

УДК 621.391.2

© Шевченко В.А., Скорик А.Д.  
Shevchenko V., Skorik A.ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВОИЧНЫХ КОДОВ В КАНАЛАХ СВЯЗИ  
С РАЙСОВСКИМИ БЛОЧНЫМИ ЗАМИРАНИЯМИPERFORMANCE OF BINARY CODES IN COMMUNICATION  
CHANNELS WITH RICIAN BLOCK-FADING CHANNELS

**Аннотация.** Предложена верхняя граница вероятности ошибки на бит для каналов связи с райсовскими блочными замираниями. Проведены оценки характеристик некоторых сверточных кодов для данного типа замираний.

**Annotation.** The upper bound on the bit error probability for Rician block-fading channels is offered. Estimations of characteristics of some convolutional codes for the given type fading are spent.

**Ключевые слова.** Помехоустойчивость, пакет ошибок, замирания, канал связи, кодирование.

**Key words.** Anti-jamming, package errors, fading, channel, coding.

Группирование ошибок в пакеты характерно для каналов связи с кодированием, функционирующих в условиях «медленных» замираний. Упрощенной моделью этих замираний является модель с блочными замираниями, когда начальная фаза и амплитуда сигналов предполагаются неизменными на интервале передачи нескольких символов кода [1].

Для данной модели известен «квазиоптимальный» метод приема, предполагающий «когерентное» сложение отсчетов на выходах каналов приема синфазной и квадратурной составляющих сигналов с последующим их «некогерентным» объединением [2]. Получить точные аналитические оценки вероятности ошибки на бит  $P_b$  для каналов с блочными замираниями затруднительно.

В работе [2] оценки вероятности ошибки на бит получены на основе использования асимптотически точных верхних аддитивных границ для «релеевских» замираний. Такой тип замираний является частным случаем «райсовских».

При этом нахождение вероятностного распределения длин пакетов ошибок, необходимого для построения данных границ, основано на последовательном переборе и требует значительных вычислительных затрат.

Известен более простой метод вычисления верхних границ вероятности ошибки на бит, основанный на использовании однородных полиномов Белла для вычисления вероятностного распределения длин пакетов ошибок [3].

Применим данный метод для оценки характеристик двоичных кодов в каналах связи с райсовскими блочными замираниями.

Рассмотрим канал связи, в котором для передачи информации используется блочный  $(n, k)$  код со скоростью  $r = k/n$  и минимальным расстоянием  $d_{\min}$ . Для сверточных кодов в качестве аналога длины кода примем глубину декодирования как производную от длины кодового ограничения  $v$ .

Дистанционные свойства кода охарактеризуем коэффициентами  $A_{w,d}$ , которые представляют собой количество кодовых комбинаций весом  $d$ , порожденных входными информационными последовательностями весом  $w$ .

Переданную кодовую комбинацию длиной  $n$  обозначим через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Без потери общности примем, что  $x_i = 0$ , где  $i = 1, n$ .

Будем считать, что двоичный символ кода  $x_i = 0$

Шевченко Вячеслав Анатольевич – кандидат технических наук, начальник отдела, Военно-научный комитет Вооруженных сил Российской Федерации, тел. +7(499)-739-91-32;

Скорик Александр Дмитриевич – научный сотрудник, 4 ЦНИИ МО РФ, тел. +7(495)-519-98-02.

Shevchenko Vyacheslav – the candidate of the technical sciences, chief of division, Military-scientific committee of Military forces of the Russian Federation +7(499)-739-91-32;

Skorik Alexander – The scientific employee, 4 CSRI of Ministry defense of Russian Federation, tel. +7(495)-519-98-02.

передается сигналом  $S_0(t)$ , а символ кода  $x_i = 1$  – сигналом  $S_1(t)$ . Сигналы  $S_0(t)$  и  $S_1(t)$  являются взаимно ортогональными в усиленном смысле. Мощность полезного сигнала на входе демодулятора определим величиной  $P_s$ , длительность интервала передачи символа кода – величиной  $T_s = r/R$ , где  $R$  – скорость передачи информации, а энергию, приходящуюся на бит информации – величиной  $E_b = P_s/R$ .

Тепловой шум  $n(t)$  представим в виде аддитивного белого гауссовского шума с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ .

Введем понятие «пакет ошибок», под которым будем понимать совокупность символов одной кодовой комбинации, при передаче которых амплитуда и начальная фаза сигналов не изменяются. Обозначим длину пакета через  $b$ .

Для удобства дальнейшего анализа примем, что на интервале передачи одной кодовой комбинации возможно разместить  $L = \lfloor n/b \rfloor$  пакетов длиной  $b$ . Очевидно, что  $i$ -й символ кодовой комбинации принадлежит пакету с номером  $j = \lceil i/b \rceil$  и передается сигналом с амплитудой  $a_j$  и начальной фазой  $\varphi_j$ .

Совокупность амплитуд для всех пакетов образует последовательность  $a = (a_1, a_2, \dots, a_L)$ , начальных фаз – последовательность  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L)$ .

С учетом вышеизложенного опишем колебание, поступающее на вход демодулятора, следующим образом:

$$y_i(t) = a_j \left( (1-x_i) S_0(t, \varphi_j) + x_i S_1(t, \varphi_j) \right) + n(t). \quad (1)$$

Начальная фаза полезного сигнала  $\varphi_j$  является случайной и равномерно распределена в пределах от  $0$  до  $\pi$ .

Амплитуда  $a_j$  при райсовских замираниях имеет следующую нормированную плотность распределения [1]:

$$p_{a_j}(a_j) = 2a_j(K+1) \exp(-K - a_j^2(K+1)) \times I_0(2a_j\sqrt{K(K+1)}), \quad (2)$$

где  $K$  – отношение основной и диффузной составляющих полезного сигнала.

Плотность распределения величины  $c_j = a_j^2$  определим с использованием следующего известного соотношения

$$p_{c_j}(c_j) = p_{a_j}(a_j = \sqrt{c_j}) \frac{\partial a_j}{\partial c_j}, \quad (3)$$

которое с учетом выражения (2) примет следующий вид:

$$p_{c_j}(c_j) = (K+1) \exp(-K - c_j(K+1)) \times I_0(2\sqrt{c_j K(K+1)}). \quad (4)$$

На выходе канала сигнала  $S_k(t)$ , где  $k = \overline{0,1}$ , по

окончании приема  $i$ -го символа кода формируются отсчеты:

- для синфазной составляющей 
$$Y_{k,i} = a_j \gamma \delta(k, x_i) \cos \varphi_j + n_{i,k}; \quad (5)$$

- для квадратурной составляющей 
$$Y_{k,i\perp} = a_j \gamma \delta(k, x_i) \sin \varphi_j + n_{i,k\perp}, \quad (6)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{2E_b}{N_J}} r, \quad \delta(k, x_i) = \begin{cases} 1, & k = x_i; \\ 0, & k \neq x_i; \end{cases}$$

$n_{i,k}$ ,  $n_{i,k\perp}$  – случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $M(n_{i,k}^2) = M(n_{i,k\perp}^2) = 1$ .

Совокупность величин  $Y_{0,i}$ ,  $Y_{0,i\perp}$ ,  $Y_{1,i}$  и  $Y_{1,i\perp}$  определяет  $i$ -й элемент канальной последовательности  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Под воздействием теплового шума возможна трансформация переданной кодовой последовательности  $x$  в последовательность  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ , отличающуюся от переданной  $d$  символами кода.

Количество символов  $v$ , которыми в пакете переданная последовательность отличается от ошибочно принятой, определяет его вес.

Пакеты, в которых нет «отличающихся» символов, назовем «нулевыми», остальные – «ненулевыми».

Обозначим число пакетов с весом  $v$  через  $f_v$ , число «ненулевых» пакетов – через  $l$ .

Ограничим максимальное число «ненулевых» пакетов величиной

$$F = \min(d, L), \quad (7)$$

минимальное – величиной  $\lceil d/b \rceil$ .

