УДК 519.2+629.7.01

© Лукин В. Л., Сухорученков Б.И., Швед Е.В.
Lukin V., Sukhoruchenkov B., Swed E.

СПОСОБ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ, ИСКАЖЕННЫМ ПОГРЕШНОСТЯМИ ИЗМЕРЕНИЙ

METHOD FOR EVALUATING THE ACCURACY OF AIRCRAFT BASED ON OBSERVATIONS, DISTORTION MEASUREMENT ERRORS

Аннотация. *Предлагается способ оценки радиальных отклонений летательных аппаратов от цели в классе распределений Релея и Максвелла по экспериментальным данным, искаженным погрешностями измерений с нормальным распределением. Способ основан на использовании метода несмещенных оценок.*

Annotation. *Propose a method for evaluation of the radial deviation of aircraft from the target in the class of Rayleigh and Maxwell distributions from experimental data, distorted measurement errors with a normal distribution. The method is based on the method of unbiased estimates.*

Ключевые слова. *Распределения Релея, Максвелла и нормальное, выборка, погрешности измерений, плотность вероятности оценок, точечные и интервальные оценки.*

Key words. *Distribution of Rayleigh, Maxwell and normal, sampling, measurement error, the probability density estimates, point and interval estimates.*

Постановка задачи

При анализе и контроле отклонений параметров функционирования летательных аппаратов (ЛА) от расчетных значений на плоскости и в пространстве (рассеивания параметров траектории ракет и параметров выведения КА на орбиту, отклонений средств поражения от цели и др.) возникает задача оценки показателей точности ЛА в виде радиальных отклонений от цели. Такие показатели являются случайными величинами (СВ) и описываются в классе распределения Релея (на плоскости) или Максвелла (в пространстве). Плотности вероятности (ПВ) показателей (обозначим их в виде R) зависят от параметра распределения σ и определяются по зависимостям [1]:

для распределения Релея

$$f_1(r) = r\sigma^{-2}\exp(-0,5r^2\sigma^{-2}),\ r>0,\ \sigma>0, \qquad (1)$$

для распределения Максвелла

$$f_2(r) = (2/\pi)^{-0,5}\sigma^{-3}r^2\exp(-0,5r^2\sigma^{-2}),\ r>0,\ \sigma>0. \qquad (2)$$

Параметр распределений σ часто неизвестен и оценивается по экспериментальным данным. Если для контроля показателей ТС используются дистанционные средства измерений ограниченной точности, то получаемые результаты наблюдений содержат погрешности измерений с неизвестными параметрами распределения. В этом случае задача оценивания параметра σ обычно становится некорректной и ее не удается решить классическими методами математической статистики. Далее предлагается способ решения задачи на основе метода несмещенных оценок (МНО) [2, 4].

Рассмотрим следующие условия задачи. Проводятся наблюдения СВ R, имеющей распределение Релея или Максвелла с неизвестным параметром распределения. Данные наблюдений искажены аддитивными погрешностями Δ. В результате получается выборка z_i, $i = 1,...,n$, случайной величины Z, являющейся суммой (сверткой) независимых СВ R и Δ:

$$Z = R + \Delta. \qquad (3)$$

Лукин Владимир Леонидович – доктор технических наук, профессор, академик-секретарь секции "Инженерные проблемы стабильности и конверсии" Российской инженерной академии, тел. (495) 543-36-70;
Сухорученков Борис Иванович – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской инженерной академии, профессор кафедры ракетного вооружения Военной академии РВСН имени Петра Великого, тел. (495) 696-06-48.
Швед Евгений Вадимович – кандидат физико-математических наук, доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова.

Lukin Vladimir – doctor of engineerings sciences, professor, akademik-sekretar' sections the "Engineerings problems of stability and conversion" of the Russian engineering academy, tel. (495) 543-36-70;
Sukhoruchenkov Boris – doctor of engineerings sciences, professor, corresponding member of the Russian engineering academy, professor of department of rocket armament of the Military academy of RVSN of the name of Peter Great, tel. (495) 696-06-48;
Swed Eugene – candidate of physical and mathematical sciences, docent, Russian University of Economics them. G.V. Plekhanov.

