УДК 62-192: 519.248 + 629.7.017.1

© Лукин В. Л., Сухорученков Б.И., Швед Е.В.
Lukin V., Sukhoruchenkov B., Swed E.

СПОСОБЫ КОНТРОЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

METHODS OF CONTROL OF INDEXES OF FAULTLESSNESS OF DIFFICULT TECHNICAL SYSTEMS FROM EXPERIMENTAL DATA

Аннотация. *Предлагаются способы контроля показателей безотказности сложных технических систем, время безотказной работы которых подчиняется распределению Вейбулла или гамма-распределению, по результатам одной или двух серий наблюдений. Способ основан на использовании метода несмещенных оценок.*

Annotation. *Suggests ways to monitor indicators of reliability of complex technical systems, system uptime which obeys the Weibull distribution or Gamma distribution, based on one or two series of observations. The method is based on the method of unbiased estimates.*

Ключевые слова. *Сложная техническая система, вероятность безотказной работы, распределение Вейбулла, гамма-распределение, экспериментальные данные, оценки показателей безотказности.*

Key words. *Complex technical system, the probability of failure-free operation, the Weibull distribution, gamma distribution, the experimental data, evaluation of reliability indices.*

1. Постановка задачи

Рассматриваются восстанавливаемые сложные технические системы (СТС) с резервированием элементов. Одним из основных свойств СТС является безотказность, которая характеризуется средним временем безотказной работы (СВБР) (наработкой на отказ) T_1 и вероятностью безотказной работы (ВБР) $P(T_{ЦЗ})$ в течение периода $T_{ЦЗ}$ решения целевой задачи. Время безотказной работы (ВрБР) СТС является случайным и описывается распределением Вейбулла или гамма-распределением [2, 4]. Плотность вероятности (ПВ) и функция распределения ВрБР T зависят от параметров формы $\Lambda > 0$ и масштаба $\sigma > 0$ и определяются по зависимостям [1, 4]:

• для распределения Вейбулла

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{\Lambda}{\sigma}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\Lambda-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\Lambda}\right]; \\ F(t) &= 1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\Lambda}\right];\ t \ge 0; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

• для гамма-распределения

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \sigma^{\Lambda}\left[\Gamma(\Lambda)\right]^{-1} t^{\Lambda-1}\exp(-\sigma t); \\ F(t) &= \left[\Gamma(\Lambda)\right]^{-1}\sigma^{\Lambda}\int_0^t t^{\Lambda-1}\exp(-\sigma t)\,dt;\ t \ge 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $\Gamma(...)$ – гамма-функция.

Лукин Владимир Леонидович – доктор технических наук, профессор, академик-секретарь секции "Инженерные проблемы стабильности и конверсии" Российской инженерной академии, тел. (495) 543-36-70;
Сухорученков Борис Иванович – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской инженерной академии, профессор кафедры ракетного вооружения Военной академии РВСН имени Петра Великого, тел. (495) 696-06-48.
Швед Евгений Вадимович – кандидат физико-математических наук, доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова.

Lukin Vladimir – doctor of engineerings sciences, professor, akademik-sekretar' sections the "Engineerings problems of stability and conversion" of the Russian engineering academy, tel. (495) 543-36-70;
Sukhoruchenkov Boris – doctor of engineerings sciences, professor, corresponding member of the Russian engineering academy, professor of department of rocket armament of the Military academy of RVSN of the name of Peter Great, tel. (495) 696-06-48;
Swed Eugene – candidate of physical and mathematical sciences, docent, Russian University of Economics them. G.V. Plekhanov.

СВБР T_1 и ВБР $P(\tau)$ СТС в течение периода τ определяются с учетом (1) и (2) по зависимостям [1, 4]:

• для распределения Вейбулла

$$T_1 = \sigma\,\Gamma(1+\Lambda^{-1});\quad P(\tau) = 1 - F(\tau); \tag{3}$$

• для гамма-распределения

$$T_1 = \Lambda\,\sigma^{-1};\quad P(\tau) = 1 - F(\tau). \tag{4}$$

Параметры распределения Λ и σ обычно неизвестны. Наиболее достоверное оценивание этих параметров и плотности вероятности (ПВ) ВрБР осуществляется на основе результатов наблюдений моментов отказов в процессе функционирования СТС. Задачи оценивания показателей безотказности СТС возникают при контроле соответствия безотказности предъявляемым требованиям, при анализе безотказности СТС в разных условиях эксплуатации, при сравнении безотказности разных СТС в процессе эксплуатации, при оценке безотказности СТС после модернизации или при переходе от испытаний СТС к серийному производству, при проверке гипотез о безотказности СТС, изготавливаемых на разных предприятиях и др.

Если СТС функционирует до отказа и зафиксированы только моменты отказов СТС, то для оценки параметров Λ и σ по экспериментальным данным можно использовать известные статистические методы [1, 4]. Однако СТС могут функционировать в течение отдельных циклов (периодов) и при этом в некоторые периоды отказы могут не наступить. Примерами таких систем являются транспортные системы (автомобили, поезда, самолеты, корабли и др.), системы военного и космического назначения (мобильные РК, космические системы, агрегаты наземного оборудования, системы траекторных и телеизмерений) и др. В этом случае оценивание показателей безотказности СТС по экспериментальным данным усложняется и возможно на основе метода несмещенных оценок (МНО) [2, 4], что рассматривается далее.

2. Оценивание показателей безотказности СТС по методу несмещенных оценок

Рассмотрим восстанавливаемые СТС, при испытаниях или эксплуатации которых в течение некоторых периодов T_ν, $\nu = 1,..., N$ зафиксированы моменты отказов СТС t_i, $i = 1,..., n \le N$, отсчитываемых от начала работы СТС. Периоды, при которых отказов не было, перенумеруем в виде T_j, $j = 1,..., J$. Необходимо на основе данных наблюдений оценить показатели безотказности СТС при предположении, что ВрБР имеет распределение Вейбулла (1) или гамма-распределение (2).

