УДК 621.396

© Самус М.В., Фомин Л.А., Скоробогатов С.А.
Samus M.V., Fomin L.A., Skorobogatov S.A.

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ КОРРЕЛЯЦИИ ДОЛГОВРЕМЕННО ЗАВИСИМОГО ТРАФИКА

ESTIMATION OF TIME OF CORRELATIONS LONG-RANGE DEPENDENCE TRAFFIC

Аннотация. *Получено аналитическое выражение для определения нормированной автокорреляционной функции, позволяющее производить оценку времени корреляции, которое используется для прогнозирования самоподобных процессов.*

Annotation. *Analytical expression is received for determination normalized autocorrelation function, allowing to produce the estimation of correlation time, which is used for the forecasting self-similar processes.*

Ключевые слова. *Самоподобный процесс; долговременная зависимость; автокорреляционная функция; время корреляции; прогнозирование.*
,***Key words.*** *Self-similar processes; long-range dependence; autocorrelation function; time of correlations; forecasting.*

1. Введение

Управление ресурсами в широкополосных сетях интегрального обслуживания осуществляется на всех этапах функционирования сети. Эффективность управления зависит от качества контроля параметров трафика, осуществляемого в фазе передачи информации, причем контролю подвергаются все виртуальные соединения, проходящие через интерфейс «пользователь–сеть». По результатам измерений производятся целенаправленные преобразования трафика с целью согласования его параметров с возможностями сети и потребностями пользователей.

2. Состояние вопроса

Последние исследования локального и глобального трафика показали изменчивость трафика в широком диапазоне масштабов времени, получившего название самоподобность, оказывающую сильное влияние на производительность сети.

Для количественной оценки и качественного описания пульсирующей структуры (изменчивости) стохастических самоподобных (фрактальных) процессов достаточно использовать статистические характеристики второго порядка. Корреляционная функция при этом играет важную роль, являясь основным критерием, относительно которого определяется масштабная инвариантность самоподобных процессов, а время корреляции определяет длительность прогноза. Существование корреляции на расстоянии называется долговременной зависимостью.

3. Постановка задачи

Целью данной статьи является нахождение нормированной функции автокорреляции (коэффициента корреляции) распределения с заведомо «тяжелыми хвостами» для оценки величины времени корреляции в зависимости от различных значений β для осуществления

Самус Михаил Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Ставропольского государственного университета, тел. 8-962-741-84-76;
Фомин Лев Андреевич – кандидат технических наук, доцент, профессор Ставропольского военного института связи Ракетных войск, тел. (8-8652) 77-02-86;
Скоробогатов Сергей Александрович – преподаватель Ставропольского военного института связи Ракетных войск, тел. 8-905-490-11-32.

Samus Mihail Vladimirovich – the candidate of the technical sciences, the assistant professor of the applied math-ematic and informatics sub department of the Stavropol State University. tel.: 8-962-741-84-76;
Fomin Lev Andreevich - the candidate of the technical sciences, the assistant professor, the professor of the Stavropol Military Institute of Communication of Missile Troops, tel. (8-8652) 77-02-86;
Skorobogatov Sergey Aleksandrovich - the teacher of the Stavropol Military Institute of Communication of Missile Troops. tel. 8-905-490-11-32.

прогноза.

Наиболее характерным распределением с «тяжелыми хвостами», имеющим тесную связь с долговременной зависимостью, является распределение Вейбулла [1]:

плотность распределения

$$g(\tau) = \lambda\beta\tau^{\beta-1}e^{-\lambda\tau^{\beta}}; \tag{1}$$

функция распределения

$$G(\tau) = \int_0^{\infty} \lambda\beta\tau^{\beta-1}e^{-\lambda\tau^{\beta}} = 1 - e^{-\lambda\tau^{\beta}}, \tag{2}$$

где τ – интервал времени между пакетами, который является случайной величиной и полностью описывает статистику пакетного трафика в случае, когда длина пакета фиксирована (например, ячейки АТМ). Это распределение широко применяется при моделировании сетевого трафика. При β =1 оно переходит в экспоненциальное распределение с интенсивностью λ. Выделим произвольный участок времени длиной τ на временной оси. Вероятность того, что за время τ этой части участок окажется пустым (не произойдет ни одного события), будет равна [2]:

$$P(T \ge t) = P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau^{\beta}}. \tag{3}$$

Разложим функцию $e^{-\lambda\tau^{\beta}}$ в ряд Тейлора.

$$P_0^{-1}(\tau) = e^{\lambda\tau^{\beta}} = 1 + \frac{\lambda\tau^{\beta}}{1!} + \frac{\lambda^2\tau^{2\beta}}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!} + \ldots \tag{4}$$

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно n событий

$$P_n(\tau) = e^{\lambda\tau^{\beta}} = \frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!}e^{-\lambda\tau^{\beta}}. \tag{5}$$

При этом выполняется условие нормирования

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!}e^{-\lambda\tau^{\beta}} = e^{\lambda\tau^{\beta}} \cdot e^{-\lambda\tau^{\beta}} = 1.$$

4. Решение задачи

Найдем нормированную функцию автокорреляции дискретного случайного стационарного процесса $x(t)$, изображенного на рис. 1.

Функция $x(t)$ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов постоянной амплитуды (высотой 1) и случайной длительности τ_0.

Распределение опрокидываний, принимаемых независимыми, подчиняются закону

$$P_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!} \cdot e^{-\lambda\tau^{\beta}}.$$

где λ – интенсивность процесса 1/с;

$P_n(\tau)$ – вероятность того, что за время τ произойдет n опрокидываний.

Известно, что априорные вероятности состояний ноль и единица равны

$$P(1) = P(0) = 0{,}5. \tag{6}$$

Корреляционные функции представляют собой совокупность корреляционных моментов двух случайных величин x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2, причем оба момента рассматриваются в любом сочетании всех возможных значений аргумента t случайного процесса.

