УДК 629.7.017.2

© Алексеенко А.В., Бузунов В.С.
Alekseenko A. V., Buzunov V. S.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ

OPTIMIZATION OF VALUES CASUAL PARAMETERS OF STOCHASTIC CONTROL SYSTEMS ON THE BASIS OF USE A GRADIENT FUNCTIONAL QUALITIES

Аннотация. *Для решения терминальной задачи вывода динамического объекта в заданную область в условиях стохастической модели движения предлагается использовать алгоритм оптимизации значений случайных параметров стохастических систем управления на основе использования статистического осреднения градиента функционала качества, в состав целевой функции которого включена вероятность выполнения задачи. Применение такого подхода сэкономит машинное время вычислителя при решении задачи оптимального управления объектом на этапе вывода его в заданную область терминальной точки на поверхности Земли, так как статистическое определение градиента позволит параллельно с моделированием движения системы вычислять и значение градиента.*

Annotation. *For the decision terminal problem by conclusion of dynamic object in the set area, in the conditions of stochastic model, it is offered to use algorithm of optimization of values casual parameters of stochastic control systems on the basis of use the statistical averaging of a gradient functional qualities, which includes the probability of performance problem. Application of such approach will save machine time of the calculator at the decision problem of optimum controlling object at a stage of its conclusion in the set area of a terminal point on a surface of the Earth as statistical definition of a gradient will allow to calculate the value of a gradient in parallel with modeling of movement.*

Ключевые слова. *Система управления летательного аппарата, идентификация параметров, конечно-разностная аппроксимация, градиент.*

Key words. *Management system of the aircraft, the identification of parameters, finite-difference approximation of the gradient.*

При решении терминальных задач оптимального управления стохастическими системами традиционно используют прогнозирующую модель для расчета возможных отклонений в терминальный момент времени и выработки необходимых коррекций для их компенсации. При этом считается, что модель движения объекта управления известна с точностью до вектора неизвестных коэффициентов, характеризующего неопределенность относительно параметров среды движения, реальных значений параметров конкретного образца объекта, внешних возмущений и т.д. Один из общепринятых подходов при поиске оптимальных управлений предполагает использование итерационных процедур нахождения экстремума функционала качества, основанных на конечно-разностной аппроксимации градиента. Это обусловлено сложностью, а подчас и невозможностью установления аналитической зависимости между оптимизируемыми параметрами и функционалом качества. Вместе с тем использование точного значения градиента функционала позволит улучшить характеристики работы системы управления. Кроме того, использование традиционных целевых функций, например, квадратических форм по управлению, не всегда оправдано с точки зрения конечного смысла оптимизации. Например, при решении терминальной задачи гарантированного вывода летательного аппарата в заданную область логичным представляется использование в качестве целевой функции вероятность попадания объекта управления в нее.

Алексеенко Алексей Владимирович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры систем управления ракет Ростовского ВИ РВ, тел. 8-904-341-81-77;
Бузунов Виталий Сергеевич – адъюнкт очной адъюнктуры при Ростовском ВИ РВ, тел. 8-918-505-20-50.

Alekseenko Alexey Vladimirovich - associate professor, PhD., assistant professor of management systems of missiles Rostov MS MT, tel. 8-904-341-81-77;
Bouzounov Vitaly Sergeevich - full-time adjunct adjunction at Rostov MS MT, tel. 8-918-505-20-50.

Поэтому разработка алгоритмов, свободных от недостатков конечно-разностных схем и использование вероятностных целевых функций представляется актуальной.

Постановка задачи. Пусть задана стохастическая система управления, уравнение движения которой имеет следующий вид:

$$\dot{X} = F(X, U, \Psi, \Theta, t), \quad (1)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots x_N)^T$ – вектор фазовых координат системы состояния;

$x_i(t) = x_i^0$ при $t = 0, i = \overline{1, N}$ – начальные условия; (2)

$U = (u_1, u_2, \dots u_M)^T$ – вектор управления;

$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots \psi_N)^T$ – вектор независимых случайных величин, характеризующий случайные начальные условия и внешние возмущения, распределение которого положим нормальным с известными характеристиками

$M\{\Psi\} = 0$; $M\{\Psi\Psi^T\} = R_\Psi \delta(\tau)$,

здесь R_Ψ – матрица дисперсий;

