

© Самус М.В., Фомин Л.А., Михеев Ю.А., Скоробогатов С.А.
Samus M.V., Fomin L.A., Miheev U.A., Skorobogatov S.A.

КВАНТОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО УРОВНЮ

RANDOM PROCESSES QUANTIZATION ACCORDING TO THEIR LEVELS

Аннотация. Полученные аналитические зависимости автокорреляционной функции и спектра квантованного по уровню сигнала показывают, что в результате квантования по уровню спектры дискретного сигнала расширяются в 2–2,5 раза в зависимости от вида функции корреляции исходного процесса. Даны рекомендации по синтезу квантователя.

Annotation. Received analytical dependences of autocorrelation function and spectrum of quantified according to the signal level show that in result of quantization according to level the spectrums of discrete signal are expended in 2-2.5 times depending on the type of correlation function of original process. Recommendations are given in synthesis of quantizer.

Ключевые слова. Импульсно-кодовая модуляция; дискретизация; аналоговый сигнал; квантование по уровням; автокорреляционная функция; коэффициенты корреляции; текущий спектр.

Key words. Pulse-code modulation, discretization, analog signal, quantization according to levels, autocorrelation function, correlation coefficients.

1. Введение

Вся история развития сетей связи характеризуется широчайшими исследованиями в области проблем передачи информации по каналам связи и получением многих замечательных результатов. Как известно аналоговый канал телефонной сети требует полосу частот 0,3–3,4 кГц. Однако при переводе этого канала в цифровую форму, например с помощью импульсно-кодовой модуляции (ИКМ), формируется цифровой поток со скоростью передачи 64 кбит/с. Иначе говоря, это в 10 раз больше, чем требовалось для аналоговой передачи, считая по 2 бит/с на герц (требуемая полоса равна 32 кГц). Однако научная общественность всего мира не очень обеспокоена такой расточительностью. Несмотря на огромное количество успешных исследований, посвященных сокращению по-

лосы частот передачи речи, никто в мире не ставил вопрос о широкомасштабном переходе на более экономную систему передачи речи по проводным каналам связи. Такое положение объясняется не только снижением стоимости проводных каналов, но и целым рядом несомненных достоинств ИКМ.

2. Состояние вопроса

Большое распространение получили цифровые методы передачи и обработки непрерывных сообщений. С этой целью производится преобразование (квантование) исходного непрерывного сообщения в ряд фиксированных значений.

После квантования полученные значения кодируются, т.е. представляются двоичными символами. Эти

Самус Михаил Владимирович – кандидат технических наук, доцент Ставропольского филиала Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, тел. 8-962-741-84-76;

Фомин Лев Андреевич – кандидат технических наук, доцент, профессор Ставропольского военного института связи Ракетных войск, тел. (8-8652) 77-02-86;

Михеев Юрий Анатольевич – преподаватель Ставропольского военного института связи Ракетных войск, тел. 8-988-744-47-30;

Скоробогатов Сергей Александрович – преподаватель Ставропольского военного института связи Ракетных войск, тел. 8-905-490-11-32.

Samus Mibail Vladimirovich – the candidate of the technical sciences, the assistant professor of the Povolzhsk State University of Telecommunication and Informatics, Stavropol branch, tel. 8-962-741-84-76;

Fomin Lev Andreevich – the candidate of the technical sciences, the assistant professor, the professor of the Stavropol Military Institute of Communication of Missile Troops, tel. (8-8652) 77-02-86;

Miheev Uri Anatol'evich – the teacher of the Stavropol Military Institute of Communication of Missile Troops, tel. 8-988-744-47-30;

Skorobogatov Sergey Aleksandrovich – the teacher of the Stavropol Military Institute of Communication of Missile Troops, tel. 8-905-490-11-32.

символы передаются в канал связи одним из методов дискретной модуляции (например, ИКМ). В приемном устройстве осуществляется восстановление переданного аналогового сообщения.

