УДК 629.7.05.

© Алферьев В.Л.
Alferyev V.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАНЕВРИРУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ В СФЕРИЧЕСКИ-ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

THE EQUATIONS OF MOTION OF MANEUVERING OBJECTS IN A SPHERICALLY UNIFORM FIELD

Аннотация. *Продолжено построение алгоритмов имитационного моделирования управляемого движения космических объектов. Решена ограниченная краевая задача, для которой найдено управление направлением вектора тяги маневрирующего объекта при задании цели управляемого процесса в виде требуемой скорости бросания. Показана законность таких упрощений.*

Annotation. *Continued construction of algorithms simulation of controlled motion of space objects. Limited value problem is solved, for which the results of the thrust vector control of the direction maneuvering object when setting targets controlled process as the required rate cast. Shows the validity of such simplifications.*

Ключевые слова. *Общее свойство, импульсная вариация, линейное уравнение, вариационная задача.*

Key words. *General properties, pulse variation, linear equation, variational problem.*

Использование ньютонова поля тяготения для описания движения космического объекта посредством его замены сферически-однородным не принципиально. В процессе практического моделирования могут использоваться и иные поля, учитывающие требуемый набор гармоник разложения геопотенциала Земли. В этом случае выписанные в работе формулы расчета коэффициентов полиномов несколько трансформируются. Однако общая идеология методики, безусловно, сохраняется.

Статья является четвёртой из представляемой серии работ. Список сокращений и обозначений представлен в работе [1]. Там же, в разделах 1–3, дано доказательство правомерности используемого математического подхода к решению задачи. Общий алгебраический вид решения уравнений управляемого движения КО в сферически-однородном поле представлен в работе [2]. Рекуррентные соотношения, связывающие между собой различные члены разложения данного решения, указаны в работе [3].

1. Дополнительные упрощения решения уравнения управляемого движения

В разделе (без потери точности представления общего решения уравнения управляемого движения) проводится дальнейшее упрощение представления векторов положения и скорости космического объекта от времени активного движения. Затем, с учетом указанных упрощений, решается ограниченная краевая задача, то есть определяется управление $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ направлением вектора тяги маневрирующего объекта [1, (2,5)] при задании цели управляемого движения в виде краевых условий [1, (2,13)]. Другими словами, в разделе представлен алгоритм расчета направления вектора тяги $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ двигателей и безразмерного времени z активного движения космического объекта, а также его пространственного местоположения по задаваемой скорости $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^1$, которую объект должен иметь к моменту окончания активного движения. Правомерность этих дополнительных упрощений будет обсуждена ниже, а также в следующей статье.

Ранее введены в рассмотрение коэффициенты разложения величин $\tilde{a}_k$ [1] по степеням координат δ_k

$$\tilde{a}_k = \tilde{a}_k^{(0)} + \sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_k^{(i)} \delta_i + \sum_{i,j=1}^{3} \tilde{a}_k^{(i,j)} \delta_i \delta_j + \ldots$$

Координаты δ_k являются проекциями [1] единичного направления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ вектора тяги ДУ КО на орты сопутствующей системы координат, определенной на время начала его активного движения. При этом, как будет показано ниже, для любого k окажутся равными нулю множители при координате δ_2

$$\tilde{a}_k^{(2)} \equiv 0. \tag{1}$$

Для описания разложения решения уравнения по координатам управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ потребуется дополнительное обозначение. Для любого значения $p \geq 1$ введем в рассмотрение коэффициенты

Алферьев Виктор Леонидович – кандидат технических наук, главный научный сотрудник, МАК «Вымпел», тел. (495)543-36-76.

Alferyev Victor – Ph.D., senior researcher, IJSC «Vympel», tel. (495)543-36-76.

$$\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} = \frac{\partial(\tilde{a}_{i_1}\ldots\tilde{a}_{i_p})}{\partial\delta_k}(\vec{\boldsymbol{\delta}}=0). \qquad (2)$$

Коэффициенты $\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}$ являются константами, определяются характеристиками ДУ объекта и параметрами стартовой траекторию начала активного движения, не зависят от вектора управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$. Явный вид этих коэффициентов для первых трех порядков по верхним индексам имеет вид

$$\begin{aligned}&\tilde{A}_k^{(i)} = \tilde{a}_i^{(k)} \quad \tilde{A}_k^{(i,j)} = \tilde{a}_i^{(0)}\tilde{a}_j^{(k)} + \tilde{a}_j^{(0)}\tilde{a}_i^{(k)};\\&\tilde{A}_k^{(i,j,m)} = \tilde{a}_i^{(0)}\tilde{a}_j^{(0)}\tilde{a}_m^{(k)} + \tilde{a}_j^{(0)}\tilde{a}_m^{(0)}\tilde{a}_i^{(k)} + \tilde{a}_m^{(0)}\tilde{a}_i^{(0)}\tilde{a}_j^{(k)}\end{aligned} \qquad (3)$$

при этом, учитывая правило дифференцирования произведений функций, справедливо тождество

$$\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} = \tilde{a}_{i_p}^{(0)}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_{p-1})} + \tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_{p-1}}^{(0)}\cdot\tilde{a}_{i_p}^{(k)}. \qquad (4)$$

Рассмотрим уравнения [2, (1,2)]. С использованием коэффициентов эти уравнения могут быть переписаны в виде, в котором явным образом выделены линейно зависящие от координат δ_k слагаемые