$\delta(\tau)$ – дельта-функция;

$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots \theta_N)^T$ – вектор случайных коэффициентов, характеризующий априорную неопределенность относительно реальных параметров системы управления $M\{\Theta\Theta^T\} = R_\Theta \delta(\tau)$; $\theta_i(t) = \theta_i^0$; при $t = 0$, $i = \overline{1, N}$. (3)

В силу случайного характера вектора Θ реальное движение системы может отличаться от программного, обусловленного вырабатываемым управлением. Поэтому для анализа качества работы системы управления выберем целевую функцию φ_0, характеризующую вероятность попадания вектора фазовых координат системы в заданную окрестность терминальной точки при конкретном значении вектора Θ

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(X, \Theta)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} Y(X) P(\Theta) dx, \quad (4)$$

где $Y(x)$ – характеристическая функция;

$P(\Theta)$ – плотность вероятности распределения вектора Θ.

Задачу оптимизации сформулируем следующим образом: для объекта (1),(2) требуется определить оптимальное значение вектора Θ^* случайных коэффициентов, доставляющее экстремум функционалу (4).

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) P(\Theta^*)\, dx \to \text{extrem}. \quad (5)$$

Решение задачи. Для решения задачи оптимизации используем алгоритм параметрического синтеза стохастической системы управления [3], состоящий из статистического метода определения градиента критерия оптимальности (4) и интерполяционного метода определения вероятностных характеристик вектора Θ.

Выражение для градиента функционала (4) по вектору неизвестных параметров примет вид

$$\operatorname{grad}Q = \frac{dQ}{d\Theta} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \frac{dP(\Theta)}{d\Theta} dx = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \frac{dP(\Theta)}{d\Theta} \frac{P(\Theta)}{P(\Theta)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \frac{dP(\Theta)}{P(\Theta) d\Theta} \frac{P(\Theta)}{} dx = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \frac{d\ln P(\Theta)}{d\Theta} \frac{P(\Theta)}{} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \frac{d\ln P(\Theta)}{d\Theta} \frac{P(\Theta)}{} dx = M\left\{Y(x) \frac{d\ln P(\Theta)}{d\Theta}\right\}. \quad (6)$$

Пусть закон совместного распределения вектора состояния и случайного вектора Θ можно полагать нормальным [7]

$$P(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{(\Theta - m_\Theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad (7)$$

тогда

$$\ln P(\Theta) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} - \frac{(\Theta - m_\Theta)^2}{2\sigma^2};$$

$$\frac{d\ln P(\Theta)}{d\Theta} = \frac{(\Theta - m_\Theta)}{\sigma^2}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (6), получим

$$\operatorname{grad}Q = \frac{dQ}{d\Theta} = M\left\{Y(x) \frac{d\ln P(\Theta)}{d\Theta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} M\{Y(x)(\Theta - m_\Theta)\}. \quad (9)$$

Из анализа (9) видно, что градиент функции *Q* можно находить, вычисляя корреляцию характеристической функции *Y(x)* и $(\Theta - m_\Theta)$ при моделировании движения системы при различных наборах вектора Θ.

Далее полученное значение градиента функционала *Q* используется для второй части алгоритма оптимизации – интерполяционного метода определения вероятностных характеристик вектора Θ.

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \frac{1}{n} \operatorname{grad} Q_n, \quad (10)$$

где Θ_n- значение вектора случайных коэффициентов на предыдущем шаге алгоритма. В начале работы алгоритма это значение выбирается исходя из (3).

В то же время на значения случайного вектора Θ могут быть наложены ограничения, обусловленные, например, физической реализуемостью или вызванные иными причинами. При этом значения не могут выходить за пределы некоторого диапазона ΔΘ:

В этом случае представление вектора Θ с помощью нормального закона некорректно. Используем для этого ограниченный нормальный закон [6] (рис.1):

$$P(\Theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\Phi\left(\frac{\Delta\Theta}{\sigma}\right)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Theta - m_\Theta)^2}{\sigma^2}} & \text{при } |\Theta - m_\Theta| < \Delta\Theta; \\ 0 & \text{при } |\Theta - m_\Theta| > \Delta\Theta. \end{cases} \quad (11)$$