2.1. *Построение плотности вероятности оценок параметров распределения времени безотказной работы СТС на основе экспериментальных данных*

Для корректного оценивания неизвестных параметров распределений Λ и σ и показателей безотказности СТС по экспериментальным данным построим плотность вероятности возможных оценок параметров распределений, которые обозначим в виде λ и s соответственно. Для этого используем метод несмещенных оценок (МНО) [2, 4]. Рассмотрим результаты наблюдений моментов отказов СТС $\{t_i\}$ и совокупность периодов безотказной работы $\{T_j\}$. На основе этих данных ПВ оценок $f(\lambda, s)$ в соответствии с МНО строится с учетом (1) или (2) последовательно по зависимостям

$$g(\lambda,s) = \left[\prod_{i=1}^{n} f(\lambda,s,t_i)\right]\prod_{j=1}^{J}\left[\,1 - F(\lambda,s,T_j)\right]; \tag{5}$$

$$k = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty g(\lambda,s)\,d\lambda\,ds; \tag{6}$$

$$f(\lambda,s) = k^{-1}\,g(\lambda,s), \tag{7}$$

где $f(\lambda, s, t_i)$, $F(\lambda, s, T_j)$ – ПВ и функция распределения ВрБР, определяемые по зависимостям (1) или (2) при полученных данных $\{t_i\}$ и $\{T_j\}$ и при замене параметров распределений на их оценки. На основе ПВ $f(\lambda, s)$ можно построить автономные ПВ возможных оценок параметров распределений как компонентов случайного вектора

$$f(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda,s)\,ds;\quad f(s) = \int_0^\infty f(\lambda,s)\,d\lambda. \tag{8}$$

ПВ является исчерпывающей характеристикой оценок как случайных величин и векторов, на основе которой можно корректно решить различные статистические задачи.

2.2. *Оценивание параметров распределения времени безотказной работы СТС*

Параметры распределения ВрБР СТС оцениваются на основе ПВ оценок (7), (8). Несмещенные точечные оценки параметров распределения и их дисперсии определяются по зависимостям

$$\overline{\Lambda} = \int_0^\infty \lambda\, f(\lambda)\,d\lambda;\quad \sigma^2_{\overline{\Lambda}} = \int_0^\infty (\lambda - \overline{\Lambda})^2\, f(\lambda)\,d\lambda; \tag{9}$$

$$\overline{\sigma} = \int_0^\infty s\, f(s)\,ds;\quad \sigma^2_{\overline{\sigma}} = \int_0^\infty (s - \overline{\sigma})^2\, f(s)\,ds. \tag{10}$$

В случае необходимости можно определить интервальные оценки параметров распределения при заданной доверительной вероятности γ численным способом на основе интегрирования ПВ оценок (8) [2, 4]. ПВ времени безотказной работы СТС оценивается по зависимостям (1) или (2) при полученных точечных оценках параметров распределений (9) и (10)

- для распределения Вейбулла

$$\overline{f}(t)=\frac{\overline{\Lambda}}{\overline{\sigma}}\left(\frac{t}{\overline{\sigma}}\right)^{\overline{\Lambda}-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\overline{\sigma}}\right)^{\overline{\Lambda}}\right];\ t\geq 0; \quad (11)$$

- для гамма-распределения

$$\overline{f}(t)=\overline{\sigma}^{\overline{\Lambda}}\left[\Gamma(\overline{\Lambda})\right]^{-1}t^{\overline{\Lambda}-1}\exp(-\overline{\sigma}\,t);\ t\geq 0. \quad (12)$$

2.3. *Оценивание среднего времени безотказной работы СТС*

Точечная оценка СВБР СТС и ее дисперсия определяются на основе ПВ $f(\lambda, s)$ с учетом (3) или (4) как для функции от случайных параметров по зависимостям:

- при распределении Вейбулла

$$\left.\begin{aligned}\overline{T}_1&=\int_0^\infty\int_0^\infty s\,\Gamma(1+\lambda^{-1})\,f(\lambda,s)\,d\lambda\,ds;\\ \sigma^2_{\overline{T}_1}&=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[s\,\Gamma(1+\lambda^{-1})-\overline{T}_1\right]^2 f(\lambda,s)\,d\lambda\,ds;\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

- при гамма-распределении

$$\left.\begin{aligned}\overline{T}_1&=\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda\,s^{-1}\ f(\lambda,s)\,d\lambda\,ds;\\ \sigma^2_{\overline{T}_1}&=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\lambda\,s^{-1}-\overline{T}_1\right]^2 f(\lambda,s)\,d\lambda\,ds.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Для корректного оценивания СВБР СТС и контроля соответствия СВБР СТС предъявляемым требованиям можно построить по экспериментальным данным ПВ $f(\tau_1)$ возможных оценок СВБР τ_1. Такая ПВ строится на основе ПВ $f(\lambda, s)$ как для функции от случайных аргументов по методике [2, 4]. Для гамма-распределения можно использовать аналитический метод, который после преобразований с учетом (4) реализуется в виде следующей зависимости:

$$f(\tau_1)=\int_0^\infty f(\tau_1\cdot s, s)\cdot s\,ds. \quad (15)$$

Для распределения Вейбулла при построении ПВ $f(\tau_1)$ аналитический метод использовать не удается, поэтому можно применить численный метод, описанный в работах [2, 4]. Исследования показали, что ПВ $f(\tau_1)$ близка к нормальному распределению с математическим ожиданием и дисперсией, которые определяются по зависимостям (13) или (14).

Если построена ПВ $f(\tau_1)$, то можно определить точечную оценку СВБР и ее дисперсию по зависимостям

$$\overline{T}_1=\int_0^\infty\tau_1\,f(\tau_1)\,d\tau_1;\quad \sigma^2_{\overline{T}_1}=\int_0^\infty(\tau_1-\overline{T}_1)^2\,f(\tau_1)\,d\tau_1. \quad (16)$$

Точечные оценки СВБР и их дисперсии можно также получить по зависимостям (3) или (4) при точечных оценках параметров распределения. При этом оценки по зависимостям (3), (4), (13), (14) и (16) практически совпадают.

На основе ПВ $f(\tau_1)$ определяется оценка нижней доверительной границы $T_{1Н}$ для СВБР при заданной доверительной вероятности γ численным способом из равенства

$$\int_0^{\overline{T}_{1\text{Н}}} f(\tau_1)\,d\tau_1=1-\gamma. \quad (17)$$

Если для СТС задано требование к нижней границе СВБР $T_{1НТР}$, то для контроля соответствия СВБР требованию на основе ПВ $f(\tau_1)$ определяется вероятность того, что СВБР будет выше требуемого значения

$$B=\text{Вер}(T_1\geq T_{1\text{НТР}})=\int_{T_{1\text{НТР}}}^\infty f(\tau_1)\,d\tau_1. \quad (18)$$

На основе ПВ $f(\tau_1)$ можно проверить различные статистические гипотезы о СВБР и обосновать решение о безотказности СТС. В частности, если выдвигается гипотеза H_0: $T_1 \geq T_{1тр}$ и задан уровень значимости α, то с учетом (18) решение принимается по правилу

$$\left.\begin{array}{l}\text{гипотеза } H_0 \text{ принимается, если } B\geq\alpha;\\ \text{гипотеза } H_0 \text{ отклоняется, если } B<\alpha.\end{array}\right\} \quad (19)$$

2.4. *Оценивание вероятности безотказной работы СТС*

Вероятность безотказной работы (ВБР) СТС $P(\tau)$ в течение периода τ оценивается на основе ПВ $f(\lambda, s)$ (7). Точечная оценка ВБР и ее дисперсия с учетом (3) или (4) определяются по зависимостям

$$\overline{P}(\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[1-F(\tau,\lambda,s)\right]f(\lambda,s)\,d\lambda\,ds; \quad (20)$$

$$\sigma^2_{\overline{P}(\tau)}=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[1-F(\tau,\lambda,s)-\overline{P}(\tau)\right]^2 f(\lambda,s)\,d\lambda\,ds, \quad (21)$$

где $F(\tau,\lambda,s)$ – функция распределения (1) или (2) при возможных оценках параметров распределения.