Известны два способа квантования:

- по уровням;
- по времени и по уровням.

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с квантованием по уровням. Процесс квантования непрерывного сообщения $\xi(t)$ по уровням поясняет рис.1. Диапазон возможных значений сообщения $\xi(t)$ разбивается на L элементарных интервалов точками $\pm x_p$, $i=0, 1, \dots, L/2$. Величины $\pm x_i$ называются порогами квантования, а разность между двумя ближайшими порогами $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$ – шагом квантования. Выходные уровни квантования обозначаются через $\pm y_p$, $i = 1, 2, \dots, L/2$.

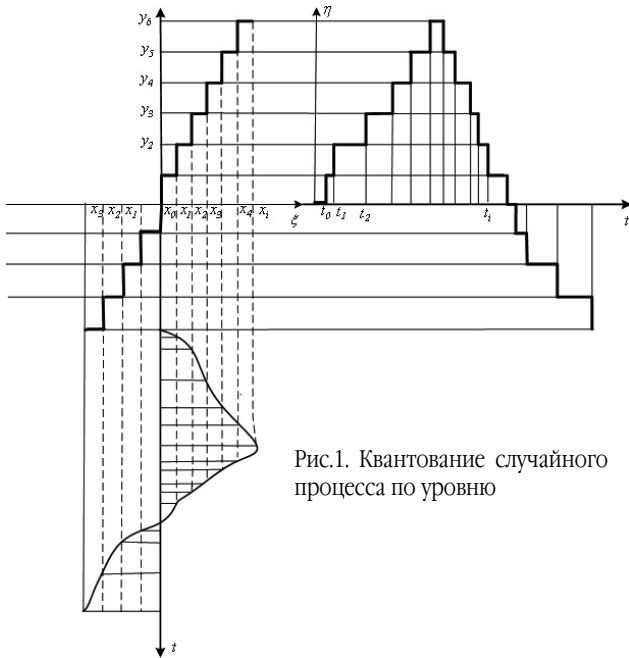


Рис.1. Квантование случайного процесса по уровню

Если истинное значение сообщения $\xi(t)$ в какой-либо момент времени t положительно и находится в интервале (x_{i-1}, x_i) , то вместо него берется соответствующий уровень y_i . При этом вместо непрерывной функции $\xi(t)$ получится ступенчатая кривая y_p , высота ступенек которой равна разности между соседними уровнями квантования $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Преобразование по уровням можно осуществить, если исходное сообщение $y(t)$ подвергнуть линейному преобразованию $y(t) = k\xi(t)$ ступенчатого вида (рис.1). Поскольку значения $\Delta x_i = \Delta x = const$ при таком преобразовании остаются постоянными, то интервалы времени между дискретными значениями полученного процесса зависят от скорости изменения исходного сигнала $\Delta t_i = \text{varia} = l \frac{d\xi}{dt}$.

Таким образом, процессу квантования предшествует процедура дискретизации аналогового сигнала, которая базируется на теореме отсчетов (теореме Котельникова) для сигналов с ограниченным спектром. Ограниченность спектра аналогового сигнала является существенным моментом при рассмотрении процесса дискретизации и приводит к целому ряду недоразумений. Особенностью такого квантователя является то, что он реагирует на текущий спектр сигнала и базируется на теореме отсчетов Котельникова, которая для данного случая может быть перефразирована и сформулирована в следующем виде.

Теорема 1. Сигнал с неограниченным спектром может быть восстановлен в полосе частот $\Delta f = 1/2\Delta\tau$, где $\Delta\tau$ – интервал дискретизации исходного сигнала.

Такая формулировка теоремы отсчетов может трактоваться, как следствие из теоремы Котельникова.

3. Постановка задачи

Если брать отсчеты преобразуемого сигнала через неравные промежутки времени, например, как в рассматриваемом квантователе по уровням, то можно положить $\Delta\tau(t)$, тогда ширина спектра восстановленного сигнала будет зависеть от времени $\Delta f(t)$, означая текущий спектр. Очевидно, справедливо и обратное утверждение, что если применять равномерное квантование по уровню, то отсчеты мгновенных значений будут отстоять друг от друга на неравных интервалах времени Δt_p , как это следует из рис. 1.