Погрешности Δ являются несмещенными и имеют нормальное распределение с неизвестным среднеквадратическим отклонением (СКО) S

$$f_3(\delta) = (2\pi)^{-0,5} S^{-1} \exp(-0,5 S^{-2} \delta^2);\ S > 0. \qquad (4)$$

Необходимо оценить параметры распределений СВ σ и S по выборке $\{z_i\}$.

Задача раздельного оценивания параметров распределений СВ R и Δ по выборке реализаций их суммы является некорректной. Для нормально распределенных СВ такую задачу удается решить только при использовании априорной информации об одной из СВ [3]. Далее приводится способ корректного оценивания параметров распределения случайных величин R и Δ по выборке их аддитивной смеси.

1. Распределение случайной величины Z

Для оценивания неизвестных параметров распределений необходимо иметь ПВ СВ Z. Такая ПВ строится на основе ПВ распределений СВ (1), (2), (4) и модели связи СВ (3). ПВ композиции распределений СВ R и Δ строится по зависимостям [1]:

для распределения Релея

$$f(z) = \int_0^\infty f_1(r) f_3(z-r)\, dr; \qquad (5)$$

для распределения Максвелла

$$f(z) = \int_0^\infty f_2(r) f_3(z-r)\, dr. \qquad (6)$$

Например, ПВ композиции распределений Релея (1) и нормального (4) строится в соответствии с (5) по зависимости

$$f(z) = \int_0^\infty r\sigma^{-2} \exp(-0,5 r^2 \sigma^{-2}) (2\pi)^{-0,5} \times$$

$$\times S^{-1} \exp[-0,5 S^{-2} (z-r)^2]\, dr. \qquad (7)$$

Плотности вероятности $f_1(r)$, $f_3(\delta)$ и $f(z)$ при $\sigma = 3$ и $S = 1$ показаны на рис. 1.

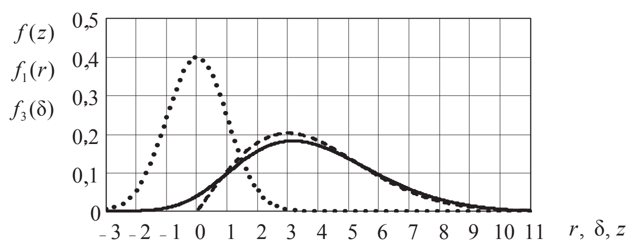

Рис. 1. Композиция нормального распределения и распределения Релея при $\sigma = 3$ и $S = 1$
------ – $f_1(r)$; •••••• – $f_3(\delta)$ ——— – $f(z)$

Аналогично строится ПВ суммы СВ с распределением Максвелла и нормальным распределением.

2. Построение ПВ оценок параметров распределений σ и S

Если параметр σ распределения Релея или Максвелла и СКО погрешностей измерений S неизвестны, их можно оценить по результатам наблюдений реализаций СВ Z на основе метода несмещенных оценок (МНО) [2, 4]. МНО основан на построении и использовании плотности вероятности возможных оценок неизвестных параметров по экспериментальным данным. Рассмотрим выборку СВ Z: z_i, $i = 1,..., n$. Элементы выборки в соответствии с соотношением (3) связаны с реализациями r_i СВ R и реализациями δ_i СВ Δ аддитивной зависимостью

$$z_i = |r_i + \delta_i|,\ i = 1,..., n. \qquad (8)$$

Заметим, что СВ Z представляет собой радиальные отклонения от расчетной точки (от центра), поэтому независимо от знака получаемой суммы $(r_i + \delta_i)$ фиксируемые реализации z_i всегда положительны.

