УДК 621.391.2

© Шевченко В.А., Скорик А.Д.
Shevchenko V., Skorik A.

МЕТОД ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ НА БИТ В КАНАЛАХ СВЯЗИ С ГРУППИРОВАНИЕМ ОШИБОК

METHOD OF AN ESTIMATION OF PROBABILITY OF AN ERROR ON BIT IN COMMUNICATION CHANNELS WITH GROUPING OF ERRORS

Аннотация. *Предложен метод оценки вероятности ошибки на бит в каналах связи с группированием ошибок. Продемонстрированы его возможности на примере «когерентных» и «некогерентных» каналов связи с двоичными кодами для случая приема с «мягкими» решениями и наличия информации о состоянии канала.*

Annotation. *The method of an estimation of probability of an error on bit in communication channels with grouping of errors is offered. Its possibilities on an example of "coherent" and "noncoherent" communication channels with binary codes for a case of reception with "soft" decisions and presence of the information on a channel state are shown.*

Ключевые слова. *Помехоустойчивость, пакет ошибок, импульсная помеха, замирания, канал связи, кодирование.*

Key words. *Anti-jamming, package errors, pulse jamming, fading, channel, coding.*

Группирование ошибок в пакеты характерно для каналов связи с кодированием, функционирующих в условиях «медленных» замираний [1], либо воздействия «случайной» импульсной помехи [2].

Получить точные аналитические оценки вероятности ошибки на бит P_b для таких каналов достаточно затруднительно. Известны оценки вероятности ошибки на бит, основанные на использования асимптотически точных верхних аддитивных границ [2], либо улучшенных верхних границ, построенных с использованием методик Галлагера. Анализ показывает, что для построения таких границ необходимо знание вероятностного распределения длин пакетов ошибок.

В работе [1] предложено такое распределение для каналов с медленными замираниями, построенное на основе комбинаторного анализа. Однако нахождение распределения вероятности появления различных комбинаций длин пакетов ошибок основано на последовательном переборе и требует значительных вычислительных затрат.

В данной статье предложен более простой метод вычисления верхних границ вероятности ошибки на бит, основанный на использовании однородных полиномов Белла.

Рассмотрим канал связи, в котором для передачи информации используется двоичный блочный (n,k) код со скоростью $r = k/n$ и минимальным расстоянием $d_{\min}$.

Для сверточных кодов аналогом длины кода может рассматриваться глубина декодирования как производная от длины кодового ограничения [2].

Дистанционные свойства кода охарактеризуем коэффициентами $A_{w;\,d}$, которые представляют собой количество кодовых комбинаций весом d, порожденных входными информационными последовательностями весом w.

Будем считать, что при «когерентном» приеме символы кода передаются противоположными сигналами, при «некогерентном» – ортогональными.

Введем понятие «пакет ошибок», под которым будет понимать совокупность символов одной кодовой комбинации, которые могут быть подвержены замиранием примерно одного уровня либо воздействию отдельного импульса помехи.

Шевченко Вячеслав Анатольевич – кандидат технических наук, начальник отдела военно-научного комитета Вооруженных сил Российской Федерации, тел. +7(495)-519-98-02;
Скорик Александр Дмитриевичг – научный сотрудник 4 Центрального научно-исследовательского института Министерства обороны Российской Федерации, тел. +7(495)-519-98-02.
Shevchenko Vyacheslav – the candidate of the technical sciences, chief of division of military-scientific committee of Military forces of the Russian Federation, tel. +7(495)-519 98 02;
Skorik Alexander – the scientific employee, 4 Central scientific research institute of Ministry of defense of Russian Federation, tel. +7(495)-519-98-02/

На интервале передачи одной кодовой комбинации возможно разместить $L = \lfloor n/b \rfloor$ пакетов длиной b.

Кроме L пакетов длиной b необходимо также рассматривать пакет длиной Δb, дополняющий эти пакеты до величины n, так что

$$n = \Delta b + bL. \qquad (1)$$

Очевидно, что i-й символ кодовой комбинации принадлежит пакету с номером $j = \lceil i/b \rceil$. (2)

Количество символов ν, которыми в пакете переданная последовательность отличается от ошибочно принятой, определяет его вес.

Пакеты, в которых нет «отличающихся» символов, назовем «нулевыми», остальные – «ненулевыми».

Обозначим число пакетов с весом ν через f_ν, число «ненулевых» пакетов – через l.

