^2(k-1).$$

При $f_{16}^2(k-1)\neq 0,\ k\subset\left[1,N-1\right]$ условия совместной наблюдаемости и идентифицируемости динамической системы выполнены локально на временном отрезке $\left[t_{k-1},t_k\right]$, а при $f_{16}^2(k-1)\neq 0,\ k\in\left[1,N-1\right]$ условия совместной наблюдаемости и идентифицируемости динамической системы выполнены на всём временном интервале анализа динамической системы.

Дальнейшие исследования, основанные на полученных результатах, могут затрагивать вопросы:

• обоснования состава измеряемых параметров и формирования программ измерений;

• анализа информационной значимости измеряемых параметров в задачах параметрической идентификации динамических систем.

Литература

1. *Кузнецов В.И. Адаптивная фильтрация в задачах параметрической идентификации нестационарных динамических систем. Двойные технологии, 2008 – № 1.*
2. *Кузнецов В.И. Применимость конечномерных моделей состояния и измерений в задачах параметрической идентификации динамических систем. Двойные технологии, 2008 - № 2.*
3. *Мальцев В.А., Мухин И.И. Основы теории оптимизации динамических систем: Уч. Пособие. – М.: МО СССР, 1976. – 326 с.*
4. *Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1987. – 711 с.*
5. *Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.*
6. *Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. – 190 с.*
7. *Лившиц К.И. Идентификация: Уч. пособие. – Томск: Изд. ТГУ, 1981. – 132 с.*
8. *Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя.–М.: Наука, 1991. – 432 с.*
9. *Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – С-Пб.: Изд-во Профессия, 2004.*
10. *Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. – М.: Наука, 1987. – 712 с.*
11. *Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. - М.: Мир, 1989. – 512 с.*
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.-120 с.*

Материал поступил в редакцию 30. 04. 2009 г.