Для корректного оценивания неизвестных параметров σ и S найдем ПВ возможных оценок этих параметров, которые обозначим в виде η и s соответственно. В соответствии с МНО ПВ оценок $f(\eta, s)$ строится на основе полученных значений $\{z_i\}$ с учетом ПВ (5) или (6) при оценках параметров η и s последовательно по зависимостям

$$g(\eta, s) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i / \eta, s); \qquad (9)$$

$$k = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\eta, s)\, d\eta\, ds; \qquad (10)$$

$$f(\eta, s) = k^{-1} g(\eta, s). \qquad (11)$$

На основе плотности (11) можно построить автономные ПВ оценок параметров распределений как компонентов случайного вектора

$$f(\eta) = \int_0^\infty f(\eta, s)\, ds; \quad f(s) = \int_0^\infty f(\eta, s)\, d\eta. \qquad (12)$$

Построенные ПВ являются исчерпывающей характеристикой оценок неизвестных параметров как случайных величин. На основе ПВ как на единой методической основе можно решить различные статистические задачи.

3. Оценивание параметров распределений σ и S

Точечные оценки неизвестных параметров распределений Релея и Максвелла и их дисперсии а также оценки дисперсии погрешностей измерений определяются на основе ПВ (12)

$$\overline{\sigma} = \int_0^\infty \eta\, f(\eta)\, d\eta; \quad \overline{\sigma}_{\overline{\sigma}}^2 = \int_0^\infty (\eta - \overline{\sigma})^2 f(\eta)\, d\eta; \quad (13)$$

$$\bar{S} = \int_0^\infty s\, f(s)\, ds\,; \quad \bar{\sigma}_{\bar{S}}^2 = \int_0^\infty (s - \bar{S})^2 f(s)\, ds\,. \qquad (14)$$

Границы доверительных интервалов для неизвестных параметров при заданной доверительной вероятности γ определяются из соотношений:

$$\int_0^{\bar{\sigma}_{Н}} f(\eta)\, d\eta = 1 - \gamma_1; \quad \int_0^{\bar{\sigma}_{В}} f(\eta)\, d\eta = \gamma_2; \qquad (15)$$

$$\int_0^{\bar{S}_{Н}} f(s)\, ds = 1 - \gamma_1; \quad \int_0^{\bar{S}_{В}} f(s)\, ds = \gamma_2\,, \qquad (16)$$

где γ_1, γ_2 – значения вероятностей, выбираемые из условия минимизации доверительного интервала при выполнении равенства $\gamma_1 + \gamma_2 = 1 + \gamma$.

Оценки доверительных границ определяются из соотношений (15) и (16) численными методами.

На основе полученных оценок параметров можно построить плотности вероятности СВ R и несмещенных погрешностей измерений Δ по зависимостям (1), (2) и (4) при подстановке в них точечных оценок параметров распределения. Можно также найти толерантные границы для отклонений R по методике, изложенной в работе[4].

4. Демонстрация способа при использовании распределения Релея

4.1. *Моделирование результатов измерений*

Предположим, что имеется выборка СВ Z объема $n = 20$. Для контроля корректности и точности изложенного способа оценивания параметра распределения Релея элементы выборки получим методом статистического моделирования при значениях параметров $\sigma = 3$ и $S = 1$. Для моделирования реализаций СВ с распределением Релея использовалась зависимость

$$r_i = \{-2\sigma^2 \ln[1 - \mathrm{R}(0,1)]\}^{0,5}, \; i = 1,\ldots, n, \qquad (17)$$

где R(0, 1) – датчик псевдослучайных чисел с равномерным распределением на отрезке [0, 1].

Реализации погрешностей измерений определялись по зависимости

$$\delta_i = \mathrm{S}\cdot N(0, 1), \; i = 1,\ldots, n, \qquad (18)$$

где $N(0, 1)$ – стандартный датчик псевдослучайных чисел с нормальным распределением при нулевом математическом ожидании и единичном СКО.

Реализации СВ $\{r_i\}$, $\{\delta_i\}$ и $\{z_i\}$ приведены в табл. 1.

4.2. *Построение плотности вероятности оценок неизвестных параметров распределений*

Предположим, что получены только результаты наблюдений $\{z_i\}$, приведенные в табл. 1, и известно, что они являются аддитивной смесью распределения Релея и несмещенных погрешностей измерений с неизвестными параметрами распределений σ и S. Для корректного оценивания этих параметров построим ПВ возможных оценок параметров по зависимостям (9)–(11) с учетом (7). Вычисления проводились в системе MathCAD. Полученная ПВ оценок показана на рис. 2 и 3. Видно, что оценки параметров σ и S практически некоррелированы.

