УДК 514

© Голиков В.П.
Golikov V.

МЕХАНИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИСЕКЦИИ УГЛА

DECISION OF PROBLEM TO TRISECTION OF ANGLE BY MECHANICAL MANNER

Аннотация. *Предложен механический способ решения задачи трисекции угла на основе построения трех равных хорд дуги, ограничивающей заданный угол.*

Annotation. *Decision of problem to trisection of angle by mechanical manner, based on three equal chords of arc build, was proposed.*

Ключевые слова. *Трисекция угла, хорда, дуга, циркуль, линейка, механический способ, уравнение кривой.*

Key words. *Trisection of angle, chord, arc, compasses, ruler, mechanical manner, equation of curve.*

Введение

Задача о делении произвольного угла на три равные части является одной из древнейших задач, неразрешимых с помощью циркуля и линейки. Доказательство неразрешимости указанной задачи опирается на определенные постулаты использования линейки и циркуля. Содержательно эти постулаты сводятся к следующему [1]: при помощи линейки проводится графическое изображение прямой через графически заданные точки, а при помощи циркуля описывается из графически заданного центра графическая окружность, имеющая графически заданный радиус. Другие варианты использования циркуля и линейки, позволяющие на практике решить задачу трисекции угла, относят к «механическим» способам деления угла [2]. Одним из древних механических способов деления угла на три равные части является способ Архимеда, основанный на использовании двух отметок на линейке [2, 3]. Известны также другие способы решения указанной задачи: с помощью двух подвижных углов, конического сечения и окружности, кривых типа конхоиды Никомеда и улитки Паскаля [1, 2, 3]. Последние две кривые описываются уравнениями четвертой степени. При этом только улитка Паскаля, изображенная однажды, является универсальной кривой, позволяющей делить на три равные части любой произвольный угол.

Ниже предлагается способ построения универсальной кривой второго порядка, основанной на построении трех равных хорд дуги, ограничивающей произвольный угол и позволяющей разделить его на три равные части.

Существо предлагаемого способа

Пусть задан с помощью двух лучей, исходящих из точки О, некоторый острый угол α (рис. 1). Начертим с помощью циркуля радиусом OA_1 дугу и соединим её концы хордой A_1B_1. Сделав засечки дугами одного и того же радиуса из точек A_1 и B_1, получим точку С, через которую с привлечением точки О проведем биссектрису ОС угла α. Отложив циркулем из точки $Д_1$ отрезки одинаковой длины D_1K_1 и D_1M_1, проведем через точки K_1 и M_1 прямые, параллельные биссектрисе ОС. Для этого вначале проведем вспомогательную дугу с хордой A_2B_2. Отложив на последней циркулем из точки D_2 отрезки D_2K_2 и D_2M_2, равные соответственно D_1K_1 и D_1M_1, проведем через точки K_1 и K_2 и M_1 и M_2 прямые q_1 и q_2, являющиеся параллельными биссектрисе ОС.

Решение задачи трисекции угла далее проведем с использованием «Т» фигуры, абстрактное изображение которой приведено на рис. 2. Инструментальное её построение рассматривается ниже. Указанная на рис. 2 фигура состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых «a» и «b». Причем точка примыкания прямой «b» к прямой «a» делит последнюю пополам. Длина прямой «a», выступающей далее в качестве хорды дуг, в точности равна

Голиков Василий Петрович – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник 4 Центрального НИИ Министерства обороны РФ, тел. (495)543-36-76.

Golikov Vasiliy – doctor of science (Technical), professor, senior researcher of 4th Central Institute of Russian Federation Defence ministry, tel. (495)543-36-76.

длине отрезка K_1M_1 на рис. 1. Длина же прямой «b» зависит от величины угла α и при стремлении его к нулю она асимптотически устремляется к бесконечности.

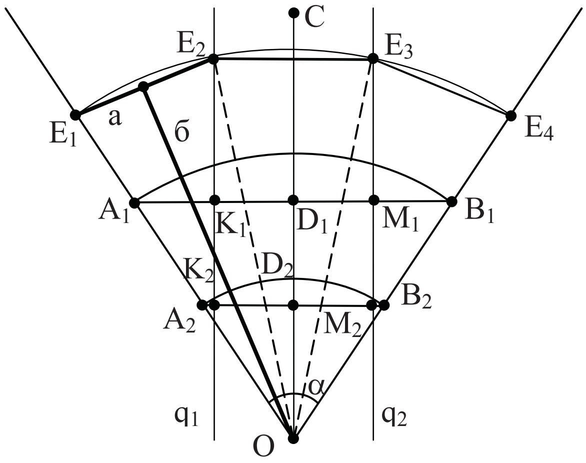

Рис. 1. Пример решения задачи трисекции угла

Для того, чтобы разделить угол α на три равные части, совместим прямую «b» фигуры рис. 2 с вершиной угла O, а края прямой «a» с лучом OA_1 и прямой q_1, как это показано на рис. 1 (точки E_1 и E_2 соответственно). Проведя циркулем дугу E_1E_4 радиусом OE_1, а также хорды E_2E_3 и E_3E_4, которые будут равны хорде E_1E_2 по построению, получим решение задачи трисекции исходного угла α.

