УДК 629.7.05.

© Алферьев В.Л.
Alferyev V.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ИМПУЛЬСНЫХ ВАРИАЦИЙ

GENERAL PROPERTIES OF PULSE VARIATIONS

Аннотация. *В работе раскрыты общие свойства импульсных вариаций. Выписано в аналитическом виде общее решение обратной вариационной задачи.*

Annotation. *Common properties of pulsing variations are in-process uncovered. The common decision of an inverse variational problem is made out in an analytical kind.*

Ключевые слова. *Общее свойство, импульсная вариация, линейное уравнение, вариационная задача.*

Key words. *General properties, pulse variation, linear equation, variational problem.*

Во многих задачах, связанных с исследованием маневренных возможностей КО, включая задачи их обнаружения информационными средствами различного назначения, используется взаимосвязь между величиной импульса скорости космического объекта (КО) и изменением его местоположения в некоторой характерной точке на траектории движения. При этом остальные вариации в рассмотрении могут не участвовать. Такие вариационные задачи в баллистике называются импульсными.

Статья является третьей из представляемой серии. В работе [2], являющейся началом исследований, указан перечень обозначений и представлен рисунок ([2], рис.1). Работа является продолжением работ [2] и [3] и открывает рассмотрение вопроса импульсных вариаций на кеплеровой дуге. Вариационные задачи в импульсной постановке существенно отличаются от задач, рассмотренных в предыдущих работах.

Результаты, изложенные в статье, носят промежуточный характер и будут использованы в последующих работах при рассмотрении свойств импульсных вариаций на целевой поверхности.

Итак, рассмотрим свойства импульсных вариаций на траекториях движения КО. Вариации векторов положения и скорости КО в точке B ([2], рис.1) удовлетворят уравнениям ([2], 3.37), для которых ([2], 3.38) изохронные составляющие вариаций примут вид

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)} = \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\delta\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\delta t;$$

$$\delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} = \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\delta t. \qquad (1)$$

Подставим в первое уравнение ([2], 3.37) выражение для $\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}$ (1.1). Получим

$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\delta\vec{\mathbf{v}} = \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \vec{\mathbf{v}}^{(2)}(\delta t^{(2)} - \delta t). \qquad (2)$$

Соотношение (2) представляет собой линейное уравнение относительно импульса скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}$ КО, который обеспечивает заданное изменение $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ местоположения КО в точке B ([2], рис.1) и заданную вариацию $\delta t^{(2)}$ времени её достижения. Формальное решение уравнения (2) может быть записано в виде

$$\delta\vec{\mathbf{v}} = \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)-1}\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)-1}\vec{\mathbf{v}}^{(2)}(\delta t^{(2)} - \delta t). \qquad (3)$$

Для получения явного решения (3) необходимо раскрыть некоторые дополнительные свойства матрицы частных производных $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$ ([2], 3.1), ([2], 3.7). Введём в рассмотрение угол $\lambda^{(*)}$ и коэффициент K, равенствами

$$\sin\lambda^{(*)} = 1\Big/\sqrt{W_2^{\,2}+1}; \quad \cos\lambda^{(*)} = W_2\Big/\sqrt{W_2^{\,2}+1}; \qquad (4)$$

$$\mathrm{K}_2 = \cos\theta_2\sqrt{W_2^{\,2}+1}\Big/\chi, \qquad (5)$$

где функция W_2 определена уравнением ([2],1.4).

Сформулируем дополнительные свойства элементов матрицы частных производных $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$, которые, как и в работах [2] и [3], приводятся без доказательства [1]. Итак, справедливы тождества

$$\begin{cases} M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})}W_2 + M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})} = -\chi M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}\,\mathrm{D}_0^{(1)}; \\ M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})} - W_2 M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})} = \chi M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}\,\mathrm{D}_0^{(2)}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})} - M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})}W_2 = \chi M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}\,\mathrm{D}_0^{(2)}\mathrm{tg}\,\theta_2; \\ M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}W_2 + M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})} = M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}\left(1 + \dfrac{2\mathrm{J}_2}{1+\cos\phi}\right). \end{cases} \qquad (6)$$

Алферьев Виктор Леонидович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, МАК «Вымпел», тел. (495)543-36-76.

Alferyev Victor – PhD., senior researcher, IJSC «Vympel», tel. (495)543-36-76.

Дополнительно определитель матрицы $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$ удовлетворит уравнениям

$$M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})}M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})}-M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})}=M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})2}\,\mathrm{D}_0^{(2)};\quad \det\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}=M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})3}\,\mathrm{D}_0^{(2)}, \tag{7}$$

где функции $\mathrm{D}_0^{(1)}$ и $\mathrm{D}_0^{(2)}$ определятся равенствами

$$\mathrm{D}_0^{(1)}=\mathrm{tg}\,\theta_2+\frac{2}{1+\cos\phi}\mathrm{A}_2; \tag{8}$$

$$\mathrm{D}_0^{(2)}=\frac{1}{\chi}\left[1+W_2(\chi+1)\,\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}\right]-\frac{2\mathrm{A}_2}{1+\cos\phi}\mathrm{tg}(\lambda^{(*)}-\theta). \tag{9}$$