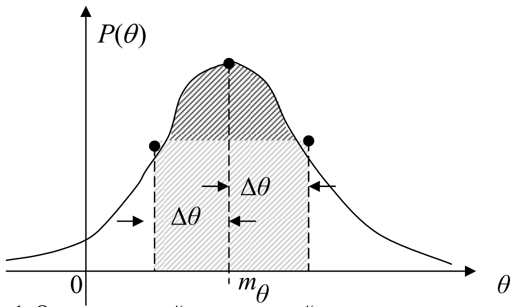

Рис. 1. Ограниченный нормальный закон распределения случайной величины

Причем по смыслу задачи

$$\Delta\Theta = \alpha m_\Theta;\ \alpha < 1;\ m_\Theta \neq 0. \tag{12}$$

Подставив (12) в (11), получим

$$P(\Theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi\left(\frac{\propto m_\Theta}{\sigma}\right)} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\Theta-m_\Theta)^2}{\sigma^2}} & \text{при } |\Theta - m_\Theta| < \Delta\Theta; \\ 0 & \text{при } |\Theta - m_\Theta| > \Delta\Theta. \end{cases} \tag{13}$$

Определим градиент (9) для ограниченного нормального закона (13) при $P(\Theta)>0$

$$\ln P(\Theta) = -\ln\sqrt{2\pi}\,\sigma\Phi\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right) - \frac{(\Theta - m_\Theta)^2}{2\sigma^2}; \tag{14}$$

$$\frac{d\ln P(\Theta)}{dm_\Theta} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)} \frac{d\Phi\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)}{dm_\Theta} + \frac{(\Theta - m_\Theta)}{\sigma^2}. \tag{15}$$

Воспользуемся известным интегралом вероятности

$$\Phi[z(\mu)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z(\mu)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi.$$

Производная от него по сложному аргументу имеет вид

$$\frac{d\Phi[z(\mu)]}{d\mu} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{dz(\mu)}{d\mu} e^{-\frac{1}{2}z^2(\mu)}. \tag{16}$$

Сведем все в одну формулу

$$\frac{d\ln P(\Theta)}{dm_\Theta} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)^2} + \frac{(\Theta - m_\Theta)}{\sigma^2}, \tag{17}$$

тогда градиент функционала (3) примет вид

$$\frac{dQ}{d\Theta} =$$

$$= M\left\{ Y(x) \quad \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)^2} + \frac{(\Theta - m_\Theta)}{\sigma^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{\alpha}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha m_\Theta}{\sigma}\right)^2} M\{Y(x)\} +$$

$$+ M\left\{ Y(x) \frac{(\Theta - m_\Theta)}{\sigma^2} \right\}. \tag{18}$$

Во второй части алгоритма оптимизации полученное значение градиента функции Q используется для определения вероятностных характеристик вектора Θ на основе выражения (10).

Эта итерационная процедура продолжается до тех пор, пока будет выполняться условие

$$\left|\widehat{\Theta}_n - \widehat{\Theta}_{n-1}\right| \geq \varepsilon, \tag{19}$$

где ε – наперед заданное число, характеризующее требования по точности.

В противном случае получается искомая оценка вектора случайных параметров

$$\left(\Theta^* = \widehat{\Theta}_i \middle| \ \left|\widehat{\Theta}_i - \widehat{\Theta}_{i-1}\right| \leq \varepsilon\right). \tag{20}$$

Данная оценка является решением поставленной задачи, доставляя максимум критерию качества (5).

Такой подход исключает недостатки конечно-разностных схем аппроксимации градиента функционала, так как позволяет получить точное значение градиента критерия качества в некоторой области фазового пространства системы. Кроме того, статистическое определение градиента (9) позволит параллельно с моделированием движения системы вычислять и значение градиента как математическое ожидание функции $Y(x)$ $(\Theta - m_\Theta)$, что позволит сэкономить машинное время вычислителя.