Приведем с использованием предложенного выше способа трисекции угла метод построения универсальной кривой, позволяющей делить на три части любой произвольный острый угол, вплоть до угла в 180°.

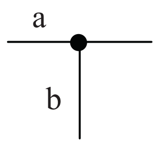

Рис. 2. «Т» фигура, используемая при решении задачи трисекции угла

Пусть задана ось X (рис. 3) с точкой O на ней, которая выступает в роли вершины угла, равного 180°. Построим из точки O ось Y (по типу биссектрисы угла для рис. 1) и проведем, как и раньше, две параллельные и отстоящие на одинаковом расстоянии от оси Y прямые q_1 и q_2.

Сформируем «Т»-образную фигуру (рис. 2) и такую, что линия «a» её в точности равна отрезку A_1B_1 оси X (рис. 3).

Построение указанной кривой «L» начнем с точки E_1 на рис. 3. Для этого, как и выше, линию «b» фигуры «Т» совместим с точной O, а концы линии «a» с прямой q_1 и осью X (рис. 3). Тем самым мы разделили угол в 180° на три равные части концами хорд E_1E_2, E_2E_3 и E_3E_4.

Для дальнейшего построения кривой L оставляем линию «b» фигуры Т, совмещенной с точкой O, а правый конец линии «a» перемещаем вверх по прямой q_1. При этом левый конец линии «a» фигуры «Т» описывает искомую кривую L. Построенная таким образом кривая L совместно с прямыми q_1 и q_2 позволяет разделить любой острый угол на три равные части.

Пусть, например, задан угол α и требуется разделить его на три равные части. Для этого необходимо вершину угла α поместить в точку O и его лучи разметить таким образом, чтобы ось Y служила для этого угла его биссектрисой (рис. 3). Далее удлиняем лучи угла до тех пор, пока левый из них не пересечется с кривой L (точка E'_1 на рис. 3). После этого радиусом OE'_1 с помощью циркуля проводим дугу $E'_1E'_4$ и получаем в точках E'_2 и E'_3 решение задачи трисекции угла α, поскольку хорды $E'_1E'_2$, $E'_2E'_3$ и $E'_3E'_4$ соответствующих дуг общей дуги $E'_1E'_4$ равны между собой по построению.

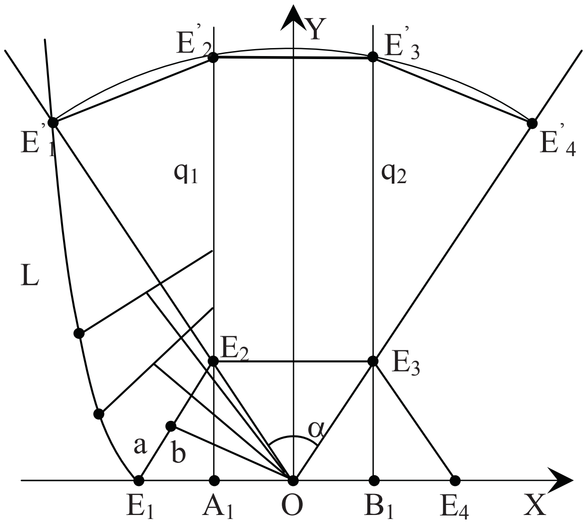

Рис. 3. Метод построения кривой L

Инструментальное воплощение Т фигуры может быть осуществлено с помощью угольника (рис. 4) или двух наложенных друг на друга под прямым углом линеек (полосок) с нанесенными на одной из них метками.

Угольник (рис. 4) может быть выполнен из бумаги или дерева. Линию «a» Т фигуры образует прямая A_1A_2, а линию «b» – прямая B_1B_2. При этом нет необходимости, чтобы точка B_1 лежала на прямой A_1A_2. Достаточно, чтобы проекция точки B_1 на прямую A_1A_2 делила последнюю пополам.