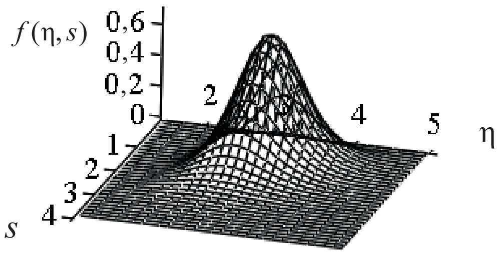

Рис. 2. Общий вид плотности вероятности оценок

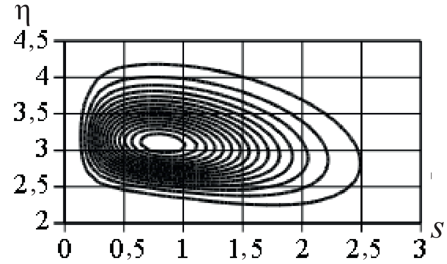

Рис. 3. Карта уровней плотности вероятности оценок

На основе построенной ПВ найдем автономные ПВ оценок параметров σ и S по зависимостям (12), см. рис. 4.

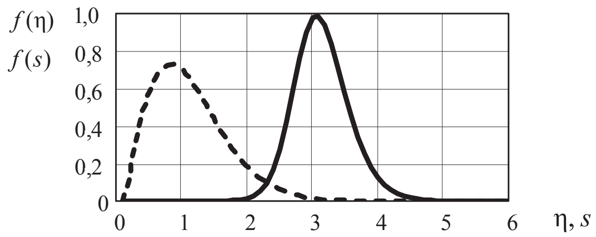

Рис. 4. Автономные плотности вероятности оценок неизвестных параметров: ——— $- f(\eta)$; - - - - - - - $- f(s)$

Таблица 1

Реализации СВ $\{\mathbf{r}_i\}$, $\{\delta_i\}$ и $\{\mathbf{z}_i\}$

r_i	2,6	2,1	3,5	3,2	4,1	3,0	5,8	4,2	1,0	6,0
δ_i	0,8	0,1	–1,0	–0,9	–0,9	0,3	–0,4	1,3	–1,4	0,4
z_i	3,4	2,2	2,5	2,3	3,2	3,3	5,4	5,5	0,4	6,4
r_i	2,6	1,7	3,0	0,7	6,0	9,0	4,1	6,1	4,0	5,3
δ_i	1,8	–0,6	0,5	1,5	–1,8	1,3	–1,0	0,5	–1,0	0,4
z_i	4,4	1,1	3,5	2,2	4,2	10,3	3,1	6,6	3,0	5,7

4.3. *Оценивание параметра распределения Релея и СКО погрешностей измерений*

Точечные оценки неизвестных параметров распределений, их дисперсии и СКО вычисляются на основе построенных ПВ по зависимостям (13) и (14). В результате вычислений получаются следующие реализации оценок:

$$\hat{\sigma} = 3,14;\ \sigma_{\bar{\sigma}} = 0,43;\ \hat{S} = 1,13;\ \sigma_{\bar{S}} = 0,58. \tag{19}$$

Эти оценки близки значениям параметров $\sigma = 3$ и $S = 1$, которые использовались при статистическом моделировании выборки СВ Z, см. п. 4.1.

Интервальные оценки параметров вычисляются из соотношений (15) и (16). При доверительной вероятности $\gamma = 0,90$ и вероятностях $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,95$ получаются следующие реализации оценок границ доверительных интервалов:

$$\hat{\sigma}_{\text{Н}} = 2,44;\ \hat{\sigma}_{\text{В}} = 3,88;\ \hat{S}_{\text{Н}} = 0,36;\ \hat{S}_{\text{В}} = 2,20. \tag{20}$$

На основе полученных точечных оценок параметров распределений можно построить ПВ распределения Релея и нормального распределения погрешностей измерений по зависимостям (1) и (4), см. рис. 5.

