УДК 621.314(075.8)

© Катаржин А.В., Сова А.Н., Драгун Д.К., Першин С.М., Агафонов К.В.
Katarjin A., Sova A., Dragun D., Pershin S., Agafonov K.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОВМЕЩЕННОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ СИСТЕМЫ ГАРАНТИРОВАННОГО ПИТАНИЯ

MATHEMATICAL MODEL OF A COMBINATION OF ELECTRICAL MACHINERY POWER SYSTEM

Аннотация. *В статье представлена математическая модель совмещенной электрической машины системы гарантированного питания. Разработанная математическая модель позволяет оценивать основные функции совмещенной электрической машины системы гарантированного питания на основе общей теории электрических машин.*

Annotation.*The article presents a mathematical model of combined electrical machine power system. Developed a mathematical model to evaluate the basic functions of a combined electrical machine power system based on the general theory of electrical machines.*

Ключевые слова. *Математическая модель, совмещенная электрическая машина, система гарантированного питания.*

Key words. *Mathematical model, combined electrical machine, uninterruptible power system.*

Основными функциями совмещенной электрической машины системы гарантированного питания (СЭМ СГП) являются: 1) преобразование электроэнергии сети в механическую энергию вала при постоянной частоте вращения; 2) преобразование электроэнергии источника постоянного тока в постоянное магнитное поле обмотки возбуждения; 3) преобразование механической энергии вала в электрическую энергию трехфазного переменного тока с постоянным напряжением и стабильной частотой.

Катаржин Александр Владимирович – доктор технических наук, профессор кафедры «Транспортные установки», МАДИ;
Сова Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Транспортные установки», МАДИ;
Драгун Дмитрий Константинович – доктор технических наук, профессор, главный специалист филиала Федерального государственного унитарного предприятия «Центр эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры» - «Конструкторское бюро «Мотор»;
Першин Сергей Михайлович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник ФБУ«4 ЦНИИ Минобороны России», тел. 7(495)543-36-76;
Агафонов Кирилл Владимирович – аспирант, кафедра «Транспортные установки», МАДИ.

Katarjin Alexander – doctor of technical sciences, the professor of «Transport installations», MADI;
Sova Alexander – doctor of technical sciences, the professor, managing chair «Transport installations», MADI;
Dragun Dmitry – Doctor of Technical Sciences, the professor, the chief specialist of branch of the Federal state unitary enterprise «the Center of operation of objects of a land space infrastructure"-"Design office" Motor";
Pershin Sergey – candidate of technical sciences, senior researcher, senior researcher, FBI "4 Central scientific research institute of the Ministry of defense of Russia"
Agafonov Kirill – post-graduate student, department of "Transport settings", MADI.

Как показали исследования, указанные функции можно анализировать на основе общей теории электрических машин, так как для двигателя и генератора выполняются условия совмещения. Здесь под условиями совмещения считаются: отсутствие взаимно-индуктивных связей между разнополюсными обмотками; отсутствие вибрационных сил и возможность рассматривать каждую машину в отдельности, устанавливая затем связь между машинами.

Математическую модель СЭМ СГП составим на основе теории электромагнитных цепей с переменной взаимной индуктивностью, основанной на уравнениях Лагранжа-Максвелла [1].

Для дальнейших рассуждений принимаем следующие допущения: 1) распределение магнитных полей двигателя генератора в воздушном зазоре СЭМ синусоидальное; 2) магнитные цепи машины не насыщены и потери в стали отсутствуют; 3) все параметры машин, кроме взаимных индуктивностей между статором и ротором, постоянные; 4) взаимные индуктивности статор-ротор пропорциональны косинусам углов между осями соответствующих обмоток; 5) воздушный зазор равномерный и фазы обмоток симметричные.

Учитывая перечисленные допущения, запишем дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами на основе законов Кирхгофа для обмоток СЭМ, схема которой показана на рисунке.

