УДК 629.7.05.

© Алферьев В.Л.
Alferyev V.

СВОЙСТВА МАТРИЦ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КЕПЛЕРОВОЙ ДУГЕ

PROPERTIES OF MATRICES OF PARTIAL ARC ON THE KEPLER

Аннотация. *Приведен удобный для программирования и последующего практического использования общий вид матриц частных производных на кеплеровой дуге. Представлено решение обратной вариационной задачи и определены общие условия его существования.*

Annotation. *An easy to program and the subsequent practical use of the general form of the matrix of partial derivatives at Kepler arc. Presented by the solution of the inverse variational problem and define the general conditions of its existence.*

Ключевые слова. *Матрица, частная производная, кеплерова дуга, свойство, вариационная задача.*

Key words. *Matrix, the partial derivative, Keplerian arc, the property, the variational problem.*

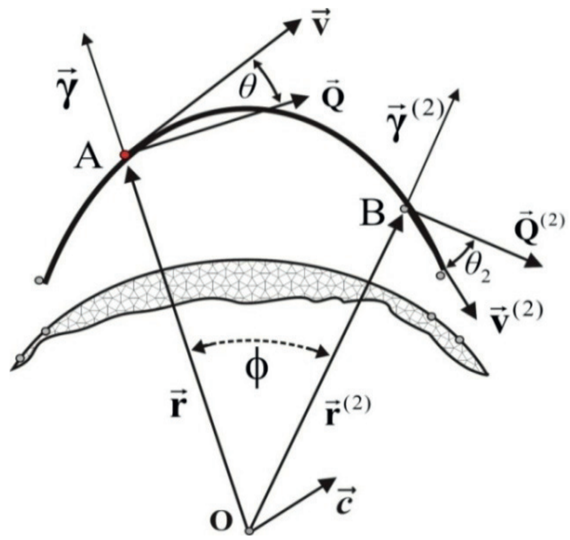
В работе [1] получены матрицы изохронных частных производных на кеплеровой дуге, получившие впоследствии широкое распространение в практических вычислениях. Вместе с тем на практике решение большинства вариационных задач не ограничивается использованием только изохронных частных производных. С целью последующего развития темы для решения практических задач в работе [2] по результатам представлен общий вид частных производных на кеплеровой дуге. В процессе изложения материала выписан удобный для программирования вид матриц изохронных производных, а также определена их взаимосвязь с соответствующими полными матрицами частных производных. Представлен явный вид и общие условия существования решения обратной вариационной задачи.

Все необходимые соотношения, связывающие траекторные параметры в двух точках на кеплеровой дуге, выписываются без доказательств [2].

Статья является первой из представляемой серии. Материал применим для непосредственного инженерного использования. Все соотношения справедливы для произвольного вида кеплеровой дуги.

1. Основные обозначения

μ – гравитационная постоянная Земли;
t – текущее время;



Расчетная схема движения КО по кеплеровой дуге

$\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{v}}$ – текущие векторы положения и скорости центра масс КО в момент времени t (точка А, рисунок);
θ – угол наклона траектории в точке А;
ξ – истинная аномалия текущего положения КО;
R – норма радиус-вектора центра масс КО, $R = \|\vec{\mathbf{r}}\|$;
V – скорость центра масс КО, $V = \|\vec{\mathbf{v}}\|$;
$\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ – единичный вектор, направленный из центра притяжения в сторону центра масс КО (местная вертикаль), $\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \vec{\mathbf{r}}/R$;
C – норма вектора момента количества движения центра масс КО (интеграл площадей), $C = RV\cos\theta$;

Алферьев Виктор Леонидович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник МАК «Вымпел».

Alferyev Victor – PhD., senior researcher IJSC «Vympel».