Максимальный вес пакета  $m$  определим следующим образом:

$$m = \begin{cases} b, & b \leq d; \\ d - l + 1, & b > d. \end{cases} \quad (8)$$

Распределение числа пакетов различного веса  $f = (f_0, f_1, \dots, f_m)$  должно удовлетворять следующим условиям:

$$F = \sum_{v=0}^m f_v = f_0 + l; \quad (9)$$

$$d = \sum_{v=1}^m v f_v. \quad (10)$$

Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит, учитывающая вероятности появления возможных комбинаций распределения  $d$ , «отличающихся» символов по  $l$  «ненулевым» пакетам различной длины, имеет следующий вид [4]:

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^n A_d \left[ \min_{s \geq 1} \frac{(bF-d)! F!}{(bF)!} \sum_{l=\lceil d/b \rceil}^F \frac{A(d, l; g)}{(F-l)!} \right], \quad (11)$$

где  $A_d = \sum_{w=1}^k \frac{w}{k} A_{w,d}$ ;

$A(d, l; g)$  – однородные полиномы Белла;

$g = (g_1, g_2, \dots, g_{d-l+1})$  – формальные переменные.

Однородные полиномы Белла с учетом того, что  $A(1, 1; g) = g_1$ , удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению [5]:

$$A(d, l; g) = \begin{cases} g_d, & l = 1; \\ \sum_{i=1}^{d-l+1} C_{d-1}^{i-1} g_i A(d-i, l-1; g), & l > 1. \end{cases} \quad (12)$$

$$R_j = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} M((\beta_{j,1} - M(\beta_{j,1}))(\beta_{j,1} - M(\beta_{j,1}))^*) & M((\beta_{j,1} - M(\beta_{j,1}))(\beta_{j,2} - M(\beta_{j,2}))^*) \\ M((\beta_{j,2} - M(\beta_{j,2}))(\beta_{j,1} - M(\beta_{j,1}))^*) & M((\beta_{j,2} - M(\beta_{j,2}))(\beta_{j,2} - M(\beta_{j,2}))^*) \end{vmatrix}. \quad (27)$$

Для канала с произвольной решающей метрикой  $m(y, x)$ , обладающей свойством аддитивности

$$m(y, x) = \sum_{i=1}^L m(y^{(i)}, x^{(i)}), \quad (13)$$

где

$$y^{(j)} = (y_{b(j-1)+1}, y_{b(j-1)+2}, \dots, y_{bj}), \quad (14)$$

$$x^{(j)} = (x_{b(j-1)+1}, x_{b(j-1)+2}, \dots, x_{bj}), \quad (15)$$

формальные переменные  $g_v, v = \overline{1, n}$  определены следующим образом [3,4]:

$$g_v = \begin{cases} D(s, v) \frac{b!}{(b-v)!}, & v \leq b; \\ 0, & v > b, \end{cases} \quad (16)$$

где  $s$  – параметр, подлежащий оптимизации в выражении (11);

$v \leq b$  – число символов, в которых в  $j$ -м блоке принятая кодовая комбинация отличается от переданной;

$$D(s, v) = M \left( \exp \left( s \left( m(y^{(j)}, \hat{x}^{(j)}) - m(y^{(j)}, x^{(j)}) \right) \right) \right), \quad (17)$$

где  $M(\cdot)$  – математическое ожидание.

Решающая метрика  $m(y^{(j)}, x^{(j)})$  для рассматриваемого типа демодулятора определяется следующим образом [2]:

$$m(y^{(j)}, x^{(j)}) = \eta_j \eta_j^*, \quad (18)$$

где

$$\eta_j = \sum_{i=b(j-1)+1}^{bj} (Y_{x_i, i} + i Y_{x_i, i\perp}), \quad (19)$$

$$i = \sqrt{-1}; \quad (20)$$

$\eta_j^*$  – число, комплексно сопряженное к числу  $\eta_j$ .

Введя обозначение

$$\beta_j = (\beta_{j,1}, \beta_{j,2}), \quad (21)$$

где

$$\beta_{j,1} = \hat{\eta}_j - \eta_j; \quad \beta_{j,2} = \hat{\eta}_j + \eta_j; \quad (22)$$

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

после некоторых математических преобразований приведем выражение (17) к следующему виду:

$$D(s, v) = M \left( \exp \left( s \left( \beta_j^T F \beta_j^* \right) \right) \right), \quad (24)$$

где  $\beta_j^*$  – вектор, комплексно-сопряженный вектору  $\beta_j$ .