На рис. 2 приведен пример квантования по уровням гармонического сигнала, который показывает степень сокращения количества отсчетов при таком способе квантования. Если рассматривать минимальный интервал $\Delta\tau_0$ в качестве отсчетного интервала, определяемого по теореме Котельникова, то сокращение числа отсчетов по теореме 1 составит 1,5 (30/20).

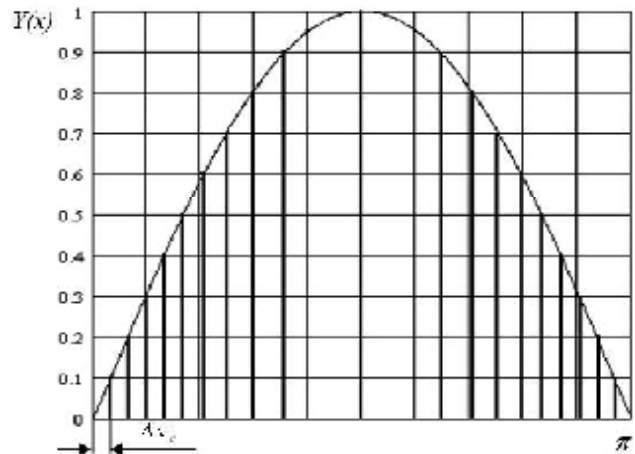


Рис. 2. Квантование по уровням гармонического сигнала

Цель данного исследования – оценить степень сокращения числа отсчетов при квантовании по уровням по сравнению с традиционными методами квантования (например, при использовании ИКМ) и определить количество информации, передаваемой по каналу связи при таком способе квантования.

В каждый получившийся момент времени выходной сигнал соответствует одному из L уровней. Можно считать, что $L=2^k$, где k целое число, тогда $k=\log_2 L$.

4. Корреляционная функция и спектр квантованного процесса

Так как нелинейная характеристика квантователя нечетная функция, то математическое ожидание процесса равно нулю, а корреляционная функция определяется формулой [1]

$$R_\eta(\tau) = \frac{1}{D_\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \Phi^{n+1} \left(\frac{x}{\sqrt{D_\xi}} \right) dx \right\}^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}. \quad (1)$$

Соотношение (1) следует из представления двумерной нормальной плотности вероятности гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием в виде ряда

$$P_2(x_1, x_2) = \sigma^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi^{(n+1)} \left(\frac{x_1}{\sigma} \right) \Phi^{(n+1)} \left(\frac{x_2}{\delta} \right) r_\xi^n(\tau), \quad (2)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – интеграл вероятности, (3)

$\Phi^n(x)$ – производные n -го порядка и от интеграла вероятности, которые табулированы до $n=20$;

$\Phi^{(n+1)}(x) = (-1)^n \Phi(x) H_n(x)$ – выражение производных от интеграла вероятности через полиномы Чебышева-Эрмита $H_n(x)$. (4)

Учитывая (2), (3) и (4), известную формулу ковариационной функции

$$K_\eta(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} q(x_1) q(x_2) P_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

можно привести к виду

$$K_\eta(\tau) = m_\eta^2 + \sigma_\xi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \Phi^{(n+1)} \left(\frac{x}{\sigma_\xi} \right) dx \right\}^2 \frac{r_\xi^n}{n!}. \quad (5)$$

Интегрируя (5) по частям, получаем

$$R_\eta(\tau) = K_\eta(\tau) - m_\eta^2 = \sigma_\xi^{2(v-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} q^v(x) \Phi^{(n+1)} \left(\frac{x}{\sigma_\xi} \right) dx \right\}^2 \frac{r_\xi^n}{n!} \tau$$

(интегрирование по частям проводится v - раз, то есть до тех пор, пока v -я производная $q^v(x)$ превратится в дельта - функцию).