$\vec{\mathbf{c}}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора момента количества движения, $\vec{\mathbf{c}} = [\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}]/C$;

$\vec{\mathbf{Q}}$ – вектор местного горизонта, $\vec{\mathbf{Q}} = [\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\boldsymbol{\gamma}}]$;

$\vec{\mathbf{x}}^{(a)}$ – направление скорости центра масс КО в точке А, $\vec{\mathbf{x}}^{(a)} = \vec{\mathbf{v}}/V$;

$\vec{\mathbf{n}}^{(a)}$ – нормаль к траектории КО в точке А, расположенная в плоскости траектории КО;

$$\vec{\mathbf{n}}^{(a)} = [\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{x}}^{(a)}] = \vec{\mathbf{Q}} \sin\theta - \vec{\boldsymbol{\gamma}} \cos\theta; \quad (1.1)$$

$\vec{\mathbf{F}}$ – вектор Лапласа, $\vec{\mathbf{F}} = -\mu \cdot \vec{\boldsymbol{\gamma}} + [\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{C}}]$;

e – эксцентриситет, $e = \|\vec{\mathbf{F}}\|/\mu$;

p – фокальный параметр, $p=C^2/\mu$;

a – большая полуось, $a=p/(1-e^2)$;

$t^{(2)}$ – время прохождения точки В;

$\xi^{(2)}$– истинная аномалия на траектории в точке В;

ϕ – угловая дальность перелёта от точки А до точки В (рисунок), $\phi = \xi^{(2)} - \xi$;

$\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ – векторы положения и скорости центра масс КО в момент времени $t^{(2)}$ (точка В, рисунок);

θ_2 – угол наклона траектории в точке В;

$R_2 = \|\vec{\mathbf{r}}^{(2)}\|$ – норма радиус-вектора центра масс КО в точке В;

$\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}$ – единичный вектор, направленный из центра притяжения в сторону точки В, $\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \vec{\mathbf{r}}^{(2)}/R_2$;

$\vec{\mathbf{Q}}^{(2)}$ – вектор местного горизонта, $\vec{\mathbf{Q}}^{(2)} = [\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}]$;

$\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}$ – направление скорости центра масс КО в точке В, $\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)} = \vec{\mathbf{v}}^{(2)}/V_2$;

$\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)}$ – нормаль к траектории КО в точке ;

$$\vec{\mathbf{n}}_2^{(a)} = [\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}] = \vec{\mathbf{Q}}^{(2)} \sin\theta_2 - \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \cos\theta_2; \quad (1.2)$$

ΔT – время перелета из текущего положения до точки В, $\Delta T = t^{(2)} - t$;

χ – отношение норм радиус-векторов в обеих точках, $\chi = R/R_2$;

$\Delta\tau$ – безразмерное время перелёта из точки А в точку В,

$$\Delta\tau = 3\frac{C}{RR_2}\Delta T; \quad (1.3)$$

W_2– тангенс угла между v-направлением и местным горизонтом в точке А (рисунок)[2] [1],

$$W_2 = \frac{R}{p}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} + \frac{\chi - \cos\phi}{\sin\phi}; \quad (1.4)$$

U_2 – вспомогательная функция для записи универсальной функции A_2 полётного времени

$$\mathrm{U}_2 = 3 + (\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta)\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}; \quad (1.5)$$

A_2 – универсальная функция полётного времени [2], не зависящая от эксцентриситета траектории КО[2],

$$\mathrm{A}_2 = \begin{cases} \dfrac{a}{R}(\Delta\tau - \mathrm{U}_2\sin\phi), & e <> 1; \\ \left(\dfrac{1}{\chi} + 1\right)(\sin\xi_2 - \sin\xi), & e = 1; \end{cases} \quad (1.6)$$

J_2 и $\hat{\Upsilon}$ – коэффициенты пересчёта импульса скорости КО в точке А в изменение координат точки В (рисунок)[3],

$$\mathrm{J}_2 = \frac{R_2}{p}\left(\frac{1}{\chi} + 1\right)(1 - \cos\phi) - \mathrm{A}_2\operatorname{tg}\theta_2; \quad (1.7)$$

$$\hat{\Upsilon} = \frac{R_2}{p}(\chi + 1)(1 - \cos\phi) + \mathrm{A}_2\operatorname{tg}\theta. \quad (1.8)$$