Ограничим максимальное число «ненулевых» пакетов величиной

$$F = \min(d, L), \qquad (3)$$

минимальное – величиной $\lceil d/b \rceil$.

Максимальный вес пакета m определим следующим образом:

$$m = \begin{cases} b, & b \le d; \\ d - l + 1, & b > d. \end{cases} \qquad (4)$$

С учетом соотношений (3) и (4) распределение числа пакетов различного веса $f = (f_0, f_1, ..., f_m)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$F = \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu = f_0 + l, \qquad (5)$$

$$d = \sum_{\nu=1}^{m} \nu f_\nu. \qquad (6)$$

Пусть распределение d «отличающихся» символов кода по l «ненулевым» пакетам соответствует конкретному образцу f. Вероятность возникновения этого распределения обозначим через $p(f, l)$, его вес – следующим образом:

$$D(d, l, f) = \prod_{\nu=1}^{m} D^{f_\nu}(\nu). \qquad (7)$$

Вычисление вероятности ошибки на бит, как правило, предполагает оценку общего веса $B(d)$ всех возможных комбинаций распределения d «отличающихся» символов по «ненулевым» пакетам различного количества.

По определению

$$B(d) = \frac{1}{C_{Fb}^{d}} \sum_{l=\lceil d/b \rceil}^{F} C_F^l B(d, l), \qquad (8)$$

где

$$B(d, l) = \sum_f p(f, l) D(d, l, f). \qquad (9)$$

В выражении (9) учитывается, что количество комбинаций l «ненулевых» пакетов соответствует величине C_F^l, а количество возможных комбинаций распределения «ненулевых» пакетов различного веса – $C_{bF}^{\,l}$.

Перечисление в выражении (9) ведется по всем таким наборам f неотрицательных чисел, что удовлетворяют условиям (5) и (6).

С учетом соотношения (7)

$$B(d, l) = \sum_f p(f, l) \prod_{\nu=1}^{m} D^{f_\nu}(\nu). \qquad (10)$$

Вес $B(d, l)$ найдем методом производящих функций. В разложении такой функции по степеням фиктивного параметра t величину веса $B(d, l)$ определяет множитель при параметре t с показателем степени, равным d.

При наличии ограничения (6) и учете того, что вероятность появления пакета с весом ν пропорциональна величине $C_b^{\,\nu}$, производящая функция примет следующий вид:

$$f_l(t) = \frac{1}{C_{Fb}^{d}} \left(\sum_{\nu=1}^{m} C_b^i D(\nu) t^\nu \right)^l. \qquad (11)$$

Для разложения функции $f_l(t)$ воспользуемся следующим соотношением [3]:

$$\frac{1}{l!} \left(\sum_{i=1} g_i \frac{t^i}{i!} \right)^l = \sum_{j=1} A(j, l; g) \frac{t^j}{j!}, \qquad (12)$$

где $g = (g_1, g_2, ..., g_{d-l+1})$ – формальные переменные; $A(j, l; g)$ – однородный полином Белла.

Полагая

$$g_\nu = \begin{cases} \nu! D(\nu) C_b^\nu = D(\nu) \dfrac{b!}{(b-\nu)!}, & \nu \le b; \\ 0, & \nu > b, \end{cases} \qquad (13)$$

из сопоставления соотношений (11) и (12) получим

$$B(d, l) = \frac{l!}{d! C_{Fb}^{d}} A(d, l; g). \qquad (14)$$

Полиномы $A(j, l; g)$ с учетом того, что $A(1,1; g) = g_1$, удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению [4]:

$$A(d, l; g) = \begin{cases} g_d, & l = 1; \\ \sum_{i=1}^{d-l+1} C_{d-1}^{i-1} g_i(s) A(d-i, l-1; g), & l > 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Выражение (8) после постановки в него выражения (14) и выполнения некоторых математических преобразований примет следующий вид:

$$B(d) = \frac{(bF-d)! F!}{(bF)!} \sum_{l=\lceil d/b \rceil}^{F} \frac{A(d, l; g)}{(F-l)!}. \qquad (16)$$

Продемонстрируем полученные результаты на примере некоторых типов каналов связи.