Для интервального оценивания ВБР в течение фиксированного периода τ необходимо построить ПВ оценок ВБР. Такая ПВ, построенная по экспериментальным данным, описывается в классе бета-распределения [3] с параметрами формы $\beta > 0$ и $\eta > 0$

$$f(p)=[\mathrm{B}(\beta,\eta)]^{-1}\,p^{\beta-1}(1-p)^{\eta-1};\ p\in[0;1], \quad (22)$$

где $\mathrm{B}(\beta, \eta)$ – бета-функция.

Математическое ожидание и дисперсия бета-распределения определяются по зависимостям

$$\mathrm{M}_P = \beta(\beta+\eta)^{-1}; \quad \mathrm{D}_P = \beta\eta(\beta+\eta)^{-2}(\beta+\eta+1)^{-1}. \quad (23)$$

Параметры β и η можно оценить по методу моментов [1, 4] на основе приравнивания моментов распределения (23) их точечным оценкам (20) и (21) при фиксированном периоде τ. При этом параметры распределения β и η определяются численным способом из соотношений

$$\mathrm{M}_P = \overline{P}(\tau); \quad \mathrm{D}_P = \sigma^2_{\overline{P}(\tau)}. \qquad (24)$$

При оценках параметров β и η строится ПВ оценок ВБР по зависимости (22). На основе ПВ $f(p)$ можно найти оценку нижней доверительной границы для ВБР P_H при заданной доверительной вероятности γ численным способом из соотношения

$$\int_{\overline{P}_\mathrm{H}}^{1} f(p)\,dp = \gamma. \qquad (25)$$

Если для СТС задано требование P_{HTP} к нижней границе ВБР в течение периода выполнения целевой задачи $T_{ЦЗ}$, то для контроля соответствия ВБР требованию строится ПВ $f(p)$ при $\tau = T_{ЦЗ}$ и определяется вероятность того, что ВБР будет не ниже требуемого значения

$$B = \mathrm{Вер}(P \ge P_{\mathrm{НТР}}) = \int_{P_{\mathrm{НТР}}}^{1} f(p)\,dp. \qquad (26)$$

На основе оценки ПВ $f(p)$ можно проверить различные статистические гипотезы о соответствии ВБР требованиям и обосновать решение о безотказности СТС. В частности, если выдвигается гипотеза H_0: $P \ge P_{HTP}$ и задан уровень значимости α, то по зависимости (26) определяется вероятность В и решение принимается по правилу

$$\left.\begin{array}{l}\text{гипотеза } H_0 \text{ принимается, если } B \ge \alpha;\\ \text{гипотеза } H_0 \text{ отклоняется, если } B < \alpha.\end{array}\right\} \qquad (27)$$

3. Сравнение показателей безотказности СТС по двум выборкам

Рассмотрим две восстанавливаемые СТС или одну СТС в разные периоды или при разных условиях эксплуатации. Предположим, что получены две выборки экспериментальных данных об отказах для 1-й и 2-й СТС соответственно: моменты отказов СТС t_{1i}, i=1,..., n_1, и t_{2i}, i=1,..., n_2, а также периоды безотказной работы T_{1j}, j=1,...J_1 и T_{2j}, j=1,...J_2. Для анализа показателей безотказности СТС по каждой выборке строятся ПВ оценок параметров распределения Вейбулла или гамма-распределения $f_1(\lambda_1, s_1)$ и $f_2(\lambda_2, s_2)$ по методике п. 2.1. На основе построенных ПВ можно решить различные задачи сравнения показателей безотказности СТС по двум выборкам.

3.1. *Сравнение среднего времени безотказной работы СТС*

Для достоверного сравнения СВБР СТС T_{11} и T_{12} по двум выборкам строятся ПВ оценок СВБР по каждой выборке $f_1(\tau_{11})$ и $f_2(\tau_{12})$ по методике п. 2.3. На основе этих ПВ вычисляются вероятности отличия СВБР в 1-й и 2-й выборке

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \mathrm{Вер}(T_{11} \ge T_{12}) = \int_0^\infty \int_{\tau_{12}}^\infty f_1(\tau_{11}) f_2(\tau_{12})\,d\tau_{11} d\tau_{12};\\ B_2 = \mathrm{Вер}(T_{11} < T_{12}) = 1 - B_1; \quad B_{\max} = \max[B_1; B_2]. \end{array}\right\} (28)$$

На основе вероятностей (28) можно обосновать решение о совпадении или различии СВБР СТС в выборках. В частности, можно проверить нулевую гипотезу, что СВБР СТС T_{11} и T_{12} совпадают H_0: $T_{11} = T_{12}$. Для этого задается уровень значимости α и определяется максимальное значение вероятностей (28) $B_{\max}$. Решение принимается по правилу

$$\left.\begin{array}{l}\text{гипотеза } H_0 \text{ принимается, если } B_{\max} \le 1-\alpha;\\ \text{гипотеза } H_0 \text{ отклоняется, если } B_{\max} > 1-\alpha.\end{array}\right\} \qquad (29)$$

3.2. *Сравнение вероятности безотказной работы СТС*

Для достоверного сравнения ВБР СТС $P_1(T_{ЦЗ})$ и $P_2(T_{ЦЗ})$ в течение периода целевого функционирования по двум выборкам строятся ПВ оценок ВБР по каждой выборке $f_1(p_1)$ и $f_2(p_2)$ по методике п. 2.4 при $\tau = T_{ЦЗ}$. На основе этих ПВ вычисляются вероятности отличия ВБР СТС в 1-й и 2-й выборке

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \mathrm{Вер}(P_1 \ge P_2) = \int_0^1 \int_{p_2}^1 f_1(p_1) f_2(p_2)\,dp_1 dp_2;\\ B_2 = \mathrm{Вер}(P_1 < P_2) = 1 - B_1; \quad B_{\max} = \max[B_1; B_2]. \end{array}\right\} (30)$$

На основе вероятностей (30) можно обосновать решение о совпадении или различии ВБР СТС в выборках. В частности, можно проверить нулевую гипотезу, что ВБР СТС $P_1(T_{ЦЗ})$ и $P_2(T_{ЦЗ})$ совпадают H_0: $P_1(T_{ЦЗ}) = P_2(T_{ЦЗ})$. Для этого задается уровень значимости α и определяется максимальное значение вероятностей (30) $B_{\max}$. Решение принимается по правилу (29).