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0)} = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)} +\\ +\sum\limits_{k=1}^{3}\left(\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)}\right)\cdot\delta_k+\ldots;\\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0)} = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)} +\\ +\sum\limits_{k=1}^{3}\left(\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)}\right)\cdot\delta_k+\ldots\end{cases} \qquad (5)$$

Выделим в правых частях уравнений (5) члены, которые либо не зависят от управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$, либо линейно зависят от его координат. Введем обозначение

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}^{(0)} = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)} +\\ +\sum\limits_{k=1}^{3}\left(\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)}\right)\cdot\delta_k;\\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}'^{(0)} = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)} +\\ +\sum\limits_{k=1}^{3}\left(\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)}\right)\cdot\delta_k.\end{cases} \qquad (6)$$

Для получения аналогичных обозначений для решения неоднородного уравнения подставим равенства [3]

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(1,i_1,\ldots,i_p)}(z) = \tilde{u}\chi_p^{(i_1,\ldots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\delta}}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(1,i_1,\ldots,i_p)}(z) = \tilde{u}\chi_p'^{(i_1,\ldots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\delta}}$$

в уравнения [2, (23)] при $\sigma = 1$ (для частного решения неоднородного уравнения). В итоге напишем

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(1)}(z) = \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}^{(1)}(z) + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(1)}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(1)}(z) = \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}'^{(1)}(z) + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(1)}, \qquad (7)$$

где линейные по координатам δ_k члены частного решения неоднородного уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}&\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}^{(1)}(z) = \tilde{u}\vec{\boldsymbol{\delta}}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\chi_p^{(i_1,\ldots,i_p)};\\&\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}'^{(1)}(z) = \tilde{u}\vec{\boldsymbol{\delta}}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\chi_p'^{(i_1,\ldots,i_p)}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Так что p-е приближение полного решения уравнения [2] может быть схематично записано уравнениями $\vec{\boldsymbol{\rho}}_p = \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p} + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0)} + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(1)}$; $\vec{\boldsymbol{\rho}}_p' = \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}' + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0)} + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(1)}$, в котором векторы $\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}$ и $\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}'$ имеют вид

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\kappa_{p,\mathrm{rr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)+\\ \quad+\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\kappa_{p,\mathrm{rv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)+\\ \quad+\sum\limits_{k=1}^{3}\delta_k\left[\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\kappa_{p,\mathrm{rr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)+\right.\\ \quad\left.+\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\kappa_{p,\mathrm{rv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)\right]+\\ \quad+\tilde{u}\vec{\boldsymbol{\delta}}\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\chi_p^{(i_1,\ldots,i_p)};\\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}' = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\kappa_{p,\mathrm{vr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)+\\ \quad+\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\kappa_{p,\mathrm{vv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)+\\ \quad+\sum\limits_{k=1}^{3}\delta_k\left[\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\kappa_{p,\mathrm{vr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)+\right.\\ \quad\left.+\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)}\kappa_{p,\mathrm{vv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)\right]+\\ \quad+\tilde{u}\vec{\boldsymbol{\delta}}\sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1}^{(0)}\ldots\tilde{a}_{i_p}^{(0)}\chi_p'^{(i_1,\ldots,i_p)},\end{cases} \qquad (9)$$

а добавки $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0)}$, $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(1)}$, $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0)}$ и $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(1)}$ состоят из членов, в которых присутствуют перекрёстные произведения координат вектора управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$. Как будет показано в следующей работе, указанными добавками в процессе имитационного моделирования можно пренебречь.

Составляющие p-го приближения $\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}$ и $\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}'$ не имеют в своей записи квадратичных и более высокого порядка форм от произведений величин δ_k. Полное решение уравнения [2, (1)] может быть записано в виде

$$\vec{\boldsymbol{\rho}} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}'^{(0)} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi' + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}', \qquad (10)$$

в котором основные члены, привносящие подавляющий вклад в решение уравнения, имеют вид

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi = \sum_{p=0}\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi' = \sum_{p=0}\vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}' \qquad (11)$$

и добавки $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}$ и $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}'$ состоят из квадратичных и более высокого порядка форм от произведений величин δ_k.

В процессе имитационного моделирования суммы, входящие в правые части уравнения (9), не могут рассматриваться как бесконечные и ограничиваются количеством учитываемых приближений по высоте сферического слоя. Поэтому для соответствия последующего изложения задачам моделирования введено обозначение $\mathrm{N} \geq 1$ для количества учитываемых приближений по высоте сферического слоя в разложении решения уравнения [2]

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{[\mathrm{N}]} = \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{[\mathrm{N}]} = \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \vec{\boldsymbol{\rho}}'_{\Phi,p}. \tag{12}$$

Вернемся к уравнению (9). Введём обозначения

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)} + \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)}; \\ \vec{\boldsymbol{\psi}}_0'^{(\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)} + \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} = \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} \vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)}; \\ \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(\mathrm{N})} = \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)}; \end{cases} \quad \mathrm{N} \geq 1 \tag{13}$$

или, используя равенства [3],

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) \left[1 + \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \kappa_{p,\mathrm{rr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z) \right] + \\ + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \kappa_{p,\mathrm{rv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z); \\ \vec{\boldsymbol{\psi}}_0'^{(\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) \left[1 + \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \kappa_{p,\mathrm{vv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z) \right] + \\ + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \kappa_{p,\mathrm{vr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z); \end{cases} \tag{14}$$