Для вычисления правой части выражения

(24) воспользуемся следующим соотношением [2]:

$$M \left( \exp \left( s \beta_j^T F \beta_j^* \right) \right) = \frac{\exp \left( s \mu_j^T F \left( I - 2sR^T F \right)^{-1} \mu_j \right)}{\det \left( I - 2sR^T F \right)}, \quad (25)$$

где

$$\mu_j = (M(\beta_{j,1}), M(\beta_{j,2})); \quad (26)$$

Без потери общности примем, что в  $j$ -м блоке отличающимися символами являются первые  $v$ .

Тогда с учетом обозначения (21), а также соотношений (19), (5) и (6) получим

$$\beta_{j,1} = \sum_{k=1}^v (n_{k,1} + in_{k,1\perp}) - \sum_{k=1}^v (n_{k,0} + in_{k,0\perp}) - va_j \gamma \exp(i\varphi_j); \quad (28)$$

$$\beta_{j,2} = \sum_{k=1}^v (n_{k,0} + in_{k,0\perp}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^v (n_{k,1} + in_{k,1\perp}) + 2 \sum_{k=v+1}^b (n_{k,0} + in_{k,0\perp}) + (2b-v) a_j \gamma \exp(i\varphi_j). \quad (29)$$

На основании выражений (28) и (29) вместо выражения (26) получим

$$\mu_j = a_j \gamma \exp(i\varphi_j) (-v, 2b-v), \quad (30)$$

а вместо выражения (27)

$$R_j = \begin{vmatrix} 2v & 0 \\ 0 & 2(2b-v) \end{vmatrix}. \quad (31)$$

С учетом соотношений (30), (31) и (23) выражение (25) преобразуем к следующему виду:

$$M \left( \exp \left( s \beta_j^T F \beta_j^* \right) \right) = \frac{1}{1-4s^2v(2b-v)} \times \exp \left( -\frac{c_j \gamma^2 2s(2b-v)v(1-2sb)}{2(1-4s^2v(2b-v))} \right). \quad (32)$$

Подставляя выражение (32), усредненное по параметру  $c_j$  с распределением (4), в выражение (24), получим

$$D(s, v) = \frac{(K+1) \exp(-K)}{1-4s^2v(2b-v)} \int_0^\infty I_0 \left( 2\sqrt{c_j K(K+1)} \right) \times \exp \left( -c_j \left( K+1 + \frac{\gamma^2 2s(2b-v)v(1-2sb)}{2(1-4s^2v(2b-v))} \right) \right) dc_j. \quad (33)$$

Полагая

$$a = K(K+1); \quad p = K+1 + \frac{\gamma^2 2s(2b-v)v(1-2sb)}{2(1-4s^2v(2b-v))},$$

и используя табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} \exp(-pu) I_0(2\sqrt{au}) du = \exp(a/p)/p, \quad (34)$$

выражение (33) приведем после некоторых математических преобразований к следующему виду:

$$D(s, v) = \frac{K+1}{(K+1)(1-4s^2v(2b-v)) + \frac{\gamma^2}{2} 2s(2b-v)v(1-2sb)} \times \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} \frac{2s(2b-v)v(1-2sb)K}{(K+1)(1-4s^2v(2b-v)) + \frac{\gamma^2}{2} 2s(2b-v)v(1-2sb)}\right). \quad (35)$$

Найденное соотношение (35) при подстановке в выражение (16) и расчете полиномов  $A(d, l; g)$  с использованием рекуррентной формулы (12) определяет верхнюю границу вероятности ошибки на бит (11) для канала связи в условиях райсовских блочных замираний.

Оптимизация параметра  $s$ , как следует из выражения (35), должна вестись в пределах от 0 до  $1/2b$ .

Воспользуемся полученными соотношениями для оценки характеристик некоторых двоичных сверточных кодов.

Можно показать, что при коэффициенте замираний  $K=10$  для кодов с длиной кодового ограничения  $v=7$  выбор скорости  $r=1/3$  позволяет добиться в широком диапазоне значений величины  $b$  большей помехоустойчивости канала связи, чем выбор скорости  $r=1/2$  или  $r=1/4$ .

На рис. 1 для сверточного кода с порождающим полиномом в восьмеричной форме (225,331,367) пред-

ставлены зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_0$  при различных значениях величины  $b$ .