2. Общие сведения

2.1. *Запись матриц частных производных в различных системах координат*

Уточним запись [2] матриц частных производных посредством прямого произведения векторов. Рассмотрим вектор $\vec{\mathbf{a}}$, определённый в системе координат (СК) $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$, $\vec{\mathbf{a}} = \sum_k a_k \vec{\mathbf{e}}_k$ и вектор $\vec{\mathbf{a}}^{(2)}$, определённый в СК $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(2)})$, $\vec{\mathbf{a}}^{(2)} = \sum_k a_k^{(2)} \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}$. Оператор прямого произведения двух векторов $\vec{\mathbf{a}}^{(2)}$ и $\vec{\mathbf{a}}$ определяет матрицу

$$\mathbf{A}_{\Pi} = \vec{\mathbf{a}}^{(2)} \otimes \vec{\mathbf{a}} = \sum_{k,j} A_j^{(k)} \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)} \otimes \vec{\mathbf{e}}_j,$$

где элементы матрицы $A_j^{(k)} = a_k^{(2)} a_j$. Матрица $\mathbf{A} = \{A_j^{(k)}\}$ определяет прямое произведение векторов, каждый из которых задан в собственной системе координат. При этом матрица $\mathbf{A}_{\text{п}}$ окажется определённой в общей геоцентрической инерциальной системе координат, выбранной для описания задачи.

---

[1] При задании импульса скорости вдоль v – направления результирующее направление вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ в точке В (рисунок) совпадает с направлением $\vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}$ вектора скорости КО в этой точке, в силу чего координаты пересечения траекторией КО некоторой неподвижной поверхности в инерциальном пространстве не изменяются.

[2] Можно показать [2], что на параболической траектории будут выполнены равенства, являющиеся следствием пределов

$$\lim_{e\to1}\Delta\tau = \mathrm{U}_2\sin\beta; \quad \lim_{e\to1}\frac{a}{R}(\Delta\tau - \mathrm{U}_2\sin\phi) = \left(\frac{1}{\chi}+1\right)(\sin\xi_2 - \sin\xi).$$

Во всех формулах настоящей работы вместо полётного времени между точками А и В (рисунок) будет присутствовать выражение A_2, что обеспечивает универсальность записи соответствующих соотношений. Под универсальностью записи формул понимается их справедливость для любого значения эксцентриситета траектории КО.

[3] J_2 и $\hat{\Upsilon}$ – просто удачные обозначения в баллистических вычислениях. При этом их физический смысл следующий:

J_2 – коэффициент пересчёта импульса скорости, производимого вдоль местного горизонта в точке А, в вариацию $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ координат точки В в проекции на соответствующий радиус-вектор $(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}) = \frac{RC}{\mu}\mathrm{J}_2(\delta\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{Q}})$;

$\hat{\Upsilon}$ – коэффициент пересчёта импульса скорости, производимого вдоль местной вертикали в точке А, в вариацию $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ координат точки В в проекции на соответствующий местный горизонт $(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\mathbf{Q}}^{(2)}) = -\frac{RC}{\mu}\hat{\Upsilon}(\delta\vec{\mathbf{v}}, \vec{\boldsymbol{\gamma}})$.

Определим запись частной производной от вектора $\vec{\mathbf{b}}^{(2)}$, определённого в точке В (рисунок), в которой задана система координат (СК) $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(2)})$, по другому вектору $\vec{\mathbf{b}}$, определённому в точке А (рисунок) в СК $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$. Векторы $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{b}}^{(2)}$ являются гладкими векторными функциями координат на кеплеровой дуге, разнесёнными угловой дальностью перелёта ϕ и временем ΔT.