При использовании двух линеек (полосок) достаточно, чтобы все метки, а именно, точки A_1, D, A_2 и B_1 были нанесены на горизонтальной линейке (полоске).

Выведем с использованием рис. 6 формулу для кривой L. На данном рисунке, в отличие от рис. 3, изображена не левая, а правая ветвь указанной кривой.

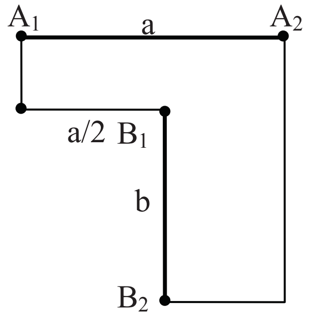

Рис. 4. Угольник для «Т» фигуры

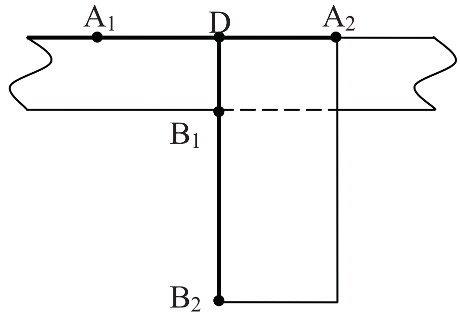

Рис. 5. Две линейки (полоски) для «Т» фигуры

Пусть задан угол α, и его правый луч пересекает кривую L в точке C (рис. 6).

Введем следующие обозначения: OM = FC = x; OF=y; OB = R; OE = H; BC = a; BD = l_1; DC = l_2.

Из треугольника EOC имеем

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 \cdot \qquad (1)$$

В силу равенства треугольников EOC и ABO получим, что

$$H = y + l_1. \qquad (2)$$

Из треугольников BDC имеем

$$l_1 = \sqrt{a^2 - (x - a/2)^2}\ . \qquad (3)$$

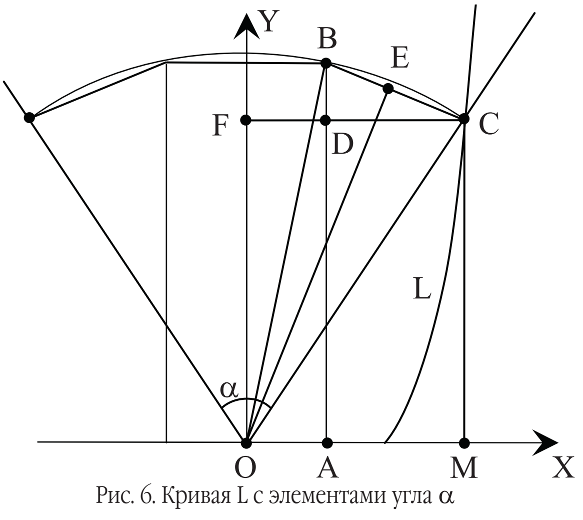

Рис. 6. Кривая L с элементами угла α

Учитывая также, что из треугольника OFC имеет место соотношение

$$R_2 = x_2 + y_2. \qquad (4)$$

получим следующее равенство:

$$x^2 + y^2 = (a/2)^2 + (y + \sqrt{a^2 - (x - a/2)^2}\ )^2. \qquad (5)$$

Проведя преобразование формулы (5), получим окончательное уравнение второй степени для кривой L

$$2y\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - x^2 + ax} - 2x^2 + ax + a^2 = 0\ . \qquad (6)$$

Нетрудно проверить, что при $x = a$, величина y в формуле (6) принимает нулевое значение, а при $x = 3a/2$ значение $y = \infty$.

Заметим, что предложенный выше механический способ трисекции любого острого угла предусматривает использование во всех случаях трех одинаковых по длине хорд, хотя длина общей хорды дуги угла при этом возрастает от величины $2a$ (отрезок E_1E_4 на рис. 3) до величины $3a$ при устремлении значения y к бесконечности. Имеет право на существование постановка задачи о разработке механического способа трисекции произвольного угла на одной общей для всех углов хорде. Более подробно такая постановка задачи поясняется рис. 7.