и

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} \kappa_{p,\mathrm{rr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z) + \\ + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} \kappa_{p,\mathrm{rv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z); \\ \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} \kappa_{p,\mathrm{vr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z) + \\ + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) \sum\limits_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} \kappa_{p,\mathrm{vv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z). \end{cases} \tag{15}$$

С учётом этих обозначений уравнения (9) могут быть схематично переписаны в виде

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{[\mathrm{N}]} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{(0,\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{(1,\mathrm{N})}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{[\mathrm{N}]} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{(0,\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{(1,\mathrm{N})}, \tag{16}$$

где составляющие решения однородного уравнения имеют вид

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{(0,\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})} + \sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} \delta_k; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{(0,\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\psi}}_0'^{(\mathrm{N})} + \sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(\mathrm{N})} \delta_k \tag{17}$$

и составляющие частного решения неоднородного уравнения запишутся

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{(1,\mathrm{N})} = \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}^{(1)}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{(1,\mathrm{N})} = \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \vec{\boldsymbol{\rho}}_{\Phi,p}'^{(1)} \tag{18}$$

или, использовав равенства [3], напишем

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{(1,\mathrm{N})} &= \tilde{u} \vec{\boldsymbol{\delta}} \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \chi_p^{(i_1,\ldots,i_p)}; \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{(1,\mathrm{N})} &= \tilde{u} \vec{\boldsymbol{\delta}} \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \chi_p'^{(i_1,\ldots,i_p)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Для удобства последующего изложения введем обозначения

$$\vec{\mathbf{i}}_1^{(0)} = \vec{\mathbf{Q}}_0; \quad \vec{\mathbf{i}}_2^{(0)} = \vec{\mathbf{c}}_0; \quad \vec{\mathbf{i}}_3^{(0)} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}_0, \tag{20}$$

а также векторы

$$\vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(frc,\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} + \tilde{u} \chi_\Phi^{(\mathrm{N})} \vec{\mathbf{i}}_k^{(0)}; \quad \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(frc,\mathrm{N})} = \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(\mathrm{N})} + \tilde{u} \chi_\Phi'^{(\mathrm{N})} \vec{\mathbf{i}}_k^{(0)}, \tag{21}$$

где в соответствии с видом уравнений (9), $\mathrm{N} \geq 1$

$$\begin{aligned} \chi_\Phi^{(\mathrm{N})}(a,z) &= \Pi(a,z) + \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \chi_p^{(i_1,\ldots,i_p)}; \\ \chi_\Phi'^{(\mathrm{N})}(a,z) &= \Pi'(a,z) + \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{a}_{i_1}^{(0)} \ldots \tilde{a}_{i_p}^{(0)} \chi_p'^{(i_1,\ldots,i_p)}. \end{aligned} \tag{22}$$

С учетом обозначения (20) уравнения (9) перепишутся следующим образом[1]:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{[\mathrm{N}]} &= \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})} + \sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta_k; \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi'^{[\mathrm{N}]} &= \vec{\boldsymbol{\psi}}_0'^{(\mathrm{N})} + \sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta_k. \end{aligned} \tag{23}$$

Векторы $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}$ и $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0'^{(\mathrm{N})}$ не зависят как от вектора управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$, так и от характеристик ДУ космического объекта, и представляют собой векторы положения и скорости КО в его пассивном движении. Действительно, если в уравнении [1] формально положить величину $\tilde{u}$,

[1]Непосредственное дифференцирование второго уравнения первой системы (11) позволяет получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворит вектор $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}$, $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0''^{(\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N}-1)} \sum\limits_{p=1} \tilde{a}_p^{(0)} z^p = 0$. При выводе этого уравнения использовались дифференциальные уравнения для нулевого [2] и последующих приближений по высоте сферического слоя решения однородного уравнения, а также уравнение свертки. Аналогично, дифференцирование второго уравнения второй системы (11) позволяет написать $\vec{\boldsymbol{\psi}}_k''^{(\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)} \sum\limits_{i=1} \tilde{A}_k^{(i)} z^i + \sum\limits_{p=2}^{\mathrm{N}} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p=1} \tilde{A}_k^{(i_1,\ldots,i_p)} z^{i_p} \vec{\boldsymbol{\rho}}_{p-1}^{(0,i_1,\ldots,i_{p-1})} = 0$ или, с учетом уравнения (4), $\vec{\boldsymbol{\psi}}_k''^{(\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N}-1)} \sum\limits_{i=1} \tilde{a}_i^{(0)} z^i + \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N}-1)} \sum\limits_{i=1} \tilde{a}_i^{(k)} z^i = 0$. Получим аналогичные дифференциальные уравнения для частного решения неоднородного уравнения. Продифференцируем второе уравнение системы (22). Используя дифференциальное уравнение [3], получим $\chi_\Phi''^{(\mathrm{N})} + \chi_\Phi^{(\mathrm{N})} + \chi_\Phi^{(\mathrm{N}\text{-}1)} \sum\limits_{i=1} \tilde{a}_i^{(0)} z^i = \dfrac{1}{a-z}$. В соответствии с определением (21) уравнение для вектора $\vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(frc,\mathrm{N})}$ примет вид $\vec{\boldsymbol{\psi}}_k''^{(frc,\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(frc,\mathrm{N})} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(frc,\mathrm{N}\text{-}1)} \sum\limits_{p=1} \tilde{a}_p^{(0)} z^p + \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N}-1)} \sum\limits_{i=1} \tilde{a}_i^{(k)} z^i = \tilde{u} \dfrac{1}{a-z} \vec{\mathbf{i}}_k^{(0)}$.