Следует особо отметить, что принятие гипотез по правилам (19), (27), (29) не означает, что они верны, а только то, что гипотезы не противоречат экспериментальным данным. В действительности с вероятностью B=1−α гипотеза может быть неверной. Поэтому выдвижение статистической гипотезы и назначение низкого уровня значимости α ≤ 0,1, как рекомендуется в работе [1], возможно только при практически полной уверенности в справедливости выдвигаемой гипотезы. Для обоснования решений о показателях безотказности СТС можно использовать непосредственно вероятности (18), (26), (28), (30).

4. Условия для демонстрации способов контроля показателей безотказности СТС

Продемонстрируем работоспособность и точность изложенных в пп. 2 и 3 способов на примере оценивания показателей безотказности двух восстанавливаемых технических систем (ТС), при эксплуатации которых зафиксированы следующие моменты отказов t_i, i= 1,..., n, и периоды безотказной работы T_j, j = 1,..., J:

- для 1-й ТС $\{t_i\}$ = {1,4; 2,5; 3,7; 0,9; 2,1; 3,2; 0,7; 3,5; 3,4; 1,8}, $\{T_j\}$ = {5; 5; 4; 4; 4};
- для 2-й ТС $\{t_i\}$ = {2,7; 3,3; 1,3; 4,9; 4,5; 3,6; 4,1}, $\{T_j\}$= {6; 6; 6; 7}.

Допустим, что к ТС предъявляются требования по СВБР $T_{1НТР}$ = 4 и по ВБР $P_{НТР}$ = 0,80 в течение периода целевого применения $T_{ЦЗ}$ = 2. При контроле показателей безотказности примем доверительную вероятность γ=0,90 и уровень значимости α= 0,10.

5. Контроль показателей безотказности технических систем в классе распределения Вейбулла

5.1. *Оценивание показателей безотказности первой ТС*

Рассмотрим оценивание показателей безотказности 1-й ТС по данным, приведенным в п. 4. Предполагается, что ВрБР ТС имеет распределения Вейбулла.

5.1.1. *Построение ПВ оценок параметров распределения ВрБР 1-й ТС*

Для оценивания показателей безотказности ТС используем способы, изложенные в п. 2. Для этого построим ПВ $f(\lambda, s)$ оценок параметров распределения ВрБР в классе распределения Вейбулла. Такая ПВ строится по зависимостям (5)–(7) с учетом (1) и полученных данных $\{t_i\}$ и $\{T_j\}$. Построенная в системе MathCAD ПВ показана на рис. 1 и 2.

На основе ПВ $f(\lambda, s)$ определяются автономные ПВ оценок параметров распределения Вейбулла по зависимостям (8), см. рис. 3.

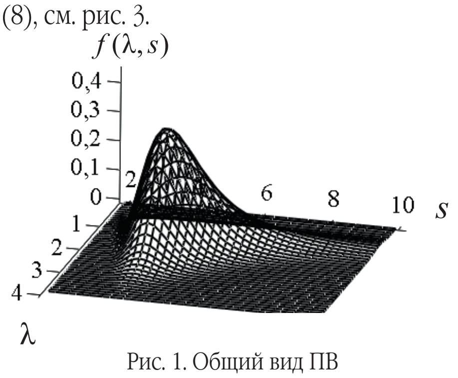

Рис. 1. Общий вид ПВ

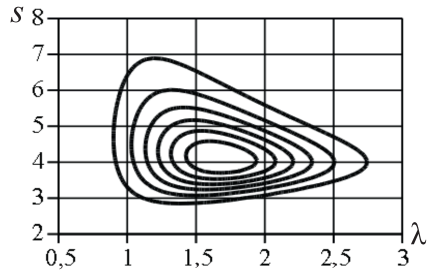

Рис. 2. Карта уровней ПВ

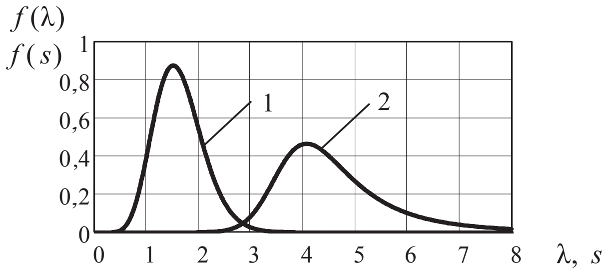

Рис. 3. Автономные ПВ оценок параметров λ (1) и *s* (2)

На основе построенных ПВ вычисляются точечные оценки параметров распределения, их дисперсии и среднеквадратические отклонения (СКО) по зависимостям (9) и (10). ПВ оценок $f(s)$ параметра σ имеет удлиненный хвост малых, но ненулевых значений. Так как большие значения параметра σ являются маловероятными, интегрирование по зависимости (10) было ограничено областью значений оценок s, содержащей параметр σ с вероятностью 0,999. Полученные реализации оценок равны $\hat{\Lambda} = 1,64;\ \sigma_{\bar{\Lambda}} = 0,47;\quad \hat{\sigma} = 4,75;\ \sigma_{\bar{\sigma}} = 1,46$.

Оценка ПВ ВрБР в классе распределения Вейбулла определяется по зависимости (11) и показана на рис. 4.

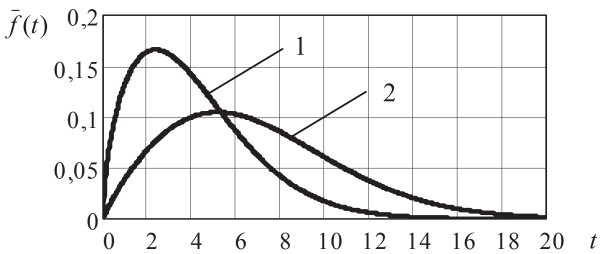

Рис. 4. Оценки ПВ времени безотказной работы первой (1) и второй (2) ТС в классе распределения Вейбулла

5.1.2. *Оценивание среднего времени безотказной работы 1-й ТС*

Точечная оценка СВБР и ее СКО вычисляются по зависимостям (13) $\hat{T}_1$ =4,24; $\sigma_{\bar{T}_1}$ =1,60. ПВ оценки СВБР $f(\tau_1)$ примерно соответствует нормальному распределению с математическим ожиданием $\hat{T}_1$ и СКО $\sigma_{\bar{T}_1}$, см. рис. 5.