На рис. 7 прямая AD является общей хордой для трех дуг (углов), центры радиусов которых размещены в точках O_1, O_2 и O_3. Верхняя дуга (полуокружность) делится на три равные части с помощью циркуля хордами AB, BC и CD, равными радиусу O_1A полуокружности. Нижняя дуга делится также на три равные части, но уже хордами меньшей длины EA, EF и FD в точках E и F, которые лежат на двух кривых L, правая из которых проходит че-

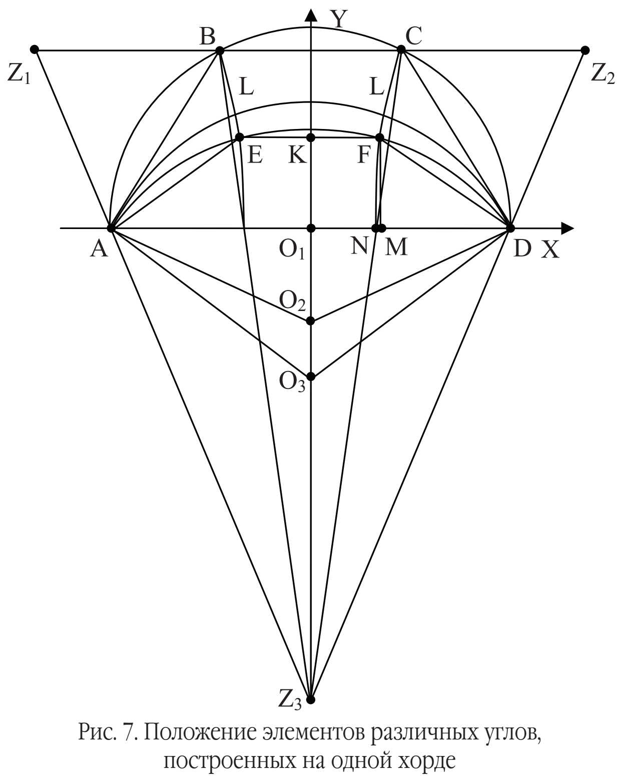

Рис. 7. Положение элементов различных углов, построенных на одной хорде

рез точки C, F и N. При этом точка N отсекает от радиуса O_1D в точности его третью часть. Это следует из самого построения и подобия треугольников $Z_1Z_2Z_3$ (здесь Z_1B=BC=CZ_2) и ADZ_3. Если через «r» обозначить отрезок O_1D, и учесть, что хорда FD = 2KF, то из анализа треугольника FMD следует, что уравнение кривой L, отсекающей от любой дуги, построенной на хорде AD, её третью часть, для рис. 7 имеет следующий вид:

$$y^2 + (r - x)^2 = (2x)^2. \tag{7}$$

Несмотря на простоту формулы (7), механический способ построения непрерывной кривой, задаваемой этой формулой (по типу кривой, изображенной на рис. 3), нам не известен.

Тем не менее любая конечная совокупность точек этой кривой может быть достаточно просто построена с использованием циркуля и линейки.

Пусть правая верхняя четверть рис. 7 представлена точками, как показано на рис. 8. Здесь отрезки $К_1C$= =EC = ED =r/2. Отрезок FD = r/3. Выберем на прямой CD точку M_1 и построим точку M_2, лежащую на кривой L и такую, что отрезок $К_2M_2$ (половина текущей хорды) будет равен отрезку M_1D (также половине текущей хорды). Для этого вначале, пользуясь циркулем, отложим отрезок ED на прямой $К_1C$ ($К_1A_1$) и прямой OD (OA_2) и прямой CD (M_1B) и проведем через точку A_1 и A_2 прямую A_1A_2. Далее раствором циркуля BD (BD = $2M_1D$) из точки D проведем дугу до пересечения её с прямой A_1A_2. Получим, что M_2D = BD. Точка пересечения M_2 как раз и будет удовлетворять поставленным выше условиям и лежать на кривой L ($К_2M_2$ = M_1D по построению).

Таким образом, можно построить любую совокупность точек L, пользуясь точками, лежащими в интервале EF прямой CD.

Отметим, что рассматривается выше задача трисекции угла относилась к углу вплоть до 180°. Если же задан тупой угол, то в нем необходимо отделить угол в 180° и произвести его трисекцию, как это сделано на рис. 7. Оставшийся острый угол необходимо разделить на три равные части, например, способом, приведенным на рис. 2. .После этого для получения окончательного решения необходимо углы в 60° дополнить соответствующим образом долями, полученными от деления острого узла.

Литература

1. Адлер А. Теория геометрических построений, пер. с немецкого, Государственное учебно-методическое издательство наркомпресс РСФСР, Ленинградское отделение, Ленинград, 1940.
2. Мантуров О.В. и др. Толковый словарь математических терминов, «Просвещение», М., 1965.
3. Курант Р., Роббинс Г. «Что такое математика?», пер. с английского, МЦН МО, 2004.

Материал поступил в редакцию 12. 02. 2011 г.