Для двигательной части СЭМ (обмотки А и В)

$$\begin{cases} L_{A1}\dfrac{dl_{A1}}{dt}+\sum\limits_{k=2}^{3}L_{AK}\dfrac{dl_{AK}}{dt}+l_A r_A+\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}L_{ABj}\,i_{Bj}\right)=u_{A1}; \\ L_{B1}\dfrac{dl_{B1}}{dt}+\sum\limits_{j=2}^{m}L_{Bj}\dfrac{dl_{Bj}}{dt}+l_B r_B+\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_{k=1}^{3}L_{BAk}\,i_{Ak}\right)=0. \end{cases} \quad (1)$$

Для генераторной части (обмотки C и D)

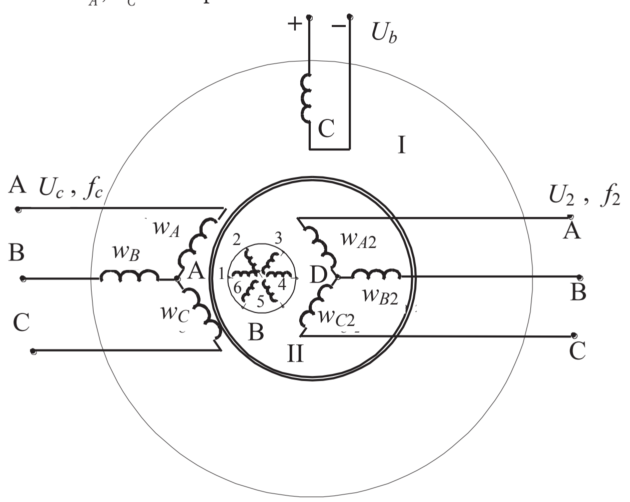
$$\begin{cases} L_c\dfrac{dl_c}{dt}+l_c r_c+\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}L_{c\partial j}\,i_{\partial i}\right)=u_c; \\ \left(L_{\partial 1}+L_H\right)\dfrac{di_{\partial 1}}{dt}+\sum\limits_{j=2}^{3}L_{\partial 1}\dfrac{di_{\partial j}}{dt}+l_\partial\left(r_\partial+r_H\right)+ \\ +\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_{k=1}L_{\partial lk}\,i_{ck}\right)=0, \end{cases} \quad (2)$$

где l_A, r_B, L_{A1}, L_{Ak} – соответственно, ток, активное сопротивление фазы, собственная индуктивность фазы и взаимная индуктивность между фазами обмотки А (для обмоток В, С и D они имеют соответствующий индекс обмотки; индекс k показывает номер фазы обмоток статора, а j – ротора);

L_{AB}, L_{BA}, L_{cd}, L_{dc} – взаимные индуктивности между обмотками статора и ротора СЭМ;

r_x, $x_и = \omega_2 L_и$ – активное и индуктивное сопротивление нагрузки;

u_A, u_C – напряжения обмоток А и С.



Схемы обмоток совмещенной электрической машины (обмотки А, В, С и D)

Для всех трех токов фаз трехфазной обмотки А статора можно записать уравнения, аналогичные первому уравнения системы (1), а для всех токов фаз m-фазной обмотки В ротора – уравнения, аналогичные второму уравнению системы (1).

В конечном итоге получается система m+3 уравнений вида (1), из которых определяются по заданному напряжению U_1 статорные и роторные токи в зависимости от частоты вращения ротора.

Аналогично может быть составлена система дифференциальных уравнений для генераторной части СЭМ по уравнениям системы (2).

При установившемся симметричном режиме работы СЭМ токи статора I и ротора II образуют симметричные системы, поэтому на основе теории симметричного режима можно ограничиться только двумя уравнениями: для фазы А статора I и ротора II.

Собственные индуктивности фазы и взаимные индуктивности между фазами можно записать следующим образом:

- для обмотки А (l_{Ak}, к=1...3)

$L_{A1}=l_A\cos\theta+l_{Ap}$; $l_{A2}=l_A\cos2\pi/3$; $l_{A3}=l_A\cos4\pi/3$;

- для обмотки В (L_{Bj}, j= 1...m, где m – число фаз)

$L_{B1}=l_B\cos\theta+l_{Bp}$; $l_{B2}=l_B\cos2\pi/3$; $l_{B3}=l_B\cos4\pi/m$;

$l_{Bm}=l_B\cos(m-1)2\pi/m$;

- для обмотки С

$l_{C1}=l_C\cos\theta+L_{Cp}$;

- для обмотки D (l_{Dj}, j = 1...3)

$L_{D1}=L_D\cos\theta+l_{Dp}$; $l_{D2}=l_D\cos2\pi/3$; $l_{D3}=l_D\cos4\pi/3$,

где L_A, L_B, L_C, L_D – индуктивности фаз обмоток;

L_{Ap}, L_{Bp}, L_{Cp}, L_{Dp} – индуктивности рассеяния фаз обмоток.