Для раскрытия частной производной $\partial\vec{\mathbf{b}}^{(2)}/\partial\vec{\mathbf{b}}$ используется запись

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{b}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{b}}} = \sum_{k,j} B_j^{(k)} \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)} \otimes \vec{\mathbf{e}}_j. \tag{2.1}$$

Строки матрицы $\mathbf{B} = \{B_j^{(k)}\}$ будут векторами, определёнными в СК $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$, а столбцы – соответственно векторами, определёнными в системе координат $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(2)})$. Сама матрица $\partial\vec{\mathbf{b}}^{(2)}/\partial\vec{\mathbf{b}}$ (2.1) имеет смысл в геоцентрической инерциальной СК, в которой определены используемые в расчетах векторные интегралы движения.

Транспонирование матрицы (2.1) производится посредством простой замены местами векторов $\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}$ и $\vec{\mathbf{e}}_j$. При этом умножение матрицы (2.1) на векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{a}}^{(2)}$, определённые в точках А и В (рисунок), производится по правилам

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{b}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{b}}}\vec{\mathbf{a}} = \sum_{k,j} B_j^{(k)} (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{e}}_j) \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)};$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{b}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{b}}}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{a}}^{(2)} = \sum_{k,j} B_j^{(k)} (\vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}) \vec{\mathbf{e}}_j.$$

Для практического использования примем в качестве рабочей системы координат в точке А (рисунок) {то есть в качестве направлений $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$} тройку векторов $(\vec{\mathbf{Q}}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\boldsymbol{\gamma}})$

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{Q}}; \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{c}}; \quad \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{2.2}$$

а в качестве рабочей системы координат в точке В, то есть в качестве направлений $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(2)})$, соответственно, тройку векторов $(\vec{\mathbf{Q}}^{(2)}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)})$

$$\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)} = \vec{\mathbf{Q}}^{(2)}; \quad \vec{\mathbf{e}}_2^{(2)} = \vec{\mathbf{c}}; \quad \vec{\mathbf{e}}_3^{(2)} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}. \tag{2.3}$$

При таком выборе каждый из базисов $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ и $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(2)})$ становится ортонормированным.

2.2. *Общий вид матриц частных производных*

Приведём основные результаты работы [2] в части вида матриц частных производных на кеплеровой дуге, необходимые для последующего изложения.

Обозначим через $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{v}}$ соответственно векторы положения и скорости КО на время t (точка А, рисунок), а через $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ – векторы положения и скорости КО на время $t^{(2)}$ (точка В, рисунок). Предположим также, что из точки А в точку В космический объект движется по кеплеровой дуге. Тогда общий вид частных производных (для любого значения эксцентриситета) от векторов $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ по векторам $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{v}}$ ([2], 6.18, 6.19), могут быть записаны в виде суммы изохронных составляющих и добавок, включающих соответствующие частные производных от времени t_2 прихода КО в точку В

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}} &= \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} + \vec{\mathbf{v}}^{(2)} \otimes \frac{\partial(t^{(2)}-t)}{\partial\vec{\mathbf{r}}}; \\ \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}} &= \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} + \vec{\mathbf{v}}^{(2)} \otimes \frac{\partial(t^{(2)}-t)}{\partial\vec{\mathbf{v}}}; \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}} &= \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} - \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \frac{\partial(t^{(2)}-t)}{\partial\vec{\mathbf{r}}}; \\ \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}} &= \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} - \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \frac{\partial(t^{(2)}-t)}{\partial\vec{\mathbf{v}}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В данной и последующих работах, если не оговорено, будем предполагать, что величина является независимым текущим временем на траектории движения КО. В силу этого в правых частях уравнений (2.4) и (2.5) частные производные $\partial t/\partial\vec{\mathbf{r}}$ и $\partial t/\partial\vec{\mathbf{v}}$ считаются равными нулю. Вместе с тем существуют задачи, в которых это предположение не верно. Например, если через t обозначено время прохождения перигея или время прохождения восходящего узла, то частные производные $\partial t/\partial\vec{\mathbf{r}}$ и $\partial t/\partial\vec{\mathbf{v}}$ окажутся отличными от нуля и определят накладываемые на левой конце вариационной задачи связи, которым должны удовлетворять вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}$, $\delta\vec{\mathbf{v}}$ и δt.

Изохронные составляющие (в предположении $t^{(2)} = const$) выписанных производных имеют вид

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} &= \vec{\mathbf{Q}}^{(2)} \otimes \left[\left(\operatorname{ctg}\phi - \frac{R_2}{p}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right)\cdot\vec{\mathbf{Q}} - \vec{\boldsymbol{\gamma}}\right]\sin\phi + \\ &+ \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \left\{\left[\frac{R_2}{p}\left(\frac{1}{\chi}+1\right)\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} + \operatorname{ctg}\phi\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}} + \vec{\mathbf{Q}}\right\}\sin\phi - \\ &- \frac{R_2}{C}\mathrm{A}_2\cdot\vec{\mathbf{v}}^{(2)} \otimes \vec{\boldsymbol{\gamma}} + f_2^{(\mathrm{r})}\cdot\vec{\mathbf{c}} \otimes \vec{\mathbf{c}}; \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} &= g_2^{(\mathrm{r})}\cdot\vec{\mathbf{Q}}^{(2)} \otimes \left[\vec{\mathbf{Q}} - (\chi+1)\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}\right] + \\ &+ g_2^{(\mathrm{r})}\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \left\{\left(\frac{1}{\chi}+1\right)\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\vec{\mathbf{Q}} + \left[\frac{(\chi+1)^2}{\chi} - \mathrm{U}_2\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}\right\} - \\ &- \frac{RR_2}{\mu}\mathrm{A}_2\cdot\vec{\mathbf{v}}^{(2)} \otimes (\operatorname{tg}\theta\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}} + \vec{\mathbf{Q}}) + g_2^{(\mathrm{r})}\cdot\vec{\mathbf{c}} \otimes \vec{\mathbf{c}}; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} &= \frac{\mu}{RC}\sin\phi\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \left[(\chi+1)\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}} + \chi\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\cdot\vec{\mathbf{Q}}\right] - \\ &- \frac{\mu}{RC}\sin\phi\cdot\vec{\mathbf{Q}}^{(2)} \otimes \left[\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\vec{\boldsymbol{\gamma}} + \left(1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right)\cdot\vec{\mathbf{Q}}\right] + \\ &+ f_2^{(\mathrm{v})}\cdot\vec{\mathbf{c}} \otimes \vec{\mathbf{c}} + \frac{\mu}{R_2 C}\mathrm{A}_2\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \vec{\boldsymbol{\gamma}}; \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} = \sin\phi\cdot\vec{\mathbf{Q}}^{(2)}\otimes\left[\left(\operatorname{ctg}\phi-\frac{R}{P}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right)\cdot\vec{\mathbf{Q}}-\vec{\boldsymbol{\gamma}}\right]+$$
$$+\sin\phi\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\otimes\left\{\left[\operatorname{ctg}\phi+\frac{R}{P}(\chi+1)\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}+\vec{\mathbf{Q}}\right\}+$$
$$+\chi\mathrm{A}_2\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\otimes(\operatorname{tg}\theta\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}+\vec{\mathbf{Q}})+g_2^{(\mathrm{v})}\cdot\vec{\mathbf{c}}\otimes\vec{\mathbf{c}}. \tag{2.9}$$

При написании уравнений (2.6) – (2.9) в качестве обозначений использованы коэффициенты $f_2^{(\mathrm{r})}$, $g_2^{(\mathrm{r})}$, $f_2^{(\mathrm{v})}$ и $g_2^{(\mathrm{v})}$ связи двух положений на кеплеровой дуге и такие, что

$$\begin{cases}\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = f_2^{(\mathrm{r})}\vec{\mathbf{r}}+g_2^{(\mathrm{r})}\vec{\mathbf{v}};\\ \vec{\mathbf{v}}^{(2)} = f_2^{(\mathrm{v})}\vec{\mathbf{r}}+g_2^{(\mathrm{v})}\vec{\mathbf{v}};\end{cases}\quad \begin{cases}\vec{\mathbf{r