УДК 519.2 : 629.7

© Силецкий А.Л.
Siletsky A.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАССЕИВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛЕТА КА

THE ANALYTICAL APPROACH TO THE DESCRIPTION OF SPATIAL DISPERSION AT PRESENCE OF RESTRICTIONS IN APPLIED PROBLEMS OF THE SPACE VEHICLES FLIGHT THEORY

Аннотация. *Рассматривается вероятностное представление пространственного рассеивания с ограничениями, которые могут возникать в ряде прикладных задач теории полета космических аппаратов. Представленные аналитические преобразования обеспечивают получение компактного выражения для закона распределения величины расстояния в трехмерном пространстве, которое является обобщением известного распределения Максвелла на случай отличных от нуля математических ожиданий координатных составляющих.*

Annotation. *Probabilistic representation of spatial dispersion with restrictions which can arise in a number of applied problems of the space vehicles flight theory is considered. The presented analytical transformations provide reception of compact expression for the law of distribution of size of distance in three-dimensional space which is generalization of known Maxwell distribution on a case of distinct from zero of mathematical expectations of coordinate components.*

Ключевые слова. *Расстояние, трехмерное пространство, математическое ожидание.*

Key words. *Distance, three-dimensional space, mathematical expectation.*

В прикладных задачах возмущенного движения космических аппаратов (КА) нередко возникает необходимость вероятностного описания пространственного рассеивания, причем некоторые задачи имеют ряд особенностей, осложняющих их решение. Например, при сближении с космической станцией перед началом завершающей операции (причаливания или стыковки) по вполне понятным причинам КА должен располагаться от станции на некотором расстоянии [1], величина которого удовлетворяет заданным граничным значениям, проще говоря, находится не так уж далеко, но и не слишком близко. По сути такая же особенность характерна и для задачи инспекции КА. Задачи, связанные с управлением КА при выполнении операций начального этапа маневра сближения (дальнее или ближнее наведение), изложены, например, в работах [1, 2, 3]. В настоящей статье рассматривается вероятностная сторона результатов выполнения этих операций.

Взаимное расстояние, в дальнейшем просто расстояние, S является модулем радиус-вектора в трехмерном пространстве, т.е. в самой общей постановке задача вероятностного описания рассеивания заключается в том, чтобы установить закон распределения величины радиус-вектора в трехмерном пространстве. В свое время такой закон был получен Максвеллом и носит его имя [4]. В этом законе предполагается, что составляющие радиус-вектора (в нашем случае это составляющие расстояния) являются нормальными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и равными средними квадратическими отклонениями (СКО).

Однако предположение о равенстве нулю математических ожиданий составляющих расстояния для упомянутой выше задачи не может быть принято. Поскольку известное распределение Максвелла в данном случае не подходит, следует искать что-то более подходящее.

Сначала можно отметить, что упомянутое распределение Максвелла можно представить и по-другому, как χ-распределение с тремя степенями свободы, причем χ–распределение легко получить из широко известного χ^2-распределения (закона Пирсона), используя формулу

$$\varphi_y(y) = \varphi_x[x(y)]\left|\frac{dx(y)}{dy}\right|, \qquad (1)$$

Силецкий Анатолий Леонтьевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, НИЦ РКС 4 ЦНИИ МО, тел. 8-915-281-58-68.

Siletsky Anatoly – Dr. Sci.Tech., the professor, leading the scientific employee, SRC RCS 4CSRI DM.

связывающую плотность распределения $\varphi_y(y)$ функционально преобразованной $y=y(x)$ случайной величины y с плотностью распределения $\varphi_x(x)$ исходной случайной величины x. Для нашего случая, при переходе от χ^2 к χ, конкретный вид этой формулы будет следующим:

$$\varphi(x) = \varphi(x^2)\left|\frac{dx^2}{dx}\right| = 2x\,\varphi(x^2)\,, \qquad (2)$$

где $\varphi(\chi)$ и $\varphi(x^2)$ есть плотности χ- и χ^2-распределений соответственно.