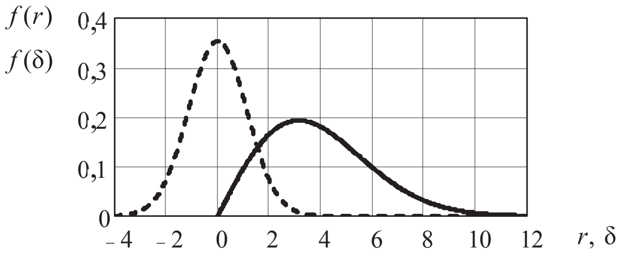

Рис. 5. Оценки плотности вероятности распределения Релея и погрешностей измерений: ——— – $f(r)$; - - - - - – $f(\delta)$

Результаты вычислений свидетельствуют, что по выборке аддитивной смеси реализаций СВ с распределением Релея и нормальным распределением по МНО можно раздельно оценить параметры этих распределений и построить оценки плотности вероятности СВ.

4.4. *Оценивание параметра распределения Релея при повышенных погрешностях измерений*

В приведенном в пп. 4.1–4.3 примере рассмотрен вариант ограниченного СКО погрешностей измерений по сравнению с СКО СВ с распределением Релея. Для проверки корректности изложенного метода при повышенных погрешностях измерений рассмотрим оценивание параметров распределений по выборке СВ Z, полученной по методике п. 4.1 при тех же значениях $\{r_i\}$ и при СКО погрешностей измерений, увеличенном в 2 раза (при $S = 2$). Элементы новой выборки $\{z_i\}$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Элементы новой выборки $\{z_i\}$

z_i	4,2	2,3	1,5	1,4	2,3	3,6	5,0	6,8	1,8	6,8
z_i	6,2	0,5	4,0	3,7	2,4	11,6	2,1	7,1	2,0	6,1

Обработка экспериментальных данных $\{z_i\}$ проводилась по методике п. 4.2 и 4.3. В результате были получены следующие реализации оценок параметров распределений:

$$\hat{\sigma} = 2,96;\ \sigma_{\bar{\sigma}} = 0,54;\ \hat{S} = 1,80;\ \sigma_{\bar{S}} = 0,64. \tag{21}$$

Эти оценки близки значениям параметров $\sigma = 3$ и $S=2$, при которых моделировались элементы выборки. Полученные результаты показывают, что изложенный способ позволяет раздельно оценить и параметр распределения Релея, и СКО нормального распределения погрешностей по выборке аддитивной смеси этих распределений даже при повышенном СКО погрешностей, соизмеримым с СКО распределения Релея.

5. Демонстрация способа при использовании распределения Максвелла

5.1. *Моделирование результатов измерений*

Допустим, что имеется выборка СВ Z объемом n=20. Для контроля корректности и точности изложенного способа оценивания параметра распределения Максвелла элементы выборки получим методом статистического моделирования при значениях параметров $\sigma = 3$ и $S = 1$. Реализации СВ с распределением Максвелла моделировались по зависимости

$$r_i = \left\{ \sum_{k=1}^{3} [\sigma\, \mathrm{N}(0,1)] \right\}^{0,5},\ i = 1,\ldots, n, \tag{22}$$

где N(0, 1) – датчик псевдослучайных чисел, как в (18).

Реализации погрешностей измерений δ_i моделировались по зависимости (18) при S=1. Элементы выборки $\{z_i\}$ СВ Z определялись по зависимости (8). Результаты моделирования приведены в табл. 3.