Применим эти действия к формуле (1), а именно, выполнив интегрирование по частям и учитывая, что

$$q^v(x) = \sum_{t=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Delta_i \delta(x - x_i),$$

найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \Phi^n \left(\frac{x}{\sigma_\xi} \right) dx = \sum_{t=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Delta_i \Phi^{(n)} \left(\frac{x_i}{\sigma_\xi} \right).$$

Подставив это выражение в (1), получим автокорреляционную функцию процесса $\eta(t)$ на выходе АЦП.

$$R_n(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Delta_i \Phi^{(n)} \left(\frac{x_i}{\sigma_\xi} \right) \right\}^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}. \quad (6)$$

В частном случае $\Delta_i = \Delta_i = \Delta$; $x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta$, а формула (6) упрощается (суммирование по нечетным n)

$$R_n(\tau) = 4\Delta^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{L}{2}} \Phi^{(n)} \left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\beta} \right) \right\}^2 \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}, \quad (7)$$

где $\sqrt{\beta} = \frac{\Delta}{\sigma_\xi}$.

В соответствии с определением спектральной плотности

$$S_0(f) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau.$$

Найдем спектр квантованного по уровням процесса $\eta(t)$

$$S_\eta(\omega) = 8\Delta^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{L}{2}} \Phi^{(n)} \left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\beta} \right) \right\}^2 \times \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} r_\xi^n(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

На рис. 3 приведены рассчитанные по этой формуле нормированные спектры квантованного по уровню процесса $\eta(t)$ для корреляционной функции, помещенной во второй строке табл. 1.

Вывод. При увеличении шага квантования ширина спектра квантованного процесса увеличивается.

5. Синтез квантователя

В процессе преобразования аналогового сигнала возникает шум (ошибка) квантования, под которым понимается случайный процесс