Пример. В качестве примера рассматривался синтез терминального управления головной частью (ГЧ) на этапе её вывода в заданную область терминальной точки на поверхности Земли. В работе [5] приводится модель движения корабля (21)

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = -\frac{C_x qS}{m} - g\sin\vartheta; \\ &\frac{d\theta}{dt} = -\frac{C_y qS}{m\upsilon} - \frac{g}{\upsilon}\cos\vartheta + \frac{\upsilon}{R+h}\cos\vartheta; \\ &\frac{d\omega_{z1}}{dt} = -\frac{m_{z1} qS}{I_{z1}} - \frac{m_{z1}^{\omega} qSl^2}{I_{z1}\upsilon}\omega_{z1}; \\ &\frac{dh}{dt} = \upsilon\sin\vartheta; \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\upsilon}{R+h}\cos\vartheta; \quad \varphi = \alpha + \vartheta - \beta, \end{aligned} \tag{21}$$

где ϑ – угол наклона вектора скорости к местному горизонту;

β – угловая дальность, отсчитываемая от начального положения радиуса-вектора;

φ – угол тангажа относительно начального горизонта.

Здесь составляющая $K=\frac{C_x qS}{m}$ полагается стохастической в силу случайного изменения коэффициента C_x.

Алгоритм управления ГЧ формируется по принципу максимально гарантированного результата – решение задачи попадания аппарата в заданную терминальную область. При этом характер траектории на атмосферном участке полета в значительной степени определяется случайными изменениями коэффициента К. Однако, основной интерес заключается в возможности повышения показателей качества работы штатной системы управления на основе использования алгоритма (18)-(20). С этой целью моделировалось движение ГЧ на участке спуска с высоты 15 км на основе приведенной модели [5], в которой коэффициент К представлялся случайным параметром с математическим ожиданием 1,2 и дисперсией 0,1÷0,3. На основе предлагаемого алгоритма (18)-(20) определялось оптимальное значение K^*, которое будет в дальнейшем учитываться при расчете терминального управления обеспечивающего оптимальное значение угла ϑ, при котором вероятность попадания ГЧ в заданную область поверхности Земли будет максимальной. При этом терминальное управление полагалось известным.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 2, отображающих зависимость вероятности попадания P в заданную область от вариации размера области допустимых значений A при различных среднеквадратических отклонениях σ случайной величины K.

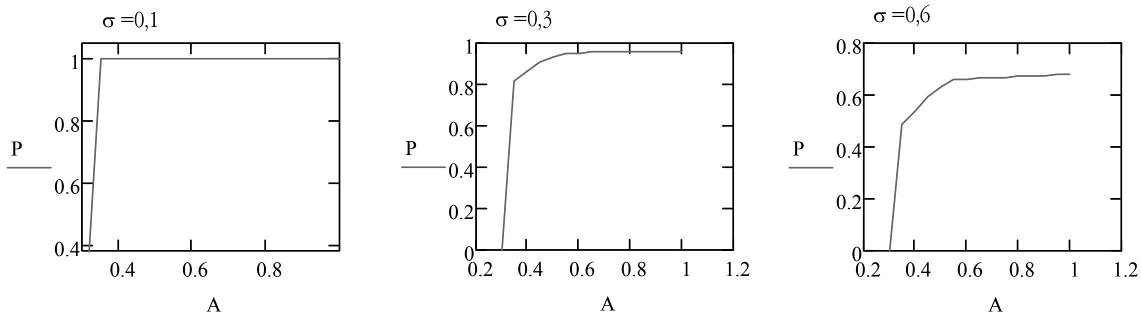

Рис. 2. Результаты численного моделирования

Вариация α=0,3÷0,8, шаг дискретизации $\Delta\alpha$= 0,05; количество траекторий M=50000, количество итерационных вычислений N=14.

Таким образом, численное моделирование подтвердило работоспособность предлагаемого способа и возможность использования данного подхода при решении задачи оптимального управления терминальным объектом на этапе вывода его в заданную область терминальной точки на поверхности Земли.

Литература

1. Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управлении летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1969.

2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.

3. Расщепляев Ю.С., Фандиенко В.Н. Беспоисковые алгоритмы параметрического синтеза стохастических систем автоматического управления. // Известия высших учебных заведений. – 1972. – Электромеханика №10.

4. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. – М.: Машиностроение, 1968.

5. Апазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, - 1987.

6. Лившиц Н.А. Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. – М. Наука., 1967.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Академия, 2003.

Материал поступил в редакцию 26. 12. 2009 г.