5.2. *Построение плотности вероятности оценок неизвестных параметров распределений*

Далее предполагается, что имеются только результаты наблюдений $\{z_i\}$, приведенные в табл. 3, и известно, что они являются аддитивной смесью распределения

Таблица 3

Результаты моделирования

r_i	4,3	3,5	3,4	3,5	3,9	7,8	4,4	7,6	2,2	9,5
δ_i	– 0,4	– 0,7	– 0,1	1,0	0,2	0,5	0,7	0	0,3	0,2
z_i	3,9	2,8	3,3	4,5	4,1	8,3	5,1	7,6	2,5	9,7
r_i	1,1	4,9	8,2	4,1	2,8	6,0	4,7	3,3	3,7	5,3
δ_i	– 0,6	– 0,5	– 0,7	1,5	– 0,3	–1,3	0,8	– 0,4	–1,2	–1,0
z_i	0,5	4,4	7,5	5,6	2,5	4,7	5,5	2,9	2,5	4,3

Максвелла и нормальных несмещенных погрешностей измерений с неизвестными параметрами распределения σ и S. Для корректного оценивания неизвестных параметров построим ПВ возможных оценок параметров по зависимостям (9)–(11) с учетом (2) и (6). Вычисления проводились в системе MathCAD. Полученная ПВ оценок параметров показана на рис. 6 и 7. Видно, что оценки параметров σ и S практически некоррелированы.

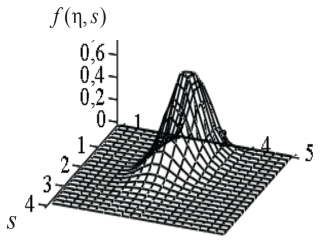

Рис. 6. Общий вид плотности вероятности оценок

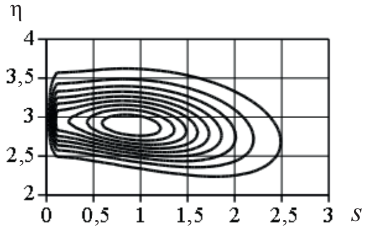

Рис. 7. Карта уровней плотности вероятности оценок

На основе построенной ПВ найдем автономные ПВ оценок параметров σ и S по зависимостям (12), см. рис. 8.

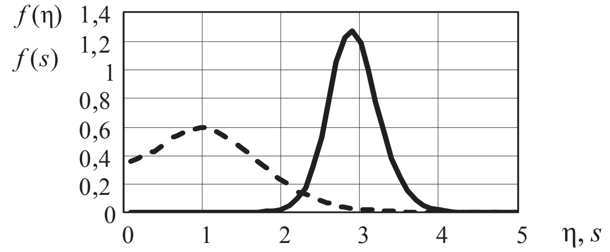

Рис. 8. Автономные плотности вероятности оценок неизвестных параметров: ——— $– f(\eta)$; ------- $– f(s)$

5.3. *Оценивание параметра распределения Максвелла и СКО погрешностей измерений*

Точечные оценки неизвестных параметров распределений, их дисперсии и СКО вычисляются на основе построенных ПВ по зависимостям (13) и (14). В результате вычислений были получены следующие реализации оценок:

$$\hat{\sigma} = 2{,}92;\ \ \sigma_{\bar{\sigma}} = 0{,}33;\ \ \hat{S} = 1{,}12;\ \ \sigma_{\bar{S}} = 0{,}66. \qquad (23)$$

Эти оценки близки значениям параметров $\sigma = 3$, $S = 1$, которые были использованы при статистическом моделировании выборки СВ Z, см. п. 5.1.

Интервальные оценки параметров вычисляются из соотношений (15) и (16). При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}90$ и вероятностях $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}95$ получаются следующие реализации оценок границ доверительных интервалов:

$$\hat{\sigma}_{\text{Н}} = 2{,}40;\ \ \hat{\sigma}_{\text{В}} = 3{,}49;\ \ \hat{S}_{\text{Н}} = 0{,}16;\ \ \hat{S}_{\text{В}} = 2{,}30. \qquad (24)$$

На основе полученных точечных оценок параметров распределений можно построить ПВ распределения Максвелла и нормального распределения погрешностей измерений по зависимостям (2) и (4), см. рис. 9.