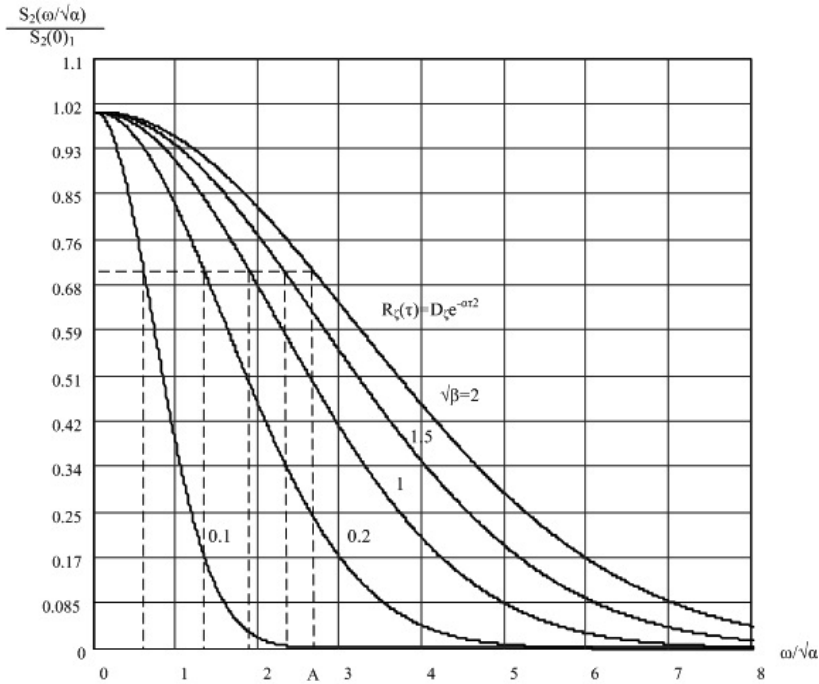


Рис. 3. Нормированные спектральные плотности процессов, квантованных по уровню

Таблица 1

Коэффициенты корреляции широкополосных процессов

$q(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos(2\pi f\tau) df$	$S(f) = 2 \int_0^{\infty} q(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$	Δf_s	Δf_k (кГц)
$(1 + \alpha \tau) e^{-\alpha \tau }$	$\frac{4\alpha^3}{[\alpha^2 + (2\pi f)^2]^2}$	$\frac{\alpha}{8}$	8,56
$e^{-\alpha\tau^2}$	$\sqrt{\pi/\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$	10,64
$(1 + \alpha \tau) + \frac{1}{3} (\alpha\tau)^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{16\alpha^5}{3[\alpha^2 + (2\pi f)^2]^3}$	$\frac{3}{32}\alpha$	9,64
$[1 + (\alpha\tau)^2]^{-1}$	$\frac{\pi}{\alpha} \exp\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{2\pi}\alpha$	7,40
$\text{sech}(\alpha\tau)$	$\frac{\pi}{2} \text{sech}\left(\frac{\pi^2 f}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{2\pi}\alpha$	7,40

$$\zeta(t) = \eta(t) - \xi(t),$$

который представляет собой разность между выходным $\eta(t)$ и входным $\xi(t)$ процессами квантователя.

Практическое значение имеет обратная задача: при заданной функции $f(z) = z^2$ определить величину шага квантования, который дает наименьший средний квадрат ошибки при фиксированном числе ступеней

квантования L . Когда характеристика квантователя – нечетная функция и квантованный процесс – гауссовский, выражение ошибки квантования имеет вид [1]

$$\varepsilon = 2 \sum_{i=1}^{\frac{L}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - y_1)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx;$$

$$D_{\xi} = 1. \tag{8}$$

При фиксированном значении L минимизация среднего квадрата ошибки (8) путем выбора значений y_i и x_i может быть выполнена численным методом.

Результаты решения для $L = 32, \varepsilon_{min} = 0,0025$ представлены в табл. 2, из которой следует, что вероятности нахождения процесса в различных интервалах неодинаковы, что отражено и на рис. 3.

6. Заключение

Проведенные исследования дают основание сделать вывод о том, что цифровое преобразование аналогового сигнала путем квантования его по уровням позволяет существенно сократить объем передаваемой по каналу связи информации по сравнению с традиционными методами аналого-цифрового преобразования (ИКМ). В процессе квантования спектр квантованного сигнала расширяется. Так, например, при передаче речевого сигнала по основному цифровому каналу ширина спектра ИКМ – сигнала составляет 32кГц, что в сравнении с исходной полосой сигнала в 8 раз шире (4кГц). Анализ показал, что при использовании квантования по уровню ширина спектра увеличится в среднем в 2 - 2,5 раза (см. табл. 1), что значительно меньше чем при ИКМ.

Результаты решения

i	x_i	y_{i+1}
0	0, 0	0,065590
1	0,1320	0,1891
2	0,2648	0,3313
3	0,3991	0,4668
4	0,5359	0,6050
5	0,6761	0,7473
6	0,8210	0,8947
7	0,9718	1,049
8	1,130	1,212
9	1,299	1,387
10	1,482	1,577
11	1,682	1,788
12	1,908	2,029
13	2,174	2,319
14	2,505	2,692
15	2,977	3,263

Это позволяет сделать вывод о применимости метода непосредственного квантования по уровням (минуя этап дискретизации), реагирующего на текущий спектр преобразуемого сигнала с последующей передачей информации в асинхронном режиме.

Литература

1. Тихонов В.И. *Статистическая Радиотехника*. М.: Радио и связь, 1982.-624 с.
2. Косякин А.А. *Статистическая теория квантования по уровню*. – М.: Автоматика и телемеханика.–№6, Том XXII.-1961 г.
3. *Таблица функций ошибок и ее первых двадцати производных*. Пер. с англ. М.: ВЦ АН СССР, 1965- 276 с.

Материал поступил в редакцию 26. 01. 2010 г.