Отметим, что при увеличении величины  $b$  должно происходить усиление группирования ошибок, ведущее к ухудшению помехоустойчивости канала связи. С другой стороны, с ростом величины  $b$  увеличивается время когерентной обработки сигналов, что должно приводить к улучшению помехоустойчивости канала связи.

Анализ графиков, представленных на рис.1, позволяет сопоставить влияние этих факторов на помехоустойчивость канала связи в условиях «неглубоких» замираний. Начиная с величины  $b>4$ , усиление группирования ошибок оказывает большее влияние, чем увеличение времени «когерентной» обработки сигналов.

Для условий «глубоких» замираний, приближающихся к релевским ( $K=0$ ), анализ показывает следующее.

Для кодов с длиной кодового ограничения  $v=7$  в широком диапазоне значений величины  $b$  добиться большей помехоустойчивости канала связи позволяет выбор скорости  $r=1/4$ , чем выбор скорости  $r=1/2$  или  $r=1/3$ .

Зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_0$  для сверточного кода с порождающим полиномом в восьмеричной форме (231,273,327,37) при глубине замираний  $K=1$  представлены на рис. 2.

Из анализа графиков, представленных на рис. 2, следует, что, начиная с величины  $b>2$ , усиление группирования ошибок оказывает большее влияние на помехоустойчивость канала связи, чем увеличение времени «ко-

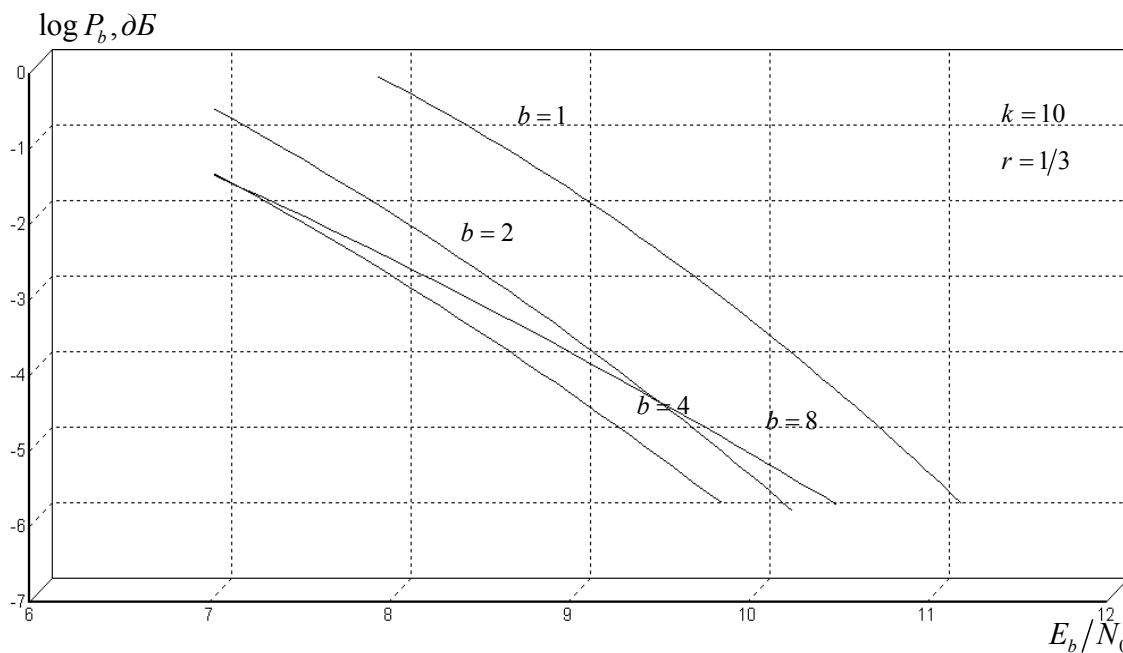


Рис.1 Зависимость вероятности ошибки  $P_b$  от отношения  $E_b/N_0$  для сверточного кода с  $v=7$  и  $r=1/3$  при  $k=0$  и различных значениях максимальной длины пакетов ошибок  $b$