Функция $\mathrm{J}_2=M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}$ является одним из элементов матрицы $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$ и задаётся уравнением (1.7) работы [2]. Причём в программной реализации могут использоваться тождества

$$1+\frac{2\mathrm{J}_2}{1+\cos\phi}=\frac{1+W^2}{\chi^2}-\mathrm{D}_0^{(1)}\mathrm{tg}\,\theta_2;\quad \mathrm{tg}(\lambda^{(*)}-\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}=1-\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}-\frac{R}{2a}. \tag{10}$$

Задаваемые уравнениями (4), (5), (8) и (9) функции с использованием векторов

$$\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}=\vec{\mathbf{Q}}\cos\lambda^{(*)}+\vec{\boldsymbol{\gamma}}\sin\lambda^{(*)};\quad \vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}=\vec{\boldsymbol{\gamma}}\cos\lambda^{(*)}-\vec{\mathbf{Q}}\sin\lambda^{(*)} \tag{11}$$

позволяют записать матрицу частной производной $\left.\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}$ в треугольном виде

$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}=g_2^{(\mathrm{r})}[\vec{\mathbf{c}}\otimes\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}\otimes\otimes\left(\mathrm{D}_0^{(3)}\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}-\frac{\mathrm{D}_0^{(2)}}{\mathrm{K}_2}\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\right)-\mathrm{K}_2\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)}\otimes\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}]. \tag{12}$$

Другими словами, замена орт $(\vec{\mathbf{Q}},\vec{\mathbf{c}},\vec{\boldsymbol{\gamma}})$ системы координат в точке проведения импульса (в точке A, [2], рис.1) на орты $(\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)},\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)})$ позволяют записать матрицу частных производных $\left.\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}$ в треугольном виде.

Уравнение (11) записи вектора $\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}$ представляет собой обобщённое определение известного λ-направления, при задании импульса скорости вдоль которого величина вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ максимальна.

Уравнение (11) записи вектора $\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}$ представляет собой обобщённое определение известного ν-направления, при задании импульса скорости вдоль которого направление вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ совпадает с направлением $\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}$ вектора скорости КО в точке B, в силу чего координаты пересечения траекторией КО некоторой неподвижной поверхности в инерциальном пространстве не изменяются.

Коэффициент $g_2^{(\mathrm{r})}=RR_2\sin\phi/C$, присутствующий в записи уравнения (12), определён последним уравнением системы ([2], 2.11), а функция $\mathrm{D}_0^{(3)}$ задаётся равенством

$$\mathrm{D}_0^{(3)}=\mathrm{K}_2\,\mathrm{tg}\,\theta_2-\frac{\mathrm{D}_0^{(1)}}{\mathrm{K}_2}=\left(\mathrm{K}_2-\frac{1}{\mathrm{K}_2}\right)\mathrm{tg}\,\theta_2+\frac{2}{1+\cos\phi}\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{K}_2}. \tag{13}$$

Величина $\lambda^{(*)}$ представляет собой угол между векторами $\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}$ (11) и вектором скорости КО, а функция $\mathrm{D}_0^{(2)}$ (9) характеризует определитель матрицы $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$.

Аналогичный (11) треугольный вид должны иметь и обратная к $\left.\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}$ матрица. Для её нахождения выпишем предварительно обратную матрицу для $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$, которая с учётом уравнения (7) примет вид

$$\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})-1}=\frac{1}{M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})2}\,\mathrm{D}_0^{(2)}}\boldsymbol{\Pi}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}};\quad \boldsymbol{\Pi}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}=\begin{pmatrix} M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})} & 0 & -M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}\\ 0 & M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}\,\mathrm{D}_0^{(2)} & 0\\ -M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})} & 0 & M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})}\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Если ввести обозначение $\Pi_{k,j}^{(\mathrm{R,V})}$ для элементов матрицы $\boldsymbol{\Pi}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$, $\boldsymbol{\Pi}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}=\{\Pi_{k,j}^{(\mathrm{R,V})}\}$, то обратная матрица в инерциальном пространстве определится равенством

$$\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right)^{-1}=\frac{1}{g_2^{(\mathrm{r})}}\frac{1}{M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}\,\mathrm{D}_0^{(2)}}\sum_{k,j}\Pi_{k,j}^{(\mathrm{R,V})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j. \tag{15}$$

Последнее равенство, удобное в программной реализации, с учётом уравнений (3.7) работы [2], а также тождеств (6) и (7) может быть переписано в следующем треугольном виде:

$$\left(\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\right)^{-1}=\frac{1}{g_2^{(\mathrm{r})}}[\vec{\mathbf{c}}\otimes\vec{\mathbf{c}}-\left(\frac{\mathrm{D}_0^{(3)}}{\mathrm{D}_0^{(2)}}\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}+\frac{1}{\mathrm{K}_2}\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}\right)\otimes\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)}-\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{D}_0^{(2)}}\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\otimes\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}]. \tag{16}$$