Представляет интерес так называемое «нецентральное» χ^2-распределение, которое является распределением суммы квадратов независимых нормально распределенных случайных величин ν_k с ненулевыми математическими ожиданиями m_κ и одинаковыми СКО σ

$$\chi^2_{n_{нц}} = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots \nu_\kappa^2 + \ldots \nu_n^2, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Плотность нецентрального χ^2-распределения зависит от числа слагаемых n (которое называют числом степеней свободы), так называемого параметра нецентральности λ, определяемого формулой

$$\lambda = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} \qquad (4)$$

и в общем случае в конечном виде не выражается [5], а выражается с помощью ряда из бесконечного числа слагаемых

$$\varphi(\chi_n^2) = \frac{1}{2\frac{n}{2}\sqrt{\pi}}\, l^{-\frac{1}{2}(\lambda^2+\chi^2)}\, \chi^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\chi^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2k)!\,\Gamma(\frac{n}{2}+k)}. \qquad (5)$$

Фишер Р.А. [7] указал, однако, что для нечетного числа степеней свободы можно выразить плотность нецентрального χ^2-распределения через элементарные функции. Для интересующего нас случая, когда n=3, можно предложить отличающийся от существующих [7, 8] простой метод получения плотности нецентрального χ^2-распределения.

Обычное (т.е. «центральное») χ^2-распределение является частным случаем нецентрального, когда параметр нецентральности λ=0. Пусть от системы случайных величин $\nu_k \in N(m_k, \sigma)$ (k =1,2...n) выполнен переход к системе также распределенных нормально случайных величин γ_k (k=1,2...n), из которых γ_k (k=1,2...n-1) имеют нулевые математические ожидания, а величина γ_n – математическое ожидание λ, определяемое формулой (4), то выражение (3) будет

$$\chi^2_{n_{нц}} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \ldots + \gamma_k^2 + \ldots \gamma_{n-1}^2 + \gamma_n^2.$$

Это означает, что нецентральное χ^2-распределение с n степенями свободы можно представить на сумму центрального χ^2-распределения с n-1 степенью свободы и квадрата нормальной случайной величины с математическим ожиданием λ, т.е.

$$\chi^2_{n_{нц}} = \chi^2_{n-1} + \chi^2_{1нц}. \qquad (6)$$

Такое преобразование является ортогональным и заключается в повороте осей ν_1, ν_2... ν_n таким образом, чтобы n-я ось прошла через точку М с координатами $\{m_1, m_2 \ldots m_n\}$.

Будем искать выражение для плотности нецентрального χ_3^2-распределения с тремя степенями свободы, чтобы затем перейти к нецентральному χ_3 распределению, согласно которому, по нашему предположению, распределена величина расстояния между элементами. Исходной является предпосылка о том, что три составляющих ξ, η, и ς расстояния подчиняются нормальному закону распределения причем σ_ξ, σ_η, σ_ς являются одинаковыми и равны σ.

Перейдем от системы трех независимых нормально распределенных величин ξ, η, и ς с математическими ожиданиями m_ξ, m_η, m_ς и одинаковыми СКО σ к величинам γ_1, γ_2, γ_3. Необходимо, чтобы одна из новых осей (третья – для определенности) прошла через точки М с координатами $\{m_\xi, m_\eta, m_\varsigma\}$.

Матрица А перехода к новой системе координат получается путем перемножения двух матриц единичных поворотов, элементы которых (синусы и косинусы) сформировать из m_ξ, m_η, m_ς достаточно просто. Обозначая

$$m = \sqrt{m_\xi^2 + m_\eta^2 + m_\varsigma^2}\,, \qquad (7)$$

далее полагаем m>0, так как случай m=0 соответствует известному распределению Максвелла. В силу инвариантности относительно начала координат величина расстояния S при переходе от ξ, η, ς к γ_1, γ_2, γ_3 не изменится.