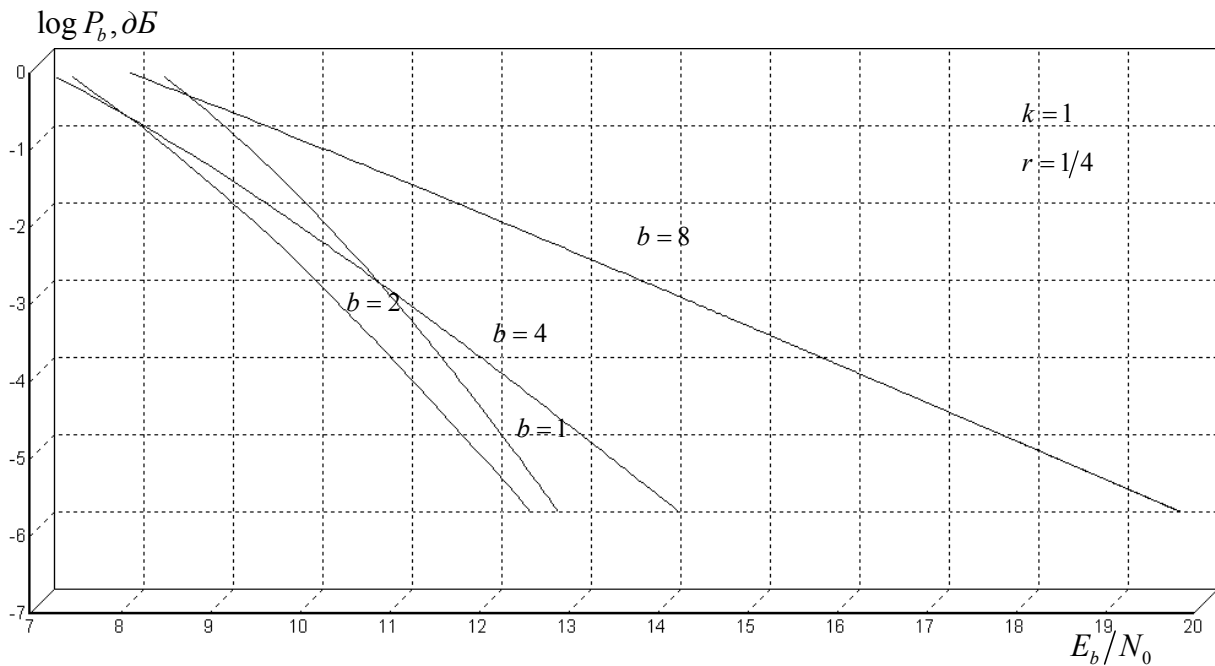


Рис.2 Зависимость вероятности ошибки  $P_b$  от отношения  $E_b/N_0$  для сверточного кода с  $v=7$  и  $r=1/4$  при  $k=1$  и различных значениях максимальной длины пакетов ошибок  $b$

герентной» обработки сигналов.

Таким образом, получены аналитические соотношения для расчета верхней аддитивной границы вероятности ошибки на бит в канале с блочными замираниями.

Найденные соотношения позволяют провести

сравнительную оценку различных кодов с целью выбора рационального в условиях априорной неопределенности относительно значений параметров блочных замираний.

*Литература*

1. Zummo SA, Stark W. E. A union bound on the error probability of binary codes over block-fading channels//IEEE Transactions on Communication, vol. 54, pp. 2085-2093, November 2005.
2. Wu X, Xiang H, Ling C, You X, Li S. Bounds on the decoding error probability of binary block codes over noncoherent block AWGN and fading channels//IEEE Transactions on Wireless Communications, vol.5, №11, pp. 3193-3203, November 2006.
- 3 Шевченко ВА, Скорик АД. Метод оценки вероятности ошибки на бит в каналах связи с группированием ошибок// Двойные технологии, 2010. № 3. С. 68-71.
4. Шевченко ВА. Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит в канале с «жесткими» решениями в условиях воздействия случайной импульсной помехи.//Известия института инженерной физики, 2010. - № 3, С. 43-47.
5. Кузьмин О.В. Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов.//Дискретная математика, 1994- том 6, вып. 3, С.39-49.

Материал поступил в редакцию 28. 11. 2011 г.