равной нулю, то получим уравнение пассивного движения КО, то есть составляющая $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}$ есть ничто иное, как аппроксимация пассивной траектории полёта КО. Качество указанной аппроксимации оценивается в следующей работе посредством численного моделирования различных вариантов управляемого движения. Вместе с тем в процессе моделирования аппроксимацию $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}$ влияния гравитационного поля на движение КО можно было бы не считать и не оценивать, а просто заменить на то движение, которое было бы в случае отсутствия тяги ДУ. Другими словами, уравнение (23) разделяет управляемое движение КО на пассивное движение по стартовой траектории и добавку влияния тяги ДУ, смешанную с изменением текущего положения КО.

Замена составляющей $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}$ фактическим полем тяготения не всегда рационально. Например, такая замена в процессе поиска искомого управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ по заданным краевым условиям может потребовать многократного решения уравнения Кеплера, что может быть неэффективным с точки зрения расхода процессорного времени. Как будет показано в следующей работе, точность представления вклада ньютонова поля тяготения в движение КО посредством вектора $\vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}$ настолько высока, что его замена фактическим пассивным движением часто нерациональна.

Отброшенные в выписанных уравнениях члены являются квадратичными или более высокого порядка формами от перекрёстных произведений величин δ_k и, как показано в работах [1–3], являются ничтожными. Линейное по проекциям δ_k представление решения удобно в обратных задачах определения управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ по заданным краевым условиям. Вместе с тем от этого удобства легко отказаться, если это окажется целесообразным.

Выписанное решение используется *только* на участке движения КО с работающими ДУ. Результатом такого движения является обеспечение необходимых значений векторов положения и скорости на момент выключения ДУ, которые при последующем пассивном движении КО в требуемом поле тяготения гарантируют выполнение поставленной перед объектом задачи.

Всю предыдущую историю рассуждений, приведшую к уравнениям (23), *теперь можем забыть*. Можем забыть управляемую систему дифференциальных уравнений [2], все последующие доказательства по получению компонент соответствующих приближений по высоте сферического слоя. *Единственно, что теперь следует принять*, так это *новый* закон (23) изменения векторов положения и скорости космического объекта в процессе его движения с работающими ДУ.

2. Определение управления по заданным краевым условиям

Допустим, что краевые условия для оптимизационной задачи [1] задаются в виде уравнений [1, (2,13)]. Тогда положение $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ и скорость $\vec{\boldsymbol{\rho}}'$ космического объекта на заданное безразмерное время z будут известны и уравнения для нахождения управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ примут вид

$$\sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta_k = \vec{\mathbf{w}}; \quad \sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k'^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta_k = \vec{\mathbf{w}}', \tag{24}$$

где вектор $\vec{\mathbf{w}}$ и его производная представляют собой добавки к векторам положения и скорости пассивного движения космического объекта за счет его движения с включенной ДУ

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\boldsymbol{\rho}}_z - \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})}; \quad \vec{\mathbf{w}}' = \vec{\boldsymbol{\rho}}_z' - \vec{\boldsymbol{\psi}}_0'^{(\mathrm{N})}. \tag{25}$$

Нижним индексом z обозначены известные (задаваемые) векторы. Разрешив второе уравнение (25) относительно координат δ_k, напишем

$$\begin{gathered} \delta_2 = \frac{(\vec{\mathbf{w}}', \vec{\mathbf{c}}_0)}{(\vec{\boldsymbol{\psi}}_2'^{(frc,\mathrm{N})}, \vec{\mathbf{c}}_0)}; \quad \delta_1 = \frac{(\vec{\mathbf{w}}' - \vec{\boldsymbol{\psi}}_2'^{(frc,\mathrm{N})}\delta_2, \vec{\mathbf{s}}_{v,3}^{(frc)})}{(\vec{\boldsymbol{\psi}}_1'^{(frc,\mathrm{N})}, \vec{\mathbf{s}}_{v,3}^{(frc)})}; \\ \delta_3 = \frac{(\vec{\mathbf{w}}' - \vec{\boldsymbol{\psi}}_2'^{(frc,\mathrm{N})}\delta_2, \vec{\mathbf{s}}_{v,1}^{(frc)})}{(\vec{\boldsymbol{\psi}}_3'^{(frc,\mathrm{N})}, \vec{\mathbf{s}}_{v,1}^{(frc)})}, \end{gathered} \tag{26}$$

где векторы $\vec{\mathbf{s}}_{v,1}^{(frc)}$ и $\vec{\mathbf{s}}_{v,3}^{(frc)}$ расположены в плоскости стартовой траектории КО и удовлетворят уравнениям

$$\vec{\mathbf{s}}_{v,1}^{(frc)} = \frac{\vec{\boldsymbol{\psi}}_1'^{(frc,\mathrm{N})} \times \vec{\mathbf{c}}_0}{\left\| \vec{\boldsymbol{\psi}}_1'^{(frc,\mathrm{N})} \times \vec{\mathbf{c}}_0 \right\|}; \quad \vec{\mathbf{s}}_{v,3}^{(frc)} = \frac{\vec{\boldsymbol{\psi}}_3'^{(frc,\mathrm{N})} \times \vec{\mathbf{c}}_0}{\left\| \vec{\boldsymbol{\psi}}_3'^{(frc,\mathrm{N})} \times \vec{\mathbf{c}}_0 \right\|}. \tag{27}$$