Так как совместная плотность распределения ξ, η, ς для случая σ_ξ=σ_η=σ_ς=σ имеет вид

$$\varphi_1(\xi,\eta,\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} e^{-\frac{(\xi-m_\xi)^2+(\eta-m_\eta)^2+(\varsigma-m_\varsigma)^2}{2\sigma^2}}\,, \qquad (8)$$

а якобиан преобразования, описываемого матрицей А, равен единице, то плотность распределения системы случайных величин γ_1, γ_2, γ_3 будет

$$\varphi(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} e^{-\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2+(\gamma_3-m)^2}{2\sigma^2}}\,. \qquad (9)$$

Заметим, что в случае равенства СКО составляющих нормальные случайные величины остаются независимыми при любом повороте осей [9].

Если формулу (6) для числа степеней свободы, равного 3, представить в виде

$$S^2 = d^2 + \gamma_3^2, \qquad (10)$$

где d^2 имеет обычное χv^2-распределение с двумя степенями свободы, т.е.

$$\varphi(d^2)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}}, \qquad (11)$$

а γ_3^2 распределено как квадрат нормальной случайной величины

$$\varphi(\gamma_3^2)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}\cdot\gamma_3}\left[e^{\frac{-(\gamma_3-m)^2}{2\sigma^2}}+e^{\frac{-(\gamma_3+m)^2}{2\sigma^2}}\right], \qquad (12)$$

то плотность распределения квадрата взаимного расстояния можно найти на основе композиции законов (11) и (12).

С этой целью введем обозначения

$$S^2=w;\ d^2=u;\ \gamma_3^2=v, \qquad (13)$$

с учетом которых формула (10) будет иметь вид

$$w=u+v. \qquad (14)$$

Плотности распределения случайных величин u и v при обозначениях (13) соответственно будут

$$\varphi_u(u)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}; \qquad (15)$$

$$\varphi_v(v)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{v}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{v}-m)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(\sqrt{v}+m)^2}{2\sigma^2}}\right]. \qquad (16)$$

Формула для композиции законов $\varphi_u(u)$ и $\varphi_v(v)$, если в качестве переменной интегрирования выбрать v, будет иметь вид

$$\varphi_w(w)=\int_0^w\varphi_u(w-v)\varphi_v(v)dv \qquad (17)$$

или, с учетом (15) и (16),

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ \varphi_w(w)=\frac{1}{4\sigma^3\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\int_0^w e^{-\frac{w-v}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{v}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{v}-m)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(\sqrt{v}+m)^2}{2\sigma^2}}\right]dv. \qquad (18)$$

Переходя от w и v соответственно к S и γ_3 получим

$$\varphi(S^2)=\frac{1}{4\sigma^3\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\int_0^s e^{-\frac{s^2-\gamma_3^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\gamma_3}\left[e^{-\frac{(\gamma_3-m)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(\gamma_3=m)^2}{2\sigma^2}}\right]2\gamma_3 d\gamma_3.$$

Раскрывая квадратные скобки, складывая показатели степеней и производя очевидные сокращения, приходим к виду

$$\varphi(S^2)=\frac{1}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2+m^2}{2\sigma^2}}\left[\int_0^s e^{\frac{\gamma_3 m}{\sigma^2}}d\gamma_3+\int_0^s e^{\frac{-\gamma_3 m}{\sigma^2}}d\gamma_3\right].$$

После интегрирования и простых преобразований получаем выражение плотности распределения величины S^2

$$\varphi(S^2)=\frac{1}{2m\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}}\right], \qquad (19)$$

которое является нецентральным χ^2-распределением с 3 степенями свободы, где величина $\chi_{3нц}^2$ (она же S^2) представляет собой сумму $\xi^2+\eta^2+\varsigma^2$ квадратов трех составляющих, являющихся нормальными случайными величинами с математическими ожиданиями m_ξ, m_η, m_ς и одинаковыми СКО, равными σ.