Подставляя матрицу (16) в уравнение (3), выпишем искомое решение для требуемого импульса скорости

$$\delta\vec{\mathbf{v}}=\frac{1}{g_2^{(\mathrm{r})}}\{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{c}}+\frac{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)})}{\mathrm{K}_2}\left(\frac{\mathrm{D}_0^{(1)}}{\mathrm{D}_0^{(2)}}\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}-\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}\right)+\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{D}_0^{(2)}}\left[V_2(\delta t^{(2)}-\delta t)-\frac{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\vec{\mathbf{Q}}^{(2)})}{\cos\theta_2}\right]\cdot\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\}. \tag{17}$$

Решение (17) имеет общий вид. Конкретное содержание этого уравнения существенно зависит от постановки решаемой задачи, то есть от взаимосвязи между собой вариаций $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$, $\delta t^{(2)}$ или ограничений, накладываемых постановкой задачи на вариацию $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$. Другими словами, отличие между собой различных постановок вариационных задач в импульсной постановке целиком заключено в виде частной производной $\partial t^{(2)}/\partial\vec{\mathbf{v}}$ от времени достижения целевой поверхности по вектору скорости в точке А ([2], рис.1).

Существует альтернативное решение вариационной задачи в импульсной постановке, в запись которого не входит явным образом вариация времени достижения точки В ([2], рис.1). Подставим уравнение

$$\delta t^{(2)} = \frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{\partial t^{(2)}}{\partial t}\delta t$$

в равенство (2). В итоге получим

$$\left(\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} + \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}\otimes V_2\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right)\delta\vec{\mathbf{v}} =$$

$$= \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - V_2\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t} - 1\right)\delta t\cdot\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}. \quad (18)$$

Можно показать, что записанная в левой части уравнения (18) матрица может иметь обратную, представимую в следующем виде матрицу:

$$\left(\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} + \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}\otimes V_2\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{g_2^{(\mathrm{r})}}\{\vec{\mathbf{c}}\otimes\vec{\mathbf{c}} - \frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}}\left[\mathrm{D}_0^{(3)} + \frac{V_2}{g_2^{(\mathrm{r})}}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}, \vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}\right)\right]\times$$

$$\times\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\otimes\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)} + \frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}}\frac{V_2}{g_2^{(\mathrm{r})}}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}, \vec{\mathbf{c}}\right)\times$$

$$\times\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\otimes\vec{\mathbf{c}} - \frac{1}{\mathrm{K}_2}\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}\otimes\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)} - \frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}}\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\otimes\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)},$$

где коэффициент $g_2^{(\mathrm{r})}$ определён последним уравнением системы (2.11), а функция $\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}$ удовлетворит равенству

$$\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)} = \mathrm{D}_0^{(2)} - \mathrm{K}_2\frac{V_2}{g_2^{(\mathrm{r})}}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}, \vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\right). \quad (19)$$

Умножая обе части уравнения (18) на выписанную обратную матрицу, получаем дополнительное решение обратной вариационной задачи в импульсной постановке, не зависящее в явном виде от вариации $\delta t^{(2)}$

$$\delta\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{g_2^{(\mathrm{r})}}\{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{c}} -$$

$$-\left\{\vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)} + \frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}}\left[\mathrm{D}_0^{(3)} + \frac{V_2}{g_2^{(\mathrm{r})}}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}, \vec{\mathbf{d}}_\lambda^{(1)}\right)\right]\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\right\}\times$$

$$\times\frac{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\mathbf{n}}_2^{(a)})}{\mathrm{K}_2} + \frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}}[\frac{V_2}{g_2^{(\mathrm{r})}}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}, \vec{\mathbf{c}}\right)(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\mathbf{c}}) -$$

$$-(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}) + V_2\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t} - 1\right)\delta t]\vec{\mathbf{d}}_\nu^{(1)}\}. \quad (20)$$

Решение (20) существует лишь тогда, когда функция $\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}$ отлична от нуля. Если функция $\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{(2)}$ равна нулю, то вариация $\delta t^{(2)}$ может быть произвольной и для решения обратной задачи следует использовать уравнение (17).

Заключение

В работе раскрыты общие свойства импульсных вариаций. Выписано в аналитическом виде общее решение обратной вариационной задачи. Результаты будут использованы в последующих работах для решения вариационных задач в импульсной постановке на целевой поверхности.

Литература:

1. В. Алферьев. О частных производных на кеплеровой дуге. Российская инженерная академия. Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии".Сборник трудов "Теоретические вопросы физики космоса, баллистики и практической космонавтики. Проблемы технической безопасности". Выпуск 13. Москва, СИП РИА, 2005.

2. В. Алферьев. Свойства матриц частных производных на кеплеровой дуге. Российская инженерная академия. Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии". Сборник трудов "Теоретические вопросы физики космоса, баллистики и практической космонавтики. Проблемы технической безопасности". Выпуск 13. Москва, СИП РИА, 2005.

3. В. Алферьев. Общие свойства вариаций на целевой поверхности. Российская инженерная академия. Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии".Сборник трудов "Теоретические вопросы физики космоса, баллистики и практической космонавтики. Проблемы технической безопасности". Выпуск 13. Москва, СИП РИА, 2005г.

Материал поступил в редакцию 20. 11. 2011 г.