При «когерентном» приеме улучшенная верхняя граница вероятности ошибки на бит в канале со случайной импульсной помехой имеет следующий вид [5]:

$$P_b \le \sum_{d=d_{\min}}^{n} \min_{\beta}\left(1-\beta+\beta\left(M\left(\rho^l\right)A_d\right)^{-2/n}\right)^{-n/2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\beta dn}{n-(1-\beta)d}\frac{E_b}{N_J}r\rho\right), \qquad (17)$$

где E_b – энергия, приходящаяся на бит информации;

N_j – спектральная плотность помехи;

ρ – вероятность появления отдельного импульса помехи;

β - параметр, подлежащий оптимизации численными методами;

$$A_d = \sum_{w=1}^{k}\frac{w}{k}A_{w,d}.$$

$M(\rho^l)$ – вероятность поражения помехой d «отличающихся» символов кода, усредненная по возможному числу «ненулевых» пакетов l.

Для канала с «некогерентным» приемом улучшенная верхняя граница определяется следующим образом [6]:

$$P_b \le \sum_{d=d_{\min}}^{d}\sum_{d=d_{\min}}^{n}\min_{\alpha,\beta}\left(1-\beta+\beta\left(\frac{\left(1-\alpha^2\right)^d}{A_d M\left(\rho^l\right)}\right)^{1/2n}\right)^{-2n} \times$$

$$\exp\left(-n\frac{\eta\beta}{1-\eta(1-\beta)}\frac{E_b}{N_J}r\rho\right), \qquad (18)$$

где α, β – параметры, подлежащие оптимизации численными методами;

$\eta = \alpha d/\left((1+\alpha)n\right)$.

Для случая, когда $b \le d$ величина $M(\rho^l)$ может быть определена с использованием следующего соотношения [5]:

$$M\left(\rho^l\right) = \sum_{i=\lceil d/b\rceil}^{F} C_F^i \rho^i \left(1-\rho\right)^{F-i} \times$$

$$\times\prod_{j=1}^{d}\frac{ib-d+j}{Fb-d+j}. \qquad (19)$$

Покажем, что предложенный метод позволяет оценить $M(\rho^l)$ для любых соотношений величин b и d.

На основании равенства (5)

$$\rho^l = \prod_{v=1}^{m}\rho^{f_v}. \qquad (20)$$

Сопоставив выражения (20) и (7), увидим, что

$$D(v) = \rho. \qquad (21)$$

Тогда

$$M\left(\rho^l\right) = B(d)$$

при условии, что переменные g определяются выражением (13) с учетом соотношения (21).

Для каналов связи с кодированием в условиях медленных замираний также характерно появление ошибок, группирующихся в пакеты, в пределах которых уровень ослабления и начальная фаза сигнала остаются примерно неизменными [1].

Величину ослабления сигнала в пределах передачи j-го пакета определим неотрицательным коэффициентом a_j, который является случайной величиной и подчиняется распределению Райса

$$f\left(a_j\right) = 2a_j\left(1+K\right)\exp\left(-K-a_j^2\left(1+K\right)\right)\times$$

$$\times I_0\left(2a_j\sqrt{K(1+K)}\right), \qquad (22)$$

где K – отношение регулярной составляющей сигнала к диффузионной;

$I_0\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp\left(x\cos\theta\right)d\theta$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В пределах передачи кодовой комбинации уровень замираний можно отразить в виде последовательности $a = \left(a_1, a_2, ..., a_{L+1}\right)$.

Для оценки вероятности ошибки на бит может быть применена известная верхняя аддитивная граница

$$P_b \le \sum_{d=d_{\min}}^{n} A_d P_d\left(x \to \hat{x}\right), \qquad (23)$$

где $P_d\left(x \to \hat{x}\right)$ – вероятность трансформации переданной кодовой последовательности в последовательность $\hat{x} = \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\right)$, отличающуюся от переданной d символами кода.

При «когерентном приеме» и наличии информации о состоянии канала вероятность ошибочного приема кодовой комбинации определяется следующим выражением [1]:

$$P_d\left(x \to \hat{x}\middle| a, f, l\right) = Q\left(\sqrt{\gamma_s\sum_{v=1}^{m}v\sum_{j=1}^{f_v}a_j^2}\right), \qquad (24)$$

где

$$Q\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\exp\left(-t^2/2\right)dt;$$

$\gamma_s = \sqrt{2\frac{E_b}{N_0}r}$, N_0 - спектральная плотность шума.

Применяя форму Крэйга для Q-функции

$$Q\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\theta}\right)d\theta \qquad (25)$$

и усредняя правую часть по величинам a_j, распределение которых определяется выражением (2), получаем

$$p_d\left(x \to \hat{x}\middle| f, l\right) = \frac{1}{\pi}M\left[\int_0^{\pi/2}\exp\left(-\gamma_s\sum_{v=1}^{w}v\sum_{i=1}^{f_v}a_i^2\right)d\theta\right]. \qquad (26)$$

Введем обозначения

$$\tau\left(\theta, v\right) = v\gamma_s/\sin^2\theta \qquad (27)$$

и

$$D(\nu,\theta)=\int_0^\infty \exp\left(-\tau(\nu,\theta)a_j^2\right)p\left(a_j\right)da_j. \qquad (28)$$

Подставив выражение (22) в выражение (28), представим последнее в следующем виде:

$$D(\nu,\theta)=2(1+K)\exp(-K)\times$$
$$\times\int_0^\infty x\exp\left(-x^2\left(1+K+m(\theta,\nu)\right)\right)I_0\left(2x\sqrt{K(1+K)}\right)dx \qquad (29)$$

Перейдя в выражении (29) к новым переменным $e=1+K+\tau(\nu,\theta)$, $b=2\sqrt{K(1+K)}$ и воспользовавшись табличным интегралом

$$\int_0^\infty x\exp(-ex^2)I_0(bx)dx=\frac{1}{2e}\exp\left(\frac{b^2}{4e}\right),$$

получим с учетом обозначения (27)

$$D(\nu,\theta)=\frac{1+K}{1+K+\nu\gamma_s/\sin^2\theta}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{K\nu\gamma_s/\sin^2\theta}{1+K+\nu\gamma_s/\sin^2\theta}\right). \qquad (30)$$

Тогда выражение (26) можно представить в следующем виде:

$$p_d\left(x\to\hat{x}\middle|f,l\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\prod_{\nu=1}^{w}D(\nu,\theta)^{f_\nu}\,d\theta. \qquad (31)$$

Усредняя правую часть выражения (31) по возможным наборам f, отвечающим соотношениям (5) и (6), получаем

$$P_d\left(x\to\hat{x}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}B(d,\theta)d\theta, \qquad (32)$$

где $B(d,\theta)$ – определяется выражением (16) с учетом того, что для расчета переменных g используется соотношение (29).

С учетом выражений (32) и (16) верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит (17) примет следующий вид:

$$P_b\le\sum_{d=d_{\min}}^{n}A_d\frac{(bF-d)!F!}{(bF)!}\times$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\sum_{l=\lceil d/b\rceil}^{F}\frac{A(d,l;g)}{(F-l)!}\right]d\theta, \qquad (33)$$

где $A(d,l;g)$ – определяется из рекуррентной формулы (15), а переменные g – из соотношения (13) с учетом того, что переменная $D(\nu,\theta)$, как отмечалось выше, определяется из соотношения (29).

Таким образом, предложен метод оценки вероятности ошибки на бит в каналах связи с группированием ошибок, основанный на использовании однородных полиномов Белла. Продемонстрированы его возможности на примере «когерентных» и «некогерентных» каналов связи с двоичными кодами для случая приема с «мягкими» решениями как в условиях воздействия случайной импульсной помехи, так и медленных замираний.

Литература

1. *Zummo SA, Stark W. E. A union bound on the error probability of binary codes over block-fading channels.//IEEE Transactions on Communication., vol. 54, pp. 2085-2093, Nov. 2005.*
2. *Simon M.K., Omura J.K., Scholtz RA., Levitt B.K. Spread Spectrum Communications, vol.I-III, Rockville, MD: Computer Science, Marylend, 1985.*
3. *Риордан Дж. Комбинаторные тождества: Пер. с англ. – М.: Издательство «Наука», 1982.-255с.*
4. *Кузьмин О.В. Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов.//Дискретная математика, 1994- том 6, вып. 3, С39-49.*
5. *Шевченко ВА.. Улучшенная верхняя граница вероятности ошибки для двоичных кодов в каналах связи со случайной импульсной помехой, вызывающей группирование ошибок.// Двойные технологии, 2010. № 1, С. 69-74.*
6. *Шевченко ВА.. Улучшенная верхняя граница вероятности ошибки для двоичных кодов в некогерентных каналах связи со случайной импульсной помехой.// Двойные технологии, 2010. № 2.*

Материал поступил в редакцию 30. 05. 2010 г.