Следуя формуле (2), находим выражение для плотности нецентрального χ-распределения (т.е. для плотности распределения расстояния S),

$$\varphi(S)_{нц}=\frac{S}{m\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}}\right], \qquad (20)$$

которое, видимо, следует называть также нецентральным распределением Максвелла. Другой способ вывода выражения для плотности $\varphi(S)_{нц}$ заключается в переходе от прямоугольных координат γ_1, γ_2, γ_3 к сферическим координатам S, θ', β' и 2-кратном интегрировании (по θ' и по β') трехмерной плотности φ(S, θ', β'), полученной исходя из формулы (9). Такой способ несколько сложнее описанного, и был использован для контрольных целей. Полученное распределение является обобщением известного распределения Максвелла, в котором математические ожидания составляющих равны нулю. Чтобы как частный случай при m=0 получить плотность обычного («нецентрального») распределения Максвелла, нужно найти предел $\varphi(S)_{нц}$ при $m\to 0$, поскольку при m$\to$0 в правой части (20) получается неопределенность вида 0/0. Искомый предел находится путем однократного применения правила Лопиталя. Легко проверить, что этот предел соответствует обычному распределению Максвелла [4].

Получив выражение для плотности распределения расстояния $\varphi(S)_{нц}$, определим вид соответствующей функции распределения $F(S)_{нц}$.

По определению функции распределения

$$F(S)_{нц}=\int_0^s\varphi(S)_{нц}ds=$$

$$=\frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}}\int_0^s S\left[e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}}\right]ds. \qquad (21)$$

Рассматривая каждое слагаемое в квадратных скобках отдельно, прибавляем и отнимаем одинаковые выражения и приходим к виду

$$F(S)_{нц}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{m}\int_0^s(s-m)e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}}ds+\right.$$

$$+\int_0^s e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}}ds-\frac{1}{m}\int_0^s(s+m)e^{-\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}}ds+\int_0^s e^{-\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}}ds, \qquad (22)$$

где первое и третье слагаемые, будучи приведены к виду

$$J_1 = \frac{\sigma^2}{m}\int_0^s e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}} d\left[\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right];$$

$$J_3 = \frac{\sigma^2}{m}\int_0^s e^{-\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}} d\left[\frac{(s+m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

интегрируются непосредственно, а два других выражаются через нормированную функцию Лапласа [4]

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (23)$$

В итоге функция распределения искомого закона распределения расстояния имеет следующий вид:

$$F(S)_{нц} = \Phi_0\left(\frac{s-m)}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{s+m)}{\sigma}\right) -$$
$$-\frac{\sigma}{m\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{-(s-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{\frac{-(s+m)^2}{2\sigma^2}}\right]. \qquad (24)$$

Эта функция определяет вероятность того, что случайные значения S расстояния будут меньше выбранного фиксированного значения – S.

Если обозначить

$$D = \frac{S}{\sigma} \text{ и } m_D = \frac{m}{\sigma}, \qquad (25)$$

то получим более удобное выражение для функции распределения

$$F(D)_{нц} = \Phi_0(D - m_D) + \Phi_0(D + m_D) -$$
$$-\frac{1}{m_D\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{-(D-m_D)^2}{2}} - e^{\frac{-(D+m_D)^2}{2}}\right], \qquad (26)$$

для которого легко рассчитать и составить таблицу, поскольку таблицы $\Phi_0(x)$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}$ имеются [4]. Такая таблица функции распределения, соответствующей нецентральному распределению Максвелла, будет иметь два входа:

D – выбранное фиксированное значение приведенного расстояния;

m_D – значение приведенного параметра нецентральности.

Итак, получено аналитическое выражение для закона распределения расстояния, имеющее достаточно простой вид. Это позволяет без особых трудностей рассчитать соответствующие таблицы квантилей, что обеспечивает возможность удобного использования нецентрального распределения Максвелла при решении прикладных задач.

Литература

1. Балахонцев В.Г., Иванов В.А., Шабанов В.И. Сближение в космосе. М., Воениздат, 1973. 240с.

2. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М., Наука, ГРФМЛ, 1982. 352с.

3. Иванов Н.М., Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1986. 296с.

4. Справочник по вероятностным расчетам. М., Воениздат, 1970. 536с.

5. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М., ГИФМЛ, 1963. 628с.

6. Fisher R.A. The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient. Proc. Roy. Soc. 1928, A 121, p. 654-673.

7. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., ГИФМЛ, 1963. 500с.

8. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973. 900с.

9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969. 576с.

Материал поступил в редакцию 20. 02. 2012 г.