Взаимные индуктивности между фазами обмоток статора и ротора можно записать в виде

• для фазы обмотки А относительно В

$L_{AB1}=M_{AB}\cos(\omega_s t+\gamma_1)$; $L_{AB2}=M_{AB}\cos(\omega_s t+\gamma_1-2\pi/m)$; ... ;

$L_{AB1m}=M_{AB}\cos[\omega_s t+\gamma_1-(m-1)2\pi/m]$;

• для фазы обмотки В относительно А

$L_{BA1}=M_{BA}\cos(\omega_2 t+\gamma_1)$; $L_{BA2}=M_{BA}\cos(\omega_2 t+\gamma_1-2\pi/3)$;

$L_{BA3}=M_{BA}\cos(\omega_2 t+\gamma_1-4\pi/3)$;

• для фазы обмотки С относительно D

$L_{DC1}=M_{DC}\cos(\omega_3 t+\gamma_2)$; $L_{DC2}=M_{DC}\cos(\omega_3 t+\gamma_2-2\pi/3)$;

$L_{DC3}=M_{DC}\cos(\omega_3 t+\gamma_2-4\pi/3)$;

• для фазы обмотки D относительно С

$L_{DC1}=M_{DC}\cos(\omega_3 t+\gamma_2)$,

где $\omega_s=\omega_1-\omega_2$ – частота вращения обмотки В;

$\omega_1=2\pi f_1$ – угловая частота вращения поля обмотки А;

$\omega_2=s_1\omega_1$ – угловая частота вращения поля обмотки В;

$\omega_3=\left[1+\dfrac{P_2}{P_1}(1-s_1)\right]\omega_1$ – частота вращения обмотки D;

s_1 – скольжение двигателя;

γ_1, γ_2 – начальные углы поворота обмоток В и D относительно обмоток А и С;

$M_{AB}=M_{BA}$; $M_{CD}=M_{DC}$ – максимальные значения взаимных индуктивностей статор-ротор между осями соответствующих обмоток.

В системах (1) и (2) получены линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, которые появляются вследствие изменения взаимного расположения обмоток статора и ротора.

Для установившегося симметричного режима решение системы (1) примет вид

$$\begin{cases} i_{A1}=I_{Am}\sin\left(\omega_1 t+\alpha_1\right); \\ i_{A2}=I_{Am}\sin\left(\omega_1 t+\alpha_1-2\pi/3\right); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ i_{Am}=I_{Am}\sin\left(\omega_1 t+\alpha_1-4\pi/3\right); \\ i_{B1}=I_{Bm}\sin\left(\omega_2 t+\alpha_2\right); \\ i_{B2}=I_{Bm}\sin\left(\omega_2 t+\alpha_2-2\pi/m\right); \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ i_{Bm}=I_{Bm}\sin\left[\omega_2 t+\alpha_{21}+(m-1)2\pi/m\right], \end{cases} \quad (3)$$

где I_{Am}, I_{Bm} – амплитудные значения токов обмоток А и В;

α_1, α_2 – начальные фазы токов обмоток А и В.

Подставим соответствующие выражения для токов, индуктивностей и взаимных индуктивностей фаз обмоток А и В, а также взаимных индуктивностей между обмотками А и В в (1), при этом для дальнейших преобразований выпишем предварительно следующие тригонометрические соотношения, справедливые для всех значений $m\geq 3$

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\left[\dfrac{2\pi}{m}\right]\left[\dfrac{2\pi}{m}\right]=\dfrac{m}{2}\sin\left(x-y\right); \\ \sin x\sin y+\left[\dfrac{2\pi}{m}\right]\left[\pm\dfrac{2\pi}{m}\right]=\pm\dfrac{m}{2}\cos\left(x\mp y\right); \\ \sin x\cos y+\left[\dfrac{2\pi}{m}\right]\left[-\dfrac{2\pi}{m}\right]=\dfrac{m}{2}\sin\left(x+y\right); \\ \cos x\cos y+\left[\dfrac{2\pi}{m}\right]\left[\pm\dfrac{2\pi}{m}\right]=\dfrac{m}{2}\cos\left(x\mp y\right). \end{cases} \quad (4)$$

Левые части соотношений (4) представляют собой сумму из m слагаемых, где каждое последующее слагаемое получается из предыдущего путем изменения фаз x и y на $2\pi/m$ в соответствии со знаками, указанными в квадратных скобках.