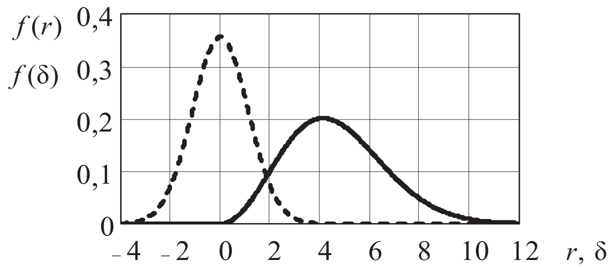

Рис. 9. Оценки плотности вероятности распределения Максвелла и погрешностей измерений: ——– $f(r)$; ----– $f(\delta)$

Полученные результаты свидетельствуют, что на основе данных наблюдений аддитивной смеси реализаций СВ с распределением Максвелла и несмещенных погрешностей измерений с нормальным распределением можно раздельно оценить как параметр распределения Максвелла, так и СКО погрешностей измерений.

5.4. *Оценивание параметра распределения Максвелла при повышенных погрешностях измерений*

В приведенном в пп. 5.2–5.3 примере рассмотрен вариант ограниченного СКО погрешностей измерений по сравнению с СКО СВ с распределением Максвелла. Для проверки корректности изложенного способа при повышенных погрешностях измерений рассмотрим оценивание неизвестных параметров по выборке, полученной по методике п. 5.1 при тех же значениях $\{r_i\}$ и при СКО погрешностей измерений, увеличенном в 2 раза (при $S = 2$). Элементы новой выборки $\{z_i\}$ приведены в табл. 4.

Таблица 4

Элементы новой выборки $\{z_i\}$

z_i	3,5	2,1	3,2	5,5	4,3	8,8	5,8	7,6	2,8	9,9
z_i	0,1	3,9	6,8	7,1	2,2	3,4	6,3	2,5	1,3	3,3

Обработка экспериментальных данных проводилась по методике пп. 5.2 и 5.3. В результате были получены следующие реализации оценок параметров распределений:

$$\hat{\sigma} = 2{,}84;\ \ \sigma_{\overline{\sigma}} = 0{,}37;\ \ \hat{S} = 1{,}71;\ \ \sigma_{\overline{S}} = 0{,}68. \qquad (25)$$

Эти оценки близки значениям параметров $\sigma = 3$ и $S = 2$, при которых моделировались элементы выборки. Результаты вычислений показывают, что по выборке аддитивной смеси СВ с распределением Максвелла и погрешностей измерений с нормальным распределением можно раздельно оценить как параметр распределения Максвелла, так и СКО погрешностей даже при повышенном СКО погрешностей, соизмеримым с СКО распределения Максвелла.

Выводы

На основе проведенных исследований получены следующие основные результаты.

Приведены зависимости для построения плотности вероятности композиции нормального распределения и распределений Релея или Максвелла (п. 1).

На основе метода несмещенных оценок разработан способ построения плотности вероятности оценок неизвестных параметров распределения Релея или Максвелла и СКО несмещенных нормально распределенных погрешностей измерений по выборке аддитивной смеси этих распределений (п. 2).

Получены зависимости для точечных и интервальных оценок параметров распределений Релея и Максвелла и СКО погрешностей измерений (п. 3).

Проведена апробация разработанного способа и показано, что он позволяет по экспериментальным данным, искаженным аддитивными погрешностями измерений, раздельно оценить как параметры распределений Релея или Максвелла, так и СКО погрешностей измерений (пп. 4 и 5).

Разработанный способ обеспечивает оценивание параметров распределений Релея или Максвелла по экспериментальным данным, искаженным аддитивными несмещенными погрешностями измерений. Способ может использоваться при статистическом контроле отклонений параметров функционирования летательных аппаратов от расчетных значений а также в других областях науки и техники.

Литература

1. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 912 с.

2. Волков Л. И., Лукин В. Л., Сухорученков Б. И. Методы статистического контроля надежности технических систем. – Юбилейный: ЗАО «ПСТМ», 2008. – 332 с.

3. Сухорученков Б. И. Метод оценивания параметров распределения случайных характеристик технических систем по выборке, искаженной погрешностями измерений. // Двойные технологии, 2010. №3, С. 41-47.

4. Сухорученков Б. И. Анализ малой выборки. Прикладные статистические методы. М.: Вузовская книга, 2010. – 384 с.

Материал поступил в редакцию 18. 11. 2010 г.