Выписанные формы (26) решения уравнения (24) не предусматривают выполнение нормировки вектора управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$. Условие $\|\vec{\boldsymbol{\delta}}\| = 1$ является дополнительным уравнением для определения требуемого времени активного движения космического объекта. Если некоторым образом выбранное время z, с использованием которого рассчитаны векторы (25), мало, то норма вектора $\vec{\boldsymbol{\delta}}$, найденного с использованием уравнений (26), будет больше единицы. При увеличении времени z величина $\|\vec{\boldsymbol{\delta}}\|$ бы-

Так что фактически уравнение управляемого движения, если мы используем только линейные формы от управления $\vec{\boldsymbol{\delta}}$, [1] заменяется следующим $\vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi''^{[\mathrm{N}]} + \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{[\mathrm{N}]} + \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{[\mathrm{N\text{-}1}]} \sum_{p=1} \tilde{a}_p^{(0)} z^p + \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N}-1)} \sum_{p=1} \left(\sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_p^{(i)} \delta_i \right) z^p = \frac{\tilde{u}}{a-z} \vec{\boldsymbol{\delta}}$. Полагая $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}^{[\mathrm{N}]} = \vec{\boldsymbol{\rho}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{[\mathrm{N}]}$, для невязки $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}^{[\mathrm{N}]}$ получим

$$\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}''^{[\mathrm{N}]} + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}^{[\mathrm{N}]} + \Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}^{[\mathrm{N\text{-}1}]} \sum_{p=1} \tilde{a}_p^{(0)} z^p + \left(\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}^{[\mathrm{N}]} + \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N})} + \sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol{\psi}}_k^{(\mathrm{N})} \delta_k + \vec{\boldsymbol{\rho}}_\Phi^{(1,\mathrm{N})} - \vec{\boldsymbol{\psi}}_0^{(\mathrm{N}-1)} \right) \sum_{p=1} \left(\sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_p^{(i)} \delta_i \right) z^p + \vec{\boldsymbol{\rho}} \sum_{p=1} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \tilde{a}_p^{(i,j)} \delta_i \delta_j + \ldots \right) z^p = 0,$$

то есть закон изменения невязки $\Delta\vec{\boldsymbol{\rho}}^{[\mathrm{N}]}$ не зависит от тяги ДУ КО и является функцией отбрасываемых членов гравитационного поля.

стро уменьшается и будет обязательно достигнут момент времени z_1, при котором в первый раз выполнится условие $\|\vec{\boldsymbol\delta}\| = 1$. При последующем увеличении времени z активного движения КО норма вектора $\vec{\boldsymbol\delta}$ окажется меньше единицы и затем обязательно настанет момент времени z_2, при котором опять выполнится условие $\|\vec{\boldsymbol\delta}\| = 1$. Эта неоднозначность решения уравнения (24) является следствием записи краевых условий в виде [1] и значительным изменением вектора скорости за счет длительного движения вокруг центра притяжения. Вместе с тем решаемая экстремальная задача заставляет считать приемлемым такое решение (26) уравнения (24), при котором будет обеспечиваться выполнение условия $\|\vec{\boldsymbol\delta}\| = 1$ при *минимально* возможном значении времени z_1.

Для поиска требуемого значения величины z_1 может быть использована, в частности, полная производная по времени от нормы $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|$ вектора $\vec{\boldsymbol\delta}$, найденного формально с использованием уравнений (26). Как было замечено, для недостаточного значения времени z величина $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z$ отрицательна. Если для некоторого времени $z_1>0$ в первый раз существует нулевое значение производной $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z$, при котором норма $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|$ больше единицы, и при этом $z=z_1$ величина $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|$ достигает локального минимума, то искомое решение экстремальной задачи практически отсутствует в силу недостаточности реактивного ускорения космического объекта. При этом все последующие решения уравнения (26), для которых $\|\vec{\boldsymbol\delta}\| =1$ при $z > z_1$, обеспечиваются исключительно за счет длительного пространственного перемещения по траектории. Реализация рассматриваемыми типами баллистических объектов подобных движений невозможна в силу ограниченности времени их существования.

В процессе численного моделирования при поиске фактического времени z_1 активного движения объекта с успехом может быть использована производная $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z$. Если расчет вектора $\vec{\boldsymbol\delta}$ производится с использованием итерационного процесса, то есть без принятия уравнения (23) в качестве закона движения управляемой системы для получения производной $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z$ следует использовать результаты работ [2] и [3].

Использование правила (23) облегчает задачу. Для получения производной $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z$ продифференцируем уравнение (24). Использовав результаты настоящего раздела, без доказательства, выпишем уравнения для нахождения δ'_k

$$\sum_{k=1}^{3} \vec{\boldsymbol\psi}_k'^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta'_k = \vec{\boldsymbol\rho}_\Phi^{[\mathrm{N}]} + \vec{\boldsymbol\rho}_\Phi^{[\mathrm{N}\text{-}1]} \cdot \sum_{i=1} \tilde{a}_i^{(0)} z^i + \\ + \vec{\boldsymbol\psi}_0^{(\mathrm{N}-1)} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1} \tilde{a}_i^{(k)} z^i \right) \delta_k - \frac{\tilde{u}}{a-z} \vec{\boldsymbol\delta}, \tag{28}$$