Обозначая $L_{AA}=\dfrac{3}{2}L_A+L_{Ap}$; $L_{BB}=\dfrac{m}{2}L_B+L_{Bp}$; $M_A=\dfrac{m}{2}M_{AB}=\dfrac{3}{2}M_{BA}$; $X_A=\omega_1 L_{AA}$; $X_B=\omega_2 L_{BB}$ и подставляя токи обмоток А и В, получаем

$$x_A I'_A\cos\omega_1 t-x_2 I''_A\sin\omega_1 t+r_A I'_A\sin\omega_1 t+r_2 I''_A\cos\omega_1 t+ \\ +\omega_1 M_A I'_B\cos\omega_1 t-\omega_1 M_A I''_B\sin\omega_1 t=U_{Am}\sin\omega t; \quad (5)$$

$$x_B I'_B\cos\omega_2 t-x_B I''_B\sin\omega_2 t+r_B I'_B\sin\omega_2 t+ \\ +r_B I''_B\cos\omega_2 t+\omega_2 M_A I'_A\cos\omega_{21} t-\omega_2 M_A I''_A\sin\omega_2 t=0. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) можно преобразовать с помощью метода гармонического баланса, приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левых и правых частях, в результате чего получаем

$$\begin{cases} r_A I'_A-x_A I''_A+0-\omega_1 M_A I''_B=U_{Am}; \\ x_A I'_A+r_A I''_A+\omega_1 M_A I'_B+0=0; \\ 0-\omega_2 M_A I''_A+r_B I'_B-x_B I''_B=0; \\ \omega_2 M_A I'_A+0+x_B I'_B+r_B I''_B=0. \end{cases} \quad (7)$$

Амплитудные значения токов фаз обмоток А и В равны

$$\begin{cases} I_{Am}=\sqrt{I'^2_A+I''^2_A}=\sqrt{A_1^2+Д_1^2}\,\dfrac{U_{Am}}{\Delta_1^2}=\dfrac{z_B}{\Delta_1}U_{Am}; \\ I_{Bm}=\sqrt{I'^2_B+I''^2_B}=\sqrt{B_1^2+C_1^2}\,\omega_2 M_A\dfrac{U_{Am}}{\Delta_1^2}=\dfrac{\omega_2 M_A}{\Delta_1}U_{Am}, \end{cases} \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\begin{cases} A_1=r_A z_B^2+\omega_1\omega_2 r_B M_A^2; \\ Д_1=x_A z_B^2-\omega_1\omega_2 x_B M_A^2; \\ B_1=r_A x_B+r_B x_A; \\ C_1=r_A r_B-x_A x_B+\omega_1\omega_2 M_A^2; \\ z_A^2=r_A^2+x_A^2;\ z_B^2=r_B^2+x_B^2; \\ B_1^2+C_1^2=\Delta_1^2;\ A_1^2+Д_1^2=\Delta_1^2 z_B^2. \end{cases}$$

Входной коэффициент мощности

$$\cos\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi_1}} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + Д_1^2}} = \frac{A_1}{\Delta_1 z_B}. \qquad (9)$$

Потребляемая из сети активная мощность двигателя равна

$$P_A = 3U_A\, I_A \cos\phi_1 = \frac{3}{2} U_{Am}\, I_{Am} \frac{A_1}{\Delta_1 z_B} = \frac{3}{2}\frac{A_1}{\Delta_1^2} U_{Am}^2. \qquad (10)$$

Потери в меди обмоток А и В

$$P_{MAB} = 3r_A\, I_A^2 + m\, r_B\, I_B^2 = \frac{1}{2}\left(3r_A\, z_B^2 + m\, r_B\, \omega_2^2\, M_A^2\right)\frac{U_{Am}^2}{\Delta_1^2}. \qquad (11)$$

Электромагнитный момент двигателя

$$M_{ЭМА} = \frac{P_{ЭМА}}{\omega_{мех}} = \frac{3}{2} P_1 \frac{\omega_2\, M_A^2}{\Delta_1^2} r_B\, U_{Am}^2. \qquad (12)$$

Литература

1. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. М.: ВШ, 2001. 307 с.

Материал поступил в редакцию 19. 02. 2014 г.