На основе ПВ $f(\tau_1)$ можно проверить гипотезу о соответствии СВБР 1-й ТС требованию $T_{1НТР}$ = 4, см. п.4. Для этого вычисляется вероятность по зависимости (18)

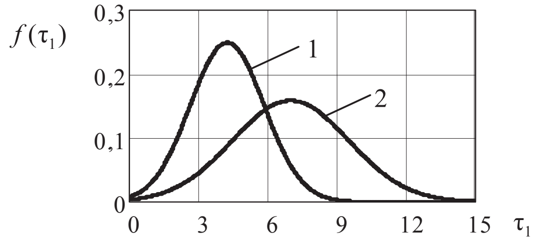

Рис. 5. Плотности вероятности оценок СВБР первой (1) и второй (2) ТС

B = 0,55. При заданном уровне значимости α = 0,10 в соответствии с правилом (19) следует считать, что СВБР 1-й ТС соответствует требованию. Однако при принятии окончательного решения следует учитывать, что с большой вероятностью B = 0,45 СВБР может быть ниже требуемого значения.

5.1.3. *Оценивание вероятности безотказной работы 1-й ТС*

Оценка ВБР ТС в функции от времени работы ТС и ее дисперсия определяется по зависимостям (20) и (21). Реализация оценки ВБР и ее СКО, увеличенное в 3 раза, показаны на рис. 6.

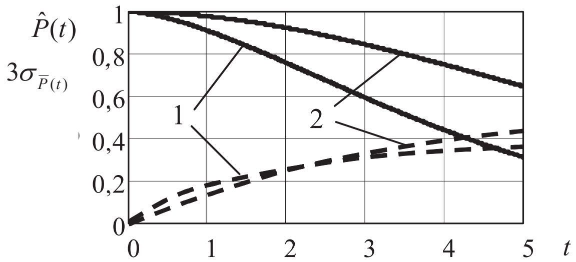

Рис. 6. Плотности вероятности оценок ВБР первой (1) и второй (2) ТС: ——— $-\hat{P}(t)$; - - - - $-3\sigma_{\overline{P}}$

ВБР 1-й ТС в течение периода $T_{ЦЗ}$ и ее СКО оцениваются по зависимостям (20) и (21) при $\tau=T_{ЦЗ}=2$: $\hat{P}=0{,}784$; $\sigma_{\overline{P}}=0{,}091$. Для интервального оценивания ВБР ТС построим ПВ оценок ВБР в классе бета-распределения по зависимостям (23)–(24). При $T_{ЦЗ}$=2 получаются параметры бета-распределения β=17,0; η= 6,6. ПВ оценок ВБР по зависимости (22) при этих параметрах показана на рис.7.

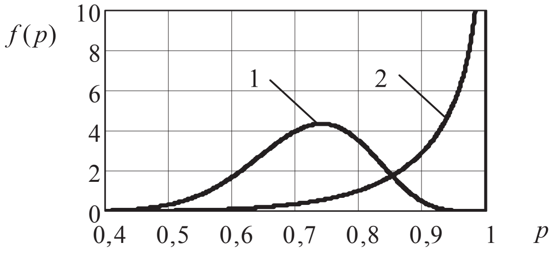

Рис. 7. Плотность вероятности оценок ВБР первой (1) и второй (2) ТС при $\tau=T_{ЦЗ}$=2

На основе ПВ $f(p)$ можно решить различные задачи. Нижняя доверительная граница P_H для ВБР 1-й ТС при заданной доверительной вероятности γ = 0,9 определяется по зависимости (25): $\hat{P}_{\text{Н}}$=0,60. Можно проверить гипотезу, что ВБР 1-й ТС соответствует требуемой H_0: $P \geq P_{НТР}$ =0,80. Для этого вычисляется вероятность B = Вер($P \geq P_{НТР}$) по зависимости (26) B=0,20. Так как эта вероятность выше уровня значимости α=0,10, то в соответствии с правилом (27) гипотезу следует принять и считать, что ВБР ТС соответствует требованию. Однако при принятии окончательного решения следует учитывать, что с большой вероятностью B=0,80 ВБР может быть ниже требуемого значения.

5.2. ***Оценивание показателей безотказности двух ТС***

Для сравнения показателей безотказности двух ТС необходимо оценить показатели безотказности каждой ТС по данным наблюдений, приведенным в п. 4. Результаты оценивания для 1-й ТС приведены в п. 5.1. Для 2-й ТС вычисления проводятся аналогично.

5.2.1. *Оценивание параметров распределения ВрБР второй ТС*

Плотности вероятности оценок параметров распределения Вейбулла ВрБР второй ТС строятся по зависимостям (5)-(8) и показаны на рис. 8-10.

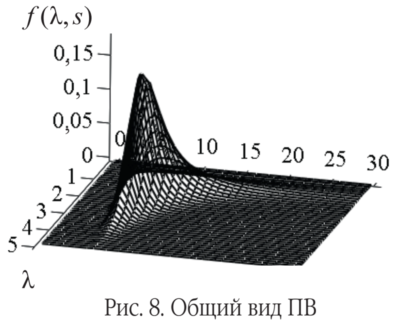

Рис. 8. Общий вид ПВ

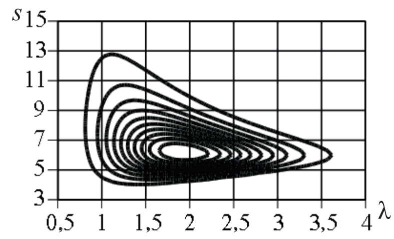

Рис. 9. Карта уровней ПВ

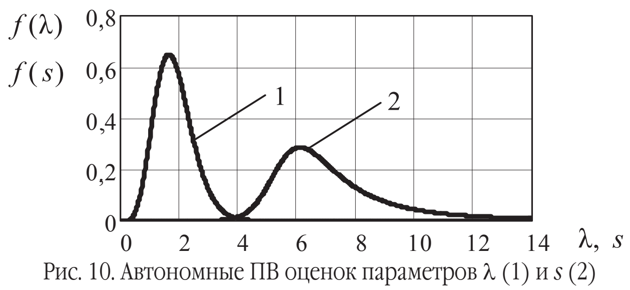

Рис. 10. Автономные ПВ оценок параметров λ (1) и s (2)

На основе построенных ПВ вычисляются реализации точечных оценок параметров распределения и их СКО: $\hat{\Lambda} = 1,86$; $\sigma_{\bar{\Lambda}} = 0,65$; $\hat{\sigma} = 7,83$; $\sigma_{\bar{\sigma}} = 3,83$. Оценка ПВ ВрБР второй ТС определяется по зависимости (1) при полученных оценках параметров распределения. Она показана на рис. 4.