в котором использовано уравнение (23), а также запись

$$\vec{\boldsymbol\delta} = \sum_{k=1}^{3} \vec{\mathbf{i}}_k^{(0)} \delta_k .$$

Вместо вектора $\vec{\boldsymbol\delta}$ в процессе численного моделирования следует использовать правые части уравнений (26). Найденные из последнего уравнения производные от величин δ'_k с учетом равенства $\vec{\boldsymbol\delta}' = \delta'_1 \cdot \vec{\mathbf{Q}}_0 + \delta'_2 \cdot \vec{\mathbf{c}}_0 + \delta'_3 \cdot \vec{\boldsymbol\gamma}_0$ необходимо подставить в выражение

$$\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z = (\vec{\boldsymbol\delta}, \vec{\boldsymbol\delta}') \big/ \|\vec{\boldsymbol\delta}\| .$$

Решение уравнения (28) находим непосредственно. Положим

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\boldsymbol\rho}_\Phi^{[\mathrm{N}]} + \vec{\boldsymbol\rho}_\Phi^{[\mathrm{N}\text{-}1]} \cdot \sum_{i=1} \tilde{a}_i^{(0)} z^i + \\ + \vec{\boldsymbol\psi}_0^{(\mathrm{N}-1)} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1} \tilde{a}_i^{(k)} z^i \right) \delta_k - \frac{\tilde{u}}{a-z} \vec{\boldsymbol\delta}.$$

В силу того, что все векторы $\vec{\boldsymbol\psi}_1'^{(frc)}$ и $\vec{\boldsymbol\psi}_3'^{(frc)}$ находятся в плоскости первоначальной траектории, сразу выписываем

$$\delta'_2 = \frac{(\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{i}}_2^{(0)})}{(\vec{\boldsymbol\psi}_2'^{(frc,\mathrm{N})}, \vec{\mathbf{i}}_2^{(0)})}.$$

Умножая скалярно уравнения (28) последовательно на векторы (27), формально получаем

$$\delta'_1 = \frac{(\vec{\mathbf{P}} - \vec{\boldsymbol\psi}_2'^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta'_2, \vec{\mathbf{s}}_{v,3}^{(frc)})}{(\vec{\boldsymbol\psi}_1'^{(frc,\mathrm{N})}, \vec{\mathbf{s}}_{v,3}^{(frc)})}; \quad \delta'_3 = \frac{(\vec{\mathbf{P}} - \vec{\boldsymbol\psi}_2'^{(frc,\mathrm{N})} \cdot \delta'_2, \vec{\mathbf{s}}_{v,1}^{(frc)})}{(\vec{\boldsymbol\psi}_3'^{(frc,\mathrm{N})}, \vec{\mathbf{s}}_{v,1}^{(frc)})}.$$

В процессе численного моделирования направление вектора тяги рассчитывается с использованием уравнений (26), а производная $\|\vec{\boldsymbol\delta}\|'_z$, если принято решение ее задействовать, – с использованием выписанного решения. Задействование этих положений существенно повысит устойчивость программно-реализованных алгоритмов, приведет к значительной экономии процессорного времени и не ухудшит точность вычислений.

3. Коэффициенты разложения $1/\rho^3$. Ответы на основные вопросы

На этапе формализации задачи были введены коэффициенты $\tilde{a}_k$ разложения величины $1/\rho^3$ [1], используемые для замены ньютонова поля тяготения сферически-однородным полем. Вместе с тем до настоящего раздела оставались без ответа вопросы о правомерности такой замены и о точности представления траектории движения космического объекта по отношению к аналогичной траектории в ньютоновом поле тяготения, не раскрыты алгоритмические правила вычисления этих коэффициентов. Обсуждение этих, а также других вопросов, поднятых в предыдущем разделе, производится ниже. Дополнительно определимся со степенью полинома разложения [1, (3,9)], которую есть смысл учитывать в процессе практического моделирования.

Предмет исследований работы накладывает на коэффициенты $\tilde{a}_k$ некоторые ограничения, предусматривающие необходимость обеспечения максимальной близости синтезируемой траектории управляемого движения объекта к аналогичной траектории в поле тяготения. При этом указанная близость должна при уменьшении времени z стремиться к полному совпадению обеих траекторий. В общем случае таким свойством обладают только коэффициенты, полученные посредством разложения функции $1/\rho^3$ в ряд Тейлора.

В *качестве примера* ниже приводятся коэффициенты для ньютонова поля тяготения. Правило расчета коэффициентов $\tilde{a}_k$ в разделе конкретизируется без изложения соответствующих доказательств. Вместе с тем укажем, что в процессе получения этих коэффициентов были использованы производные:

• скорости изменения орт сопутствующей системы координат

$$\vec{\mathbf{Q}}' = -\frac{\nu}{\rho}\cos\theta\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}} + \frac{\tilde{G}}{\nu\cos\theta}\delta_2\cdot\vec{\mathbf{c}};$$

$$\vec{\mathbf{c}}' = -\frac{\tilde{G}}{\nu\cos\theta}\delta_2\cdot\vec{\mathbf{Q}};\qquad \vec{\boldsymbol{\gamma}}' = \frac{\nu\cos\theta}{\rho}\vec{\mathbf{Q}};$$

• скорости изменения нормированных проекций сорости космического объекта на орты сопутствующей системы координат

$$\left(\frac{\nu\cos\theta}{\rho}\right)' = \frac{1}{\rho}\tilde{G}\delta_1 - 2\frac{\nu\cos\theta}{\rho}\frac{\rho'}{\rho};$$

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' = \left(\frac{\nu\cos\theta}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{\rho^3} - \frac{\rho'^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\tilde{G}\delta_3;$$

• скорости изменения проекций постоянного в инерциальном пространстве вектора $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ на орты сопутствующей системы координат [1]

$$\delta_1' = \frac{\tilde{G}}{\nu\cos\theta}\delta_2^2 - \frac{\nu\cos\theta}{\rho}\cdot\delta_3;$$

$$\delta_2' = -\frac{\tilde{G}}{\nu\cos\theta}\delta_1\delta_2;\qquad \delta_3' = \frac{\nu\cos\theta}{\rho}\delta_1;$$

• скорость изменения реактивного ускорения [1] космического объекта

$$\tilde{G}' = \tilde{G}^2/\tilde{u}.$$

Правило расчета коэффициентов $\tilde{a}_k$ дается в соответствии с представлением [1, (3,15)]

$$\tilde{a}_k = \tilde{a}_k^{(0)} + \sum_{i=1}^{3}\tilde{a}_k^{(i)}\delta_i + \sum_{i,j=1}^{3}\tilde{a}_k^{(i,j)}\delta_i\delta_j + \ldots$$

На траектории пассивного движения производные от нормы ρ радиус-вектора космического объекта на время z=0 начала управляемого движения объекта рассчитываются в соответствии с уравнениями

$$\begin{cases}\rho_{\Pi,0}^{(2)} = \nu_0^2\cos^2\theta_0 - 1;\quad \rho_{\Pi,0}^{(3)} = (2-3\nu_0^2\cos^2\theta_0)\rho_0';\\ \rho_{\Pi,0}^{(4)} = (2-3\nu_0^2\cos^2\theta_0)(\nu_0^2\cos^2\theta_0 - 1) +\\ +6(2\nu_0^2\cos^2\theta_0 - 1)\rho_0'^2;\\ \rho_{\Pi,0}^{(5)} = \rho_0'\cdot[12(2-3\nu_0\cos\theta_0)\rho_0'^2 +\\ +18(1-2\nu_0\cos\theta_0)(1-\nu_0^2\cos^2\theta_0) + (2-3\nu_0^2\cos^2\theta_0)^2].\end{cases}\tag{29}$$

Нижний индекс 0 раскрывает факт, что производные выписаны на время z=0, для которого в соответствии с работой [1] норма ρ безразмерного радиус-вектора равна единице, $\rho(0)$=1. Нижний индекс п говорит о том, что данные производные получены в предположения отсутствия тяги ДУ космического объекта. Величина θ_0 определяет угол наклона траектории космического объекта на время включения ДУ, то есть она равна углу между вектором скорости $\vec{\boldsymbol{\rho}}'$ и местным горизонтом $\vec{\mathbf{Q}}$. Все остальные обозначения даны в работе [1].

Введем в рассмотрение коэффициенты, характеризующие наряду с воздействием силы притяжения (29) вклад силы тяги работающей ДУ в производные от нормы ρ радиус-вектора космического объекта. Эти коэффициенты используются при расчёте множителей $\tilde{a}_k^{(i)}, i\geq 1$, к направлениям δ_i вектора тяги КО

$$\sigma_1^{(3)} = 3\nu_0\cos\theta_0;\quad \sigma_1^{(4)} = 4\nu_0\cos\theta_0\left(1/a - 3\rho_0'\right);$$
$$\sigma_1^{(5)} = 6\nu_0\cos\theta_0(6\rho_0'^2 - 5\nu_0^2\cos^2\theta_0 + 4) +$$
$$+12\rho_0'^2 + 10\nu_0\cos\theta_0\left(1/a^2 - 2\rho_0'/a\right)$$

и

$$\sigma_3^{(3)} = 1/a;\quad \sigma_3^{(4)} = 2(1/a^2 + 1 - 3\nu_0^2\cos^2\theta_0);$$
$$\sigma_3^{(5)} = 6\rho_0'(6\nu_0^2\cos^2\theta_0 + 4\nu_0\cos\theta_0 - 3) +$$
$$+2(1-5\nu_0^2\cos^2\theta_0)/a + 6/a^3.$$

В соответствии с введенными обозначениями (29) правило расчета коэффициентов $\tilde{a}_k^{(0)}$, описывающих пассивное движение космического объекта, определяется уравнениями

$$\begin{cases}\tilde{a}_1^{(0)} = -3\rho_0';\quad \tilde{a}_2^{(0)} = 6\rho_0'^2 - 3\rho_{\Pi,0}^{(2)}/2;\\ \tilde{a}_3^{(0)} = 6\rho_0'\rho_{\Pi,0}^{(2)} - 10\rho_0'^3 - \rho_{\Pi,0}^{(3)}/2;\\ \tilde{a}_4^{(0)} = 30\rho_0'^4/2 + 2\rho_0'\rho_{\Pi,0}^{(3)} -\\ -30\rho_0'^2\rho_{\Pi,0}^{(2)}/2 + 3\rho_{\Pi,0}^{(2)2}/2 - \rho_{\Pi,0}^{(4)}/8;\\ \tilde{a}_5^{(0)} = -21\rho_0'^5 + 30\rho_0'^3\rho_{\Pi,0}^{(2)} - 15\rho_0'\rho_{\Pi,0}^{(2)2}/2 +\\ +(\rho_{\Pi,0}^{(2)} - 5\rho_0'^2)\rho_{\Pi,0}^{(3)} + \rho_0'\rho_{\Pi,0}^{(4)}/2 - \rho_{\Pi,0}^{(5)}/40.\end{cases}\tag{30}$$

Коэффициенты $\tilde{a}_k^{(i)}, i \geq 1$, являющиеся множителями при первых степенях координат δ_i, с использованием введенных выше коэффициентов $\sigma_k^{(i)}$ рассчитываются по правилам:

• коэффициенты $\tilde{a}_k^{(1)}$ при δ_1

$$\begin{cases} \tilde{a}_1^{(1)} = 0; \quad \tilde{a}_2^{(1)} = 0; \quad \tilde{a}_3^{(1)} = -\dfrac{\tilde{u}}{a}\dfrac{\sigma_1^{(3)}}{2}; \\ \tilde{a}_4^{(1)} = \dfrac{\tilde{u}}{a}\left(2\rho_0'\sigma_1^{(3)} - \dfrac{\sigma_1^{(4)}}{8}\right); \\ \tilde{a}_5^{(1)} = \dfrac{\tilde{u}}{a}\left[(\rho_{\Pi,0}^{(2)} - 5\rho_0'^2)\sigma_1^{(3)} + \dfrac{1}{2}\rho_0'\sigma_1^{(4)} - \dfrac{1}{40}\sigma_1^{(5)}\right]; \end{cases} \tag{31}$$

• коэффициенты $\tilde{a}_k^{(2)}$ при δ_2

$$\tilde{a}_1^{(2)} = 0; \quad \tilde{a}_2^{(2)} = 0; \quad \tilde{a}_3^{(2)} = 0; \quad \tilde{a}_4^{(2)} = 0 \quad \tilde{a}_5^{(2)} = 0; \tag{32}$$

• коэффициенты $\tilde{a}_k^{(3)}$ при δ_3

$$\begin{cases} \tilde{a}_1^{(3)} = 0; \quad \tilde{a}_2^{(3)} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{\tilde{u}}{a}; \quad \tilde{a}_3^{(3)} = \dfrac{\tilde{u}}{a}\left(6\rho_0' - \dfrac{\sigma_3^{(3)}}{2}\right); \\ \tilde{a}_4^{(3)} = \dfrac{\tilde{u}}{a}\left(2\rho_0'\sigma_3^{(3)} - \dfrac{30}{2}\rho_0'^2 + 3\rho_{\Pi,0}^{(2)} - \dfrac{\sigma_3^{(4)}}{8}\right); \\ \tilde{a}_5^{(3)} = \dfrac{\tilde{u}}{a}\Big[30\rho_0'^3 - 15\rho_0'\rho_{\Pi,0}^{(2)} + (\rho_{\Pi,0}^{(2)} - 5\rho_0'^2)\sigma_3^{(3)} + \\ + \rho_{\Pi,0}^{(3)} + \dfrac{\rho_0'\sigma_3^{(4)}}{2} - \dfrac{\sigma_3^{(5)}}{40}\Big]. \end{cases} \tag{33}$$

Коэффициенты $\tilde{a}_k^{(i,j)}, i, j \geq 1$, являющиеся множителями [1, (3,15)] при квадратичных формах $\delta_i\delta_j$, появляются в коэффициентах $\tilde{a}_k$ лишь при $k \geq 4$. Отличные от нуля коэффициенты $\tilde{a}_k^{(i,j)}$ определяются уравнениями

$$\begin{cases} \tilde{a}_4^{(1,1)} = \tilde{a}_4^{(2,2)} = -\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{\tilde{u}}{a}\right)^2; \quad \tilde{a}_4^{(3,3)} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\tilde{u}}{a}\right)^2; \\ \tilde{a}_5^{(1,3)} = \dfrac{15}{4}\nu_0\cos\theta_0\left(\dfrac{\tilde{u}}{a}\right)^2; \\ \tilde{a}_5^{(1,1)} = \tilde{a}_5^{(2,2)} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{15}{2}\rho_0'\right)\left(\dfrac{\tilde{u}}{a}\right)^2; \\ \tilde{a}_5^{(3,3)} = \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{15}{2}\rho_0'\right)\left(\dfrac{\tilde{u}}{a}\right)^2. \end{cases} \tag{34}$$

Выводы

Решена ограниченная краевая задача, то есть определено управление направлением вектора тяги маневрирующего объекта при задании цели управляемого процесса в виде требуемой скорости бросания. Законность таких упрощений показана выше и в следующем разделе.

Определена точность замены поля тяготения сферически-однородным, а также степень полинома представления траектории управляемого движения КО, которую есть смысл учитывать в процессе практического моделирования.

Использование ньютонова поля тяготения для описания движения космического объекта для последующей замены сферически-однородным не принципиально. В процессе практического моделирования могут использоваться и иные поля, учитывающие требуемый набор гармоник разложения геопотенциала Земли. В этом случае выписанные выше формулы расчета коэффициентов $\tilde{a}_k$ несколько трансформируются. Однако общая идеология методики, безусловно, сохранится.

Литература

1. Алферьев В. Л. "Использование сферически-однородного поля для моделирования управляемого движения космических объектов. Постановка задачи"//Двойные технологии №4, 2012.

2. Алферьев В. Л.. "Свойства траекторий управляемого движения в сферически-однородном поле"// Двойные технологии №1, 2013.

3. Алферьев В. Л.. "О решении уравнений движения маневрирующих объектов в сферически-однородном поле"// Двойные технологии №2, 2013.

Материал поступил в редакцию 19. 04. 2013 г.