При достаточно большом числе m реализаций корреляционная функция приближенно может быть найдена как среднее значение полученных по данным реализациям произведений вида [3]

$$[x_i(t_1) \cdot x_j(t_2)]; \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,m}),$$

то есть

$$B(t_1t_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i(t_1) \cdot x_j(t_2) \cdot P(x_ix_j).$$

Для оценки статистической связи между значениями случайной величины в различные моменты времени вводят понятие корреляции стационарного эргодического случайного процесса, определяя функцию автокорреляций следующим выражением

$$B(\tau) = \overline{x_tx_{t+\tau}} = \sum_{\tau} x_tx_{t+\tau} \cdot P(x_t, x_{t+\tau}). \tag{7}$$

Суммирование необходимо вести по всевозможным состояниям. В процессе на рис. 1 таких состояний четыре (см. таблицу).

Таблица состояний

№ п/п	x_t	$x_{t+\tau}$
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Так как при подставке значений x_t и $x_{t+\tau}$ соответствующим первым трем состояниям, произведения, стоящие под знаком суммы, равны нулю, автокорреляционная функция определяется одним членом

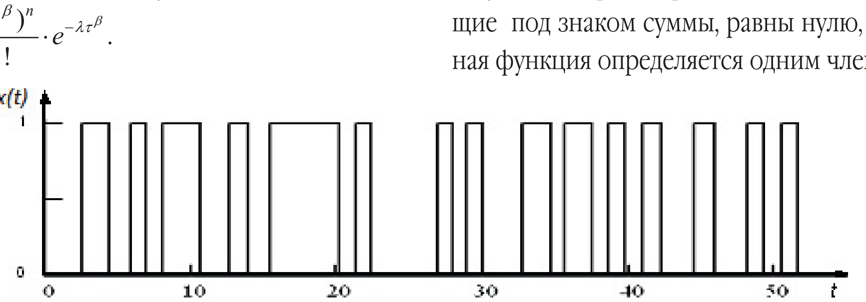

Рис. 1. Реализация случайного процесса

$$\overline{x_t x_{t+\tau}} = P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1) \cdot 1 \cdot 1.$$

Найдем вероятность $P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1)$.

Она равна произведению вероятности того, что в момент t имеет место событие x_t =1, на вероятность того, что за время τ произойдет четное число опрокидываний, так как только при этом условии x_t =1 и $x_{t+\tau}$ =1.

Учитывая соотношения (5) и (6), получаем

$$P(x_t = 1,\ x_{t+\tau} = 1) =$$

$$= P_1 \sum_{\text{по четным}} P_n(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\text{по четным}} \frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!} e^{-\lambda\tau^{\beta}} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\lambda/\tau^{\beta}/} \cdot \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda\tau^{\beta})^n}{n!} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\lambda/\tau^{\beta}/} \left(e^{\lambda/\tau^{\beta}/} + e^{-\lambda/\tau^{\beta}/} \right) = 0,25\left(1 + e^{-2\lambda/\tau^{\beta}/}\right). \qquad (8)$$

Выражение в квадратных скобках вместе с множителем 1/2 представляет собой сумму четных чисел временного ряда $x(t)$.

Выражение АКФ таким образом принимает вид

$$\overline{x_t x_{t+\tau}} = 0,25\left(1 + e^{-2\lambda/\tau^{\beta}/}\right). \qquad (9)$$

Для нахождения нормированной автокорреляционной функции (коэффициента корреляции) определено среднее значение и дисперсия процесса

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{2} x_i p(x_i) = 1 \cdot P(1) + 0 \cdot P(0) = 0,5.$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{2} (x_i - \overline{x})^2 \cdot p(x_i) = (1 - 0,5)^2 \cdot 0,5 +$$

$$+(0 - 0,5)^2 \cdot 0,5 = 0,25.$$

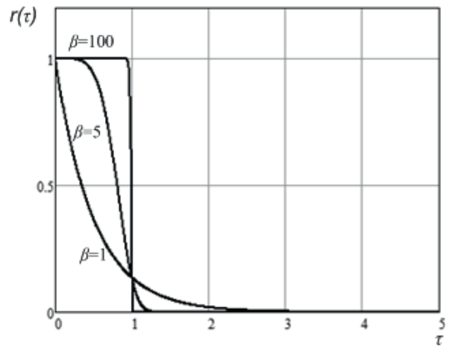

Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции дискретного случайного стационарного процесса $x(t)$ от β

Найдем

$$r(\tau) = \frac{B(\tau) - (\overline{x})^2}{\sigma^2} = \frac{0,25(1 - e^{-\lambda/\tau^{\beta}/} - 1)^2}{0,25} = e^{-2\lambda/\tau^{\beta}/}.$$

Время корреляции определяется из равенства

$$\tau^k = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda/\tau^{\beta}/} d\tau.$$

Анализ формулы показывает, что длительность прогноза растет с увеличением β, причем при λ = 2 1/с и β = 1 время корреляции $\tau_к$ = 0,25 с., при β = 2 время корреляции $\tau_к$ = 0,443 с., при $\beta \to \infty$ время корреляции $\tau_к \approx$ 1 с.

Таким образом, расчеты показывают, что для самоподобных процессов, характеризуемых законом Вейбулла, длительность прогноза увеличивается с ростом показателя β в пределе до четырех раз, что делает результаты анализа более предсказуемыми и увеличивает время прогноза.

Литература

1. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. Монография./ Под ред. О.И. Шелухина. – М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для студ. вузов – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 576 с.

3. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехике. – М.: Связь, 1969. – 447 с.

Материал поступил в редакцию 30. 07. 2009 г.