УДК 621.398

© Бордюков М.М., Галактионов В.С., Знак В.А., Знак Н.Е., Казаков Г.В., Сидоров А.В.
Bordiukov M.M., Galaktionov V.S., Znak V.A., Znak N.E., Kazakov G.V., Sidorov A.V.

ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ КОНЕЧНОГО ФАЗОВОГО СОСТОЯНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ

GUARANTEED ESTIMATION OF CONTROLLED SYSTEM FINAL PHASE STATE ON TARGET SET OF ATTAINABILITY

Аннотация. *Основываясь на свойствах множеств достижимости, определены необходимые и достаточные условия гарантированного оценивания конечного фазового состояния управляемых систем для решения задач прогнозирования возможных фазовых состояний системы в фиксированные моменты времени. Получены условия для аппроксимации искомых множеств достижимости выпуклыми многоугольниками. Дано математическое обоснование оценок принадлежности вектора конечного фазового состояния системы заданному множеству. Это обеспечивает проверку приемлемости получаемых решений задач достижимости с учетом требований политической, стратегической и экономической их целесообразности.*

Annotation. *Necessary and sufficient conditions for controlled system final phase state guaranteed estimation is determined based on properties of attainability sets for problem solution of prediction possible system phase state on fixed points of time. Required sets of attainability approximation conditions by convex polyhedrons are obtained. System final phase state vector belongs to required set estimation is mathematically grounded. This provides acceptability verification of attainability problems obtained solutions taking into account principles of political, strategical and economical expediency.*

Ключевые слова. *Множества достижимости, управляемая система, вектор фазового состояния системы, траектория управляемой системы, решение задачи Коши, аппроксимация множеств достижимости.*

*,**Key words.** Set of attainability, controlled system, system phase state vector, controlled system trajectory, Cauchy problem, attainability set approximation.*

В теории управляемых систем нередко рассматриваются задачи, связанные с определением или оцениванием множества возможных фазовых состояний системы в различные моменты времени. Такие множества, называемые множествами достижимости [1,4,7], играют важную роль при решении задач управления, наблюдения, прогнозирования и поиска. Так, точное или приближенное знание множеств достижимости управляемой системы позволяет оценить предельные возможности системы управления, выбрать оптимальное или квазиоптимальное управление, а также провести гарантированное оценивание (фильтрацию) возможных фазовых состояний системы при выполнении заданных на нее ограничений.

Из всего комплекса задач, являющихся приложениями теории множеств достижимости, в первую очередь, нас будет интересовать решение задачи гарантированного оценивания конечного фазового состояния системы относительно заданного множества достижимости. Решение этой задачи не предусматривает выбора оптимального управления системой на основе общепринятых критериев эффективности, а допускает, что такое

Бордюков Михаил Михайлович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ, тел. 543-36-76;
Галактионов Владимир Сергеевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ;
Знак Валерий Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ; тел. 8-916-718-72-93;
Знак Наталия Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, заместитель начальника отдела ГУ-ВШЭ, г. Москва;
Казаков Геннадий Викторович – кандидат технических наук, доцент, начальник отдела 4 ЦНИИ МО РФ;
Сидоров Алексей Викторович – начальник лаборатории 4 ЦНИИ МО РФ.

Bordiukov Michael Michaelovich - candidate of technical science, senior researcher, leading researcher 4 CSRI MD RF, tel. 543-36-76;
Galaktionov Vladimir Sergeevich – doctor of technical science, professor, leading researcher 4 CSRI MD RF;
Znak Valeriy Aleksandrovich - candidate of technical science, senior researcher 4 CSRI MD RF, tel. 8-916-718-72-93;
Znak Natalia Evgenievna - candidate of physical-mathematical science, deputy head of department GU-VSE, Moscow;
Kazakov Genadiy Viktorovich - candidate of technical science, head of department 4 CSRI MD RF;
Sidorov Aleksey Viktorovich - head of laboratory 4 CSRI MD RF.

управление существует. Необходимо найти решение по гарантированному оцениванию нахождения точки, соответствующей фазовому состоянию управляемой системы в конечный момент времени, в заданном множестве достижимости. Такая задача может возникнуть на этапе предварительного прогноза в задачах планирования, когда необходима оценка полученных решений, исходя из принципов политической, стратегической или экономической их целесообразности.

Пусть рассматриваемая система описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$d\boldsymbol{R}/dt = f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U}, t), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{R} = \{r_1, r_2,..., r_i,..., r_n\}$ – n-мерный вектор фазовых координат состояния системы ($r_i \in \boldsymbol{R}$);

$\boldsymbol{U} = \{u_1, u_2,..., u_j,..., u_m\}$ – m-мерный вектор управляющих функций (вектор управления);

t – текущее время;

$f(L_k)$ – значения заданной функции от аргументов L_k.

Зададим ограничения на вектор управления $\boldsymbol{U}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{U}(t) \in U[\boldsymbol{R}(t), t]\,, \qquad (2)$$

где $U[\boldsymbol{R}(t), t]$ – заданное замкнутое множество в m-мерном пространстве управлений, которое зависит от времени t и от фазового вектора $\boldsymbol{R}(t)$.

Управляемой системе (1) с ограничениями (2) можно сопоставить управление в виде дифференциальных зависимостей

$$d\boldsymbol{R}/dt \in R(\boldsymbol{R}, t). \qquad (3)$$

Выражение (3) носит название «дифференциальное включение» [3,5], где $R(\boldsymbol{R}, t)$ – множество всевозможных значений правой части системы (1) с управлениями, удовлетворяющими ограничениям (2), т.е.

$$R(\boldsymbol{R}, t) = f\{\, \boldsymbol{R}, U[\, \boldsymbol{R}(t), t\,], t\,\}. \qquad (4)$$

Необходимо иметь в виду, что описание управляемой системы с использованием дифференциального включения (3) имеет существенное отличие от описания ее в виде уравнений (1) и ограничений (2), так как в выражении (4) не содержится в явном виде управление $\boldsymbol{U}$. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что одному и тому же описанию системы в виде (3) в некоторой области $R(\boldsymbol{R}, t)$ отвечает бесчисленное множество различных систем, описываемых уравнениями вида (1), для которых функция f и множества U таковы, что выполняется равенство (4). Таким образом, анализируя выражения (1) и (4), описывающие управляемые системы, можно сделать вывод о том, что если необходимо исследовать все множество возможных траекторий рассматриваемой системы, то удобнее и экономнее в этих случаях пользоваться описанием (4). В случаях же необходимости выбора оптимального управлении или анализа и оценки возможностей управления целесообразно воспользоваться исходным описанием (1) с ограничениями (2). Для решения поставленной задачи воспользуемся описанием системы в виде (4).

Пусть управляемая система описывается зависимостью (4), а ограничения (2) заданы при $t \geq t_0$, где t_0 – начальный момент времени. При этом в начальный момент времени $t=t_0$ система удовлетворяет начальным условиям вида

$$\boldsymbol{R}\,(t_0) \in A, \qquad (5)$$

где A – заданное замкнутое множество в n-мерном пространстве состояний, определяющее совокупность возможных начальных состояний системы. Следует иметь в виду, что множество A может быть и точкой

$$A = \{\boldsymbol{R_0}\},$$

где $\boldsymbol{R_0}$ – заданный n-мерный начальный фазовый вектор. В этом случае фиксированное начальное состояние фазового вектора может быть задано в следующем виде:

$$R(t_0) = r_0\,. \qquad (6)$$

Рассмотрим решение задачи гарантированного оценивания достижимости возможных фазовых состояний системы (задача прогноза или поиска), в частности оценивания принадлежности конечного положения вектора фазового состояния системы заданному множеству достижимости.

Формализуем постановку задачи.

Для заданной управляемой системы, отвечающей зависимостям (4), с заданными ограничениями (2) и начальными условиями (5) определить такое множество конечных фазовых состояний системы, которое соответствовало бы заданному множеству достижимости $B = B(t_0, r_0, A)$. При этом под множеством достижимости B управляемой системы (1) будем понимать совокупность концов $\boldsymbol{R}(t)$ всех траекторий $R[\boldsymbol{R}(t),t]$ этой системы, начинающихся в момент $t = t_0$ из точек начального множества A.

Для наглядности изобразим начальное множество состояний A в момент времени $t = t_0$ и множество достижимости $B(t, t_0, A)$ в момент времени t для двумерного фазового вектора $\boldsymbol{R}(t)$ при (n=2) (рис. 1).

Из рис. 1 видно, что совокупность концов возможных траекторий в момент t образует множество достижимости $B_1(t, t_0, r_0)$, отвечающему начальному множеству A в виде одной точки $A = \{r_0\}$.

Необходимо определить условия, при которых можно было бы считать, что множество $B(t, t_0, A)$ является объединением всех множеств вида $B_1(t, t_0, r_0)$ при $r_0 \in A$, т. е. все концы возможных траекторий состояния системы принадлежат множеству достижимости $B(t, t_0, A)$. Это

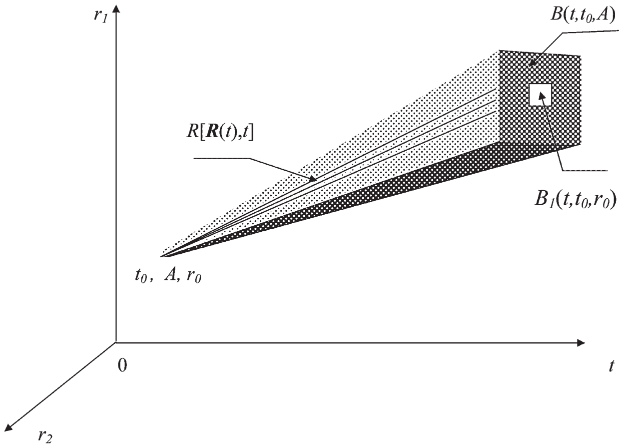

Рис.1. Иллюстрация начального состояния управляемой системы и множеств достижимости для двумерного случая

решение может быть найдено, если известна траектория управляемой системы для всех $t > t_0$, задана область множества достижимости, характеризующая результат поиска, и проведена оценка принадлежности концов траекторий заданному множеству достижимости.

В общем случае, задаваясь вектором управления $\boldsymbol{U}(t)$ и начальным вектором состояния $\boldsymbol{R_0}$, можно решить задачу Коши

$$d\boldsymbol{R}/dt = f\,[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{U}(t), t] \text{ при } \boldsymbol{R}(t_0) = r_0. \qquad (7)$$

Таким образом, будет определена траектория $R[\boldsymbol{R}(t),t]$ при $t \geq t_0$.

С целью оценки принадлежности концов траектории заданной области достижимости необходимо осуществить проверку возможности приведения управляемой системы в некоторый фиксированный момент $T>t_0$ в заданное фазовое состояние $\boldsymbol{R^k}$. Для этого достаточно осуществить проверку принадлежности вектора $\boldsymbol{R^k}$ множеству $B(T, t_0, A)$, т.е. оценить, имеет ли место включение $\boldsymbol{R^k} \in B(T, t_0, A)$. Так как совокупность концов всех возможных траекторий управления на фиксированный момент $T = t_k$ (где $t_k > t_0$) образует множество достижимости $B_1(t_k, t_0, r_0)$, то поставленная задача разрешима только в том случае, если множества $B_1(t_k, t_0, r_0)$ и $B(t_k, t_0, A)$ имеют общую точку или, применяя математическую терминологию, если их пересечение не пусто, т.е.

$$B_1(t_k, t_0, r_0) \cap B(t_k, t_0, A) \neq \varnothing. \qquad (8)$$

В выражении (8) символ $\varnothing$ означает пустое множество.

Так как множество $B_1(t_k, t_0, r_0)$ определяется исходным состоянием управляемой системой, т.е. можно считать, что управляемая система обеспечивает достижение заданного фазового состояния $\boldsymbol{R^k}$, следовательно, достаточно определить условия описания требуемого множества достижимости $B(t_k, t_0, A)$ и осуществить оценку гарантированного нахождения вектора $\boldsymbol{R^k}$ во множестве B. Если же рассматривать задачу оценивания прогнозирования фазового состояния системы в заданный фиксированный момент $T = t_k$, то в качестве множества достижимости мы будем иметь сечения множеств (B) плоскостями или поверхностями, определяемыми условиями окончания процесса. Такие сечения будем называть требуемыми или прогнозируемыми областями достижимости (B^*). Например, при расчете траектории движения в прямоугольной системе координат $oXYZ$, прогнозируемая область достижимости B^* получается путем сечения множества достижимости B плоскостью, параллельной плоскости oXZ, т.е. плоскостью $y = H_{зад}$. Если расчеты осуществляются относительно эллипсоида или сферы в геоцентрической системе координат $o\xi\eta\zeta$, то искомая область достижимости получатся путем пересечения исходного множества достижимости B с поверхностью эллипсоида или сферы при $r(t_k) = R_{сф}$.

Из теории управляемых систем известно, что множества достижимости представляют собой выпуклые геометрические фигуры в виде многогранников, эллипсоидов и т. д. [1,7], следовательно, будет справедливо, если представляемые для нас интерес области достижимости аппроксимировать выпуклыми многоугольниками или эллипсами. При этом вполне очевидно, что некоторая точка $M_1 = \{r_k\}$, определяемая положением конечного вектора фазового состояния системы $\boldsymbol{R^k}$ в фиксированный момент $T = t_k$ и принадлежащая множеству достижимости B, по определению одновременно будет принадлежать и искомой области достижимости B^*. То есть имеет место условие

$$B^*(t_k, t_0, r_0) \cap B^*(t_k, t_0, A) \neq \varnothing. \qquad (9)$$

Таким образом, для известной области достижимости, с точки зрения ее математического определения, поставленная задача могла быть уже решена. Однако искомые множества достижимости, как и их сечения в виде областей достижимости, требуют своего построения или задания.

С целью получения приемлемого решения воспользуемся методом, основанным на свойствах выпуклых фигур. Основное из этих свойств формулируется следующим образом. "Существует, по крайней мере, одна точка плоскости (пространства), принадлежащая всем полуплоскостям (полупространствам), ограниченным данной системой неравенств. Множество всех точек может быть полуплоскостью (полупространством), ограниченной многоугольником (многогранником), прямой или ее отрезком и, наконец, одной точкой. Совокупность точек, удовлетворяющих системе неравенств, есть выпуклое тело " [2].

Таким образом, если представить требуемую область достижимости в виде выпуклого многоугольника, то, задавая его вершины в выбранной системе координат, можно определить семейство неравенств вида:

а) для прямоугольной системы координат oBL

$$A_{ij}B + B_{ij}L \le C_{ij}\,; \qquad (10)$$

б) для геоцентрической системы координат $o\xi\eta\zeta$

$$A_{ij}\,\xi + B_{ij}\eta + C_{ij}\zeta \le 0, \qquad (11)$$

где $i = 1,2, \dots ,n$ – номера семейств областей достижимости, аппроксимирумых выпуклыми многоугольниками;

$j = 1,2, \dots ,m$ – номера вершин многоугольника из i-го семейства ($m \ge 3$).

Коэффициенты A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} могут определяться с использованием таблиц координат вершин выпуклых многоугольников в принятой системе отсчета.

Результатом решения задачи Коши в виде (7) является расчет траектории управляемой системы и получение точки $M\{t_k\}$, принадлежащей множеству достижимости B с фазовыми параметрами вектора конечного состояния системы $\boldsymbol{R}^k = (r_1, r_2, \dots, r_k)$. После представления полученных фазовых координат точки M в принятой системе отсчета проверяется выполнение системы неравенств (10) или (11). Если системы неравенств (10) или (11) выполняются для всех $j = 1,2, \dots ,m$, то точка M находится внутри заданной области достижимости B^*, что и требовалось определить. Если хотя бы одно из неравенств не выполняется, тогда точка M заданной области достижимости не принадлежит.

Рассмотрим частный случай, когда требуется осуществить предварительную приближенную оценку принадлежности вектора конечного фазового состояния системы заданному множеству достижимости. С этой целью множество достижимости может аппроксимироваться областью, образованной сечением полученного множества достижимости ортогональными опорными гиперплоскостями [2,4,5], проведенными через вершины заданной области достижимости, отвечающим минимаксным отношениям (т.е. через вершины, у которых изменяемые параметры имеют максимальное или минимальное значения). В частном случае для выпуклых многоугольников число таких вершин не будет превышать значения, равного четырем, а предварительная область достижимости может аппроксимироваться прямоугольником либо кругом (в исключительных случаях прямой линией или точкой).

Пусть область достижимости задана в виде выпуклого многоугольника с числом сторон $j = 1,2, \dots ,m$. При этом вершины многоугольника B_{ij} задаются в плоской прямоугольной системе координат oXZ (где X_{ij} могут являться значениями геодезической широты B_{ij}-х вершин многоугольника, а Z_{ij} – соответственно значениями геодезической долготы этих вершин, i – номер области достижимости в заданном семействе областей). Данный пример иллюстрируется рис. 2 для числа сторон многоугольника $j = 5$.

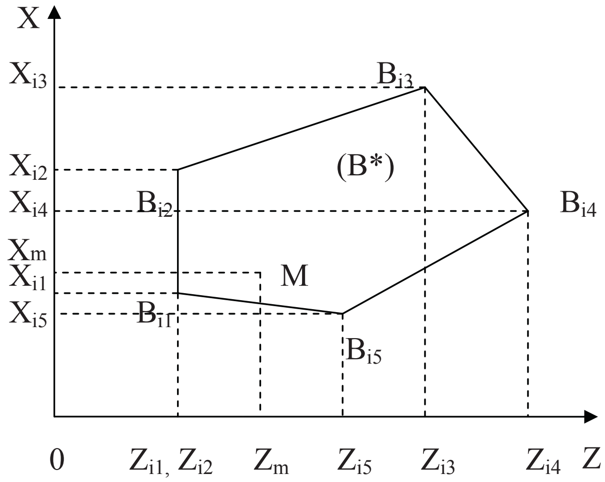

Рис. 2. Пример задания области достижимости в плоской прямоугольной системе координат

Отобразим предварительную область достижимости в виде описанного прямоугольника относительно заданного выпуклого множества (выпуклого многоугольника с числом сторон j). В этом случае достаточно иметь граничные значения соответствующих координат многоугольника, т.е. необходимо определить

$$Z_{i\,min} = \min_j \{Z_{ij}\}; \qquad (12)$$

$$Z_{i\,max} = \max_j \{Z_{ij}\}; \qquad (13)$$

$$X_{i\,min} = \min_j \{X_{ij}\}; \qquad (14)$$

$$X_{i\,max} = \max_j \{X_{ij}\}. \qquad (15)$$

Затем осуществляется проверка условий:

$$X_{i\,min} \le X_{i\,m} \le X_{i\,max}; \qquad (16)$$

$$Z_{i\,min} \le Z_{i\,m} \le Z_{i\,max}\,. \qquad (17)$$

В силу выпуклости многоугольников, если условия (16) и (17) выполняются, то точка M принадлежит области, аппроксимируемой заданным многоугольником.

Аналогично может быть решена задача оценки принадлежности конечной точки траектории области достижимости, аппроксимируемой выпуклыми многоугольниками на сфере, вершины которых задаются в геоцентрической (Гринвичской) системе координат $o\xi\eta\zeta$ с началом ее в центре Земли. При этом стороны многоугольников представляют собой геодезические линии, что дает возможность осуществлять оценивание принадлежности точки M заданной области достижимости как с использованием системы неравенств (11), так и путем задания вершин многоугольника и положения точки М через значения сферических азимутов и дальностей ($A_{сфij}$ и $S_{сфij}$). Определяя на сфере значения $A_{сфij}$ и $S_{сфij}$ всех ij-х вершин заданных выпуклых многоугольников, аппроксимирующих требуемую область достижимости, а также, определив по результатам решения задачи Коши положение точки M через значения $A_{сфm}$ и $S_{сфm}$, можно получить соответствующие значения $A_{сфi\ max(min)}$, $S_{сфi\ max(min)}$ по методике (12)–(15), заменяя варьируемые параметры прямоугольной системы координат на соответствующие значения сферического азимута и дальности, после чего проверяется выполнение условий (16) и (17).

Предлагаемый метод достаточно прост для практического применения, однако заблаговременный расчет и хранение табулированых значений параметров вершин многоугольников в функции от $A_{сф}$ и $S_{сф}$ достаточно трудоемко, сложно и не эффективно из-за слишком большого объема табличной информации, так как в этом случае каждой паре значений $A_{сфij}$ и $S_{сфij}$ для j-й вершины многоугольника ($j = 1, 2, ... ,m$) должна быть поставлена в соответствие i-я (i =1, 2, ... , n) конкретная точка начала решения задачи Коши (расчет опорной траектории движения управляемой системы). Заранее привязывать конкретные начальные точки расчета опорных траекторий к i-м областям достижимости нецелесообразно по многим причинам, в том числе и по отмеченным выше. Поэтому данный подход может быть использован как частный случай для выборочного оценивания прогнозирования попадания в заданную область достижимости или дополнительного контроля результатов ранее проведенных плановых оценок.

Таким образом, с целью гарантированного оценивания возможного фазового состояния управляемой системы определены необходимые условия принадлежности конечного положения фазового вектора, определяемого решением задачи Коши, заданному множеству достижимости. Показано, что в интересах решения определенного класса задач (задачи предварительного прогноза и планирования, дополнительного контроля ранее полученных решений, в задачах спутниковой навигации и т. д.) множества достижимости могут аппроксимироваться областями в виде выпуклых многоугольников. Основываясь на свойствах выпуклых фигур, обоснованы математические зависимости для получения гарантированной оценки для прогнозирования попадания в заданную область достижимости.

Литература

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: «Наука», 1966. – 442 с.

2. Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. – М.: «Наука», 1966. – 370 с.

3. Бутковский А.Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. – М.: «Наука», 1988. – 268 с.

4. Бушенков В.А., Лотов А.В. Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1982. – 84с.

5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсов. – М.: «Наука», 1988. – 320с.

6. Ли Э.Б., Маркус Л. И. Основы теории оптимального управления/ Пер. с англ. – М.: «Наука», 1989. – 228 с.

7. Абраменко С. Н., Балин Е. А., Сейсов Ю. Б. Оценки множеств достижимости управляемых систем / Изд. АН ТССР // Сер. Физ-техн., хим. и геолог. наук. – 1980. – № 4. –76 с.

Материал поступил в редакцию 30. 07. 2009 г.