5.2.2. *Сравнение среднего времени безотказной работы ТС*

Для сравнения СВБР двух ТС необходимо оценить СВБР ТС по результатам наблюдений, приведенным в п. 4. Оценки СВБР для 1-й ТС приведены в п. 5.1.2. Для второй ТС оценивание проводится аналогично. В результате получается реализация точечной оценки СВБР 2-й ТС и ее СКО $\hat{T}_1 = 7,00$; $\sigma_{\bar{T}_1} = 2,51$. ПВ оценки СВБР второй ТС при полученных оценках СВБР показана на рис. 5. На основе построенных ПВ можно решить задачи сравнения СВБР двух ТС. Для этого вычисляются вероятности отличия СВБР T_{12} второй ТС от СВБР T_{11} первой ТС по зависимостям (28) $B_1 = \text{Вер}(T_{12} \geq T_{11}) = 0{,}82$; $B_2 = \text{Вер}(T_{12} \leq T_{11}) = 0{,}18$; $B_{\text{мах}} = 0{,}82$. На основе этих вероятностей можно проверить различные гипотезы. В частности, проверим гипотезу, что СВБР ТС совпадают H_0: $T_{11} = T_{12}$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}10$. Так как максимальное значение вероятности $B_{\text{мах}}$ меньше значения $1-\alpha = 0{,}90$, то в соответствии с правилом (29) гипотезу следует принять. Однако при обосновании окончательного решения следует учесть, что с вероятностью $B = 0{,}82$ СВБР ТС могут различаться.

5.2.3. *Сравнение вероятности безотказной работы ТС*

Для сравнения ВБР двух ТС необходимо оценить ВБР этих ТС по результатам наблюдений, приведенным в п. 4. Оценки ВБР для 1-й ТС приведены в п. 5.1.3. Для второй ТС оценивание проводится аналогично.

Оценка ВБР ТС в функции времени работы 2-й ТС и ее дисперсия определяются по зависимостям (20)-(21). Реализация оценки ВБР второй ТС и ее СКО, увеличенное в 3 раза, показаны на рис. 6. Видно, что ВБР 2-й ТС выше ВБР 1-й ТС. Погрешности оценок ВБР 1-й и 2-й ТС практически совпадают. ВБР 2-й ТС в течение периода целевого использования оценивается при $\tau = T_{ЦЗ} = 2$: $\hat{P} = 0,924$; $\sigma_{\bar{P}} = 0,086$.

Для сравнения ВБР двух ТС построим ПВ оценок ВБР 2-й ТС при $\tau = T_{ЦЗ} = 2$. Она строится в классе бета-распределения по зависимостям (23)-(24). При этом получаются параметры бета-распределения β=7,90, η=0,65. ПВ оценок ВБР 2-й ТС по зависимости (22) при этих параметрах показана на рис. 7. На основе построенных ПВ $f(p)$ можно решить различные статистические задачи. Для этого вычисляются вероятности отличия ВБР технических систем P_1 и P_2 по зависимостям (30): $B_1 = \text{Вер}(P_2 \geq P_1) = 0{,}94$; $B_2 = \text{Вер}(P_2 \leq P_1) = 0{,}06$ и $B_{\text{мах}} = 0{,}94$. Знание этих вероятностей позволяет проверить различные статистические гипотезы. В частности, проверим гипотезу о равенстве ВБР 1-й и 2-й ТС $H_0: P_1 = P_2$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}10$. Так как $B_{\text{мах}} > 1-\alpha$, то в соответствии с правилом (29) гипотезу следует отклонить и считать, что ВБР 2-й ТС превышает ВБР 1-й ТС.

Результаты вычислений показали, что на основе распределения Вейбулла можно оценить ВБР ТС по экспериментальным данным о моментах отказов t_i, $i = 1,..., n$, и периодах безотказной работы T_j, $j = 1,..., J$. Однако при значительном числе периодов безотказной работы $J>n$ плотности вероятности оценок параметров распределения Вейбулла имеют длинные хвосты малых, но ненулевых значений ПВ $f(\lambda)$ и $f(s)$, что видно из рис. 8-10. Это может привести к снижению точности оценивания показателей безотказности СТС. Поэтому при проведении вычислений по пп. 2 и 3 максимальные значения оценок λ и s приходится ограничивать множеством, в котором вероятность нахождения параметров распределения не превышает 0,995-0,999.

6. Контроль показателей безотказности технических систем в классе гамма-распределения

6.1. *Оценивание показателей безотказности первой ТС*

Рассмотрим оценивание показателей безотказности 1-й ТС, данные о которой приведены в п. 4. Предполагается, что ВрБР ТС имеет гамма-распределение.

6.1.1. *Построение ПВ оценок параметров распределения ВрБР 1-й ТС*

Для оценивания показателей безотказности ТС используем способы, изложенные в п. 2. Для этого построим ПВ $f(\lambda, s)$ оценок параметров гамма-распределения ВрБР. Такая ПВ строится по зависимостям (5)-(7) с учетом (2) и данных $\{t_i\}$ и $\{T_j\}$. Построенная в системе MathCAD ПВ показана на рис. 11 и 12.

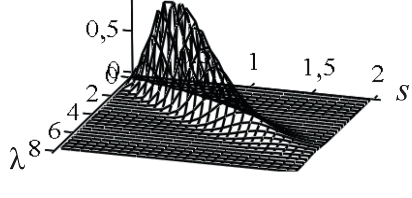

Рис. 11. Общий вид ПВ

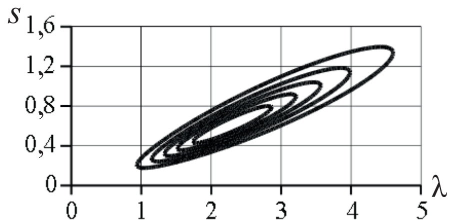

Рис. 12. Карта уровней ПВ

На основе ПВ $f(\lambda, s)$ определяются автономные ПВ оценок параметров гамма-распределения по зависимостям (8), см. рис. 13.

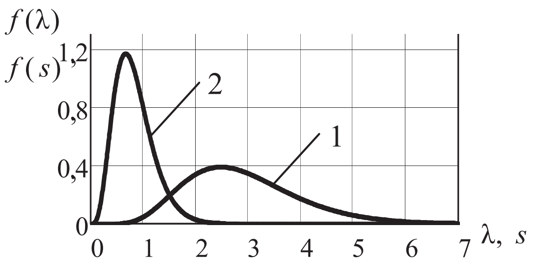

Рис. 13. Автономные ПВ оценок параметров λ (1) и *s* (2)

На основе построенных ПВ вычисляются реализации точечных оценок параметров гамма-распределения и их СКО по зависимостям (9) и (10) $\hat{\Lambda} = 2,93$; $\sigma_{\bar{\Lambda}} = 1,10$; $\hat{\sigma} = 0,83$; $\sigma_{\bar{\sigma}} = 0,37$. Оценка ПВ ВрБР определяется по зависимости (12) и показана на рис. 14.

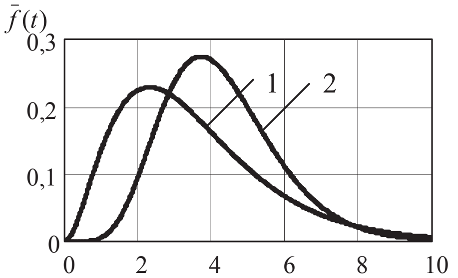

Рис. 14. Оценки ПВ времени безотказной работы первой (1) и второй (2) ТС в классе гамма-распределения

6.1.2. *Оценивание среднего времени безотказной работы 1-й ТС*

Точечная оценка СВБР 1-й ТС и ее СКО вычисляются по зависимостям (16) $\hat{T}_1 = 3,70$; $\sigma_{\bar{T}_1} = 0,76$. Для интервального оценивания СВБР построим ПВ оценок СВБР $f(\tau_1)$ по зависимости (15), см. рис. 15.

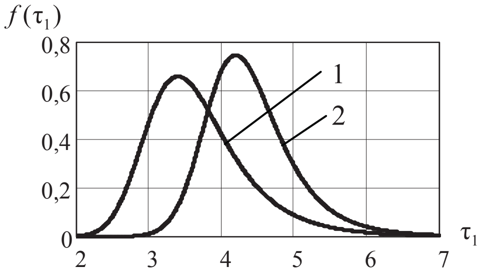

Рис. 15. Плотности вероятности оценок СВБР первой (1) и второй (2) ТС

На основе ПВ $f(\tau_1)$ можно проверить гипотезу о соответствии СВБР заданному требованию $T_{1НТР} = 4$. Для этого определяется вероятность по зависимости (18) B=0,28. При заданном уровне значимости α=0,10 вероятность $B>\alpha$, поэтому в соответствии с правилом (19) следует считать, что СВБР ТС соответствует требованию. Однако при принятии окончательного решения необходимо учитывать, что с большой вероятностью B = 0,72 СВБР может быть ниже требуемого значения.

6.1.3. *Оценивание вероятности безотказной работы 1-й ТС*

Оценка ВБР 1-й ТС в функции от времени работы ТС и ее дисперсия определяются по зависимостям (20) и (21). Реализация оценки переменной ВБР и ее СКО, увеличенное в 3 раза, показаны на рис. 16.

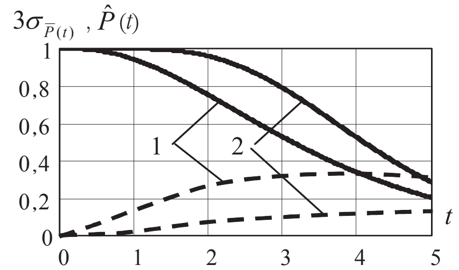

Рис. 16. Реализация оценки зависимости ВБР первой (1) и второй (2) ТС от времени функционирования: —— $-\hat{P}(t)$; ---- $-3\sigma_{\bar{P}(t)}$

ВБР ТС в течение периода целевого использования Р($T_{ЦЗ}$) оценивается по зависимостям (20) и (21) при τ=$T_{ЦЗ}$=2: $\hat{P} = 0,740$; $\sigma_{\bar{P}} = 0,088$. Для интервального оценивания ВБР ТС построим ПВ оценок ВБР. Она строится в классе бета-распределения по зависимостям (23), (24). При $T_{ЦЗ}$=2 получаются параметры бета-распределения β=17,8, η=6,3. ПВ оценок ВБР по зависимости (22) при этих параметрах показана на рис. 17.

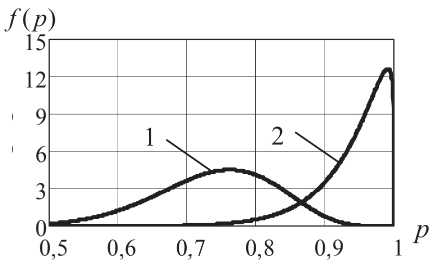

Рис. 17. Плотность вероятности оценок ВБР первой (1) и второй (2) ТС при $T_{ЦЗ}$ = 2

На основе ПВ $f(p)$ можно решить различные задачи. Можно найти оценку нижней доверительной границы для ВБР при заданной доверительной вероятности γ=0,9 по зависимости (25) $\hat{P}_{Н}$ =0,62 При заданном уровне значимости α=0,10 можно проверить гипотезу, что ВБР соответствует требуемой H_0: $P \geq P_{НТР}$ = 0,80. Для этого вычисляется вероятность по зависимости (26), которая равна B = Вер($P \geq P_{НТР}$)= 0,26. Так как $B > \alpha$, то в соответствии с правилом (27) гипотезу следует принять и считать, что ВБР ТС соответствует требованию. Однако при принятии окончательного решения необходимо учитывать, что с большой вероятностью B=0,74 ВБР может быть ниже требуемого значения.

6.2. *Сравнение показателей безотказности двух ТС*

Для сравнения показателей безотказности двух ТС необходимо оценить показатели безотказности каждой ТС по данным наблюдений, приведенным в п. 4. Результаты оценивания для 1-й ТС получены в п. 6.1. Для 2-й ТС вычисления проводятся аналогично.

6.2.1. *Оценивание параметров распределения ВрБР второй ТС*

Плотности вероятности оценок параметров гамма-распределения ВрБР второй ТС строятся по зависимостям (5)-(8) и показаны на рис. 18-20.

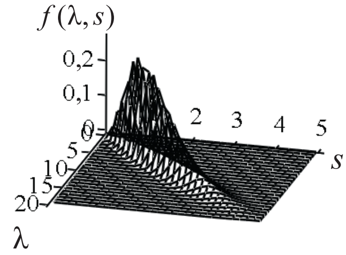

Рис. 18. Общий вид ПВ

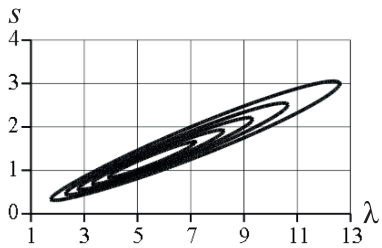

Рис. 19. Карта уровней ПВ

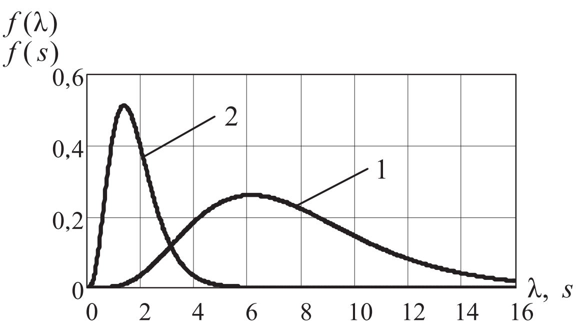

Рис. 20. Автономные ПВ оценок параметров λ (1) и s (2)

На основе построенных ПВ вычисляются реализации точечных оценок параметров гамма-распределения и их СКО по зависимостям (9) и (10) $\hat{\Lambda} = 7,69$; $\sigma_{\bar{\Lambda}} = 3,37$; $\hat{\sigma} = 1,80$; $\sigma_{\bar{\sigma}} = 0,86$. Оценка ПВ ВрБР второй ТС определяется по зависимости (12). Она показана на рис. 14.

6.2.2. *Сравнение среднего времени безотказной работы ТС*

Оценка СВБР второй ТС определяется так же, как и для первой ТС. В результате получается реализация оценки СВБР и ее СКО: $T_1 = 4,41$; $\sigma_{\bar{T}_1} = 0,67$. ПВ оценки СВБР второй ТС при полученных значениях показана на рис. 15.

На основе построенных ПВ можно решить задачи сравнения СВБР двух ТС. Для этого вычисляются вероятности отличия СВБР T_{12} второй ТС от СВБР T_{11} первой ТС по зависимостям (28): B_1 = Вер($T_{12} \geq T_{11}$) = 0,79; B_2=Вер($T_{12} \leq T_{11}$) = 0,21; $B_{\text{мах}}$ = 0,79. На основе этих вероятностей можно проверить различные гипотезы. В частности, проверим гипотезу, что СВБР ТС совпадают H_0: T_{11}=T_{12} при уровне значимости α=0,10. Так как максимальное значение вероятности B_{max} меньше значения 1– α=0,90, то в соответствии с правилом (29) гипотезу следует принять. Однако при обосновании окончательного решения необходимо учесть, что с вероятностью B = 0,79 СВБР ТС могут различаться.

6.2.3. *Сравнение вероятности безотказной работы ТС*

Для сравнения ВБР двух ТС необходимо оценить ВБР ТС по результатам наблюдений, приведенным в п. 4. Оценки ВБР для 1-й ТС получены в п. 6.1.3. Для второй ТС оценивание проводится аналогично.

Оценка ВБР 2-й ТС в функции времени работы и ее дисперсия определяются по зависимостям (20)–(21). Реализация оценки ВБР второй ТС и ее СКО, увеличенное в 3 раза, показаны на рис. 16. Видно, что оценка ВБР 2-й ТС выше и точнее оценки ВБР 1-й ТС. ВБР ТС в течение периода целевого использования $T_{ЦЗ}$ оценивается по зависимостям (20) и (21) при $\tau = T_{ЦЗ}$ = 2: $\hat{P} = 0,94$; $\sigma_{\bar{P}} = 0,053$.

Для сравнения ВБР двух ТС построим ПВ оценок ВБР 2-й ТС при $\tau = T_{ЦЗ}$ = 2. Она строится в классе бета-распределения по зависимостям (23), (24). При этом получаются параметры бета-распределения β=18,0, η=1,15. ПВ оценок ВБР 2-й ТС по зависимости (22) при этих параметрах показана на рис. 17.

На основе построенных ПВ $f(p)$ можно решить различные статистические задачи. Для этого вычисляются вероятности отличия ВБР двух ТС по зависимостям (30): B_1=Вер($P_2 \geq P_1$)=0,975; B_2=Вер($P_2 \leq P_1$)=0,025 и $B_{\text{мах}}$=0,975. Знание этих вероятностей позволяет проверить различные статистические гипотезы. В частности, проверим гипотезу о равенстве ВБР 1-й и 2-й ТС H_0: P_1=P_2 при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}10$. Так как $B_{мах}>1-\alpha$, то в соответствии с правилом (29) гипотезу следует отклонить и считать, что ВБР 2-й ТС превышает ВБР 1-й ТС.

На основе сравнения рис. 4 и 14; 5 и 15; 6 и 16; 7 и 17 видно, что оценки показателей безотказности ТС по ограниченному объему результатов наблюдений в классе распределения Вейбулла и гамма-распределения отличаются незначительно. Как отмечено в конце п. 5, при ограниченном числе зафиксированных отказов СТС ПВ оценок параметров распределения Вейбулла имеет длинные хвосты малых, но ненулевых значений, что может привести к снижению достоверности оценивания показателей безотказности СТС. Поэтому для высоконадежных систем, которые редко отказывают в течение периодов работы $\{T_j\}$, целесообразно оценивать показатели безотказности на основе использования гамма-распределения времени безотказной работы.

Выводы

На основе проведенных исследований получены следующие основные результаты в области оценивания показателей безотказности сложных технических систем (СТС) по экспериментальным данным.

Изложен способ построения плотности вероятности оценок параметров распределения времени безотказной работы СТС в классе распределения Вейбулла или гамма-распределения по результатам наблюдений моментов отказов и периодов безотказной работы СТС (п. 2).

На основе плотности вероятности оценок параметров распределений времени безотказной работы разработаны способы оценивания среднего времени безотказной работы и вероятности безотказной работы СТС, сравнения показателей безотказности СТС по двум сериям наблюдений и проверки статистических гипотез о показателях безотказности СТС (п.3).

Проведена апробация разработанных способов и показано, что они обеспечивают работоспособность и хорошую точность контроля показателей безотказности СТС даже при ограниченном объеме экспериментальных данных (пп. 5 и 6). При этом результаты оценивания показателей безотказности СТС при использовании распределения Вейбулла или гамма-распределения различаются незначительно. Поэтому контроль показателей безотказности СТС может осуществляться на основе любого из этих распределений. Однако для высоконадежных систем показатели безотказности целесообразно оценивать на основе гамма-распределения времени безотказной работы.

Литература

1. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 912 с.

2. Волков Л. И., Лукин В. Л., Сухорученков Б. И. Методы статистического контроля надежности технических систем. – Юбилейный: ЗАО «ПСТМ», 2008. – 332 с.

3. Лукин В. Л., Сухорученков Б. И. Способ оценивания безотказности сложных технических систем по результатам испытаний элементов. //Двойные технологии, 2010. №4(53), С. 10–18.

4. Сухорученков Б. И. Анализ малой выборки. Прикладные статистические методы. М.: Вузовская книга, 2010. – 384 с.

Материал поступил в редакцию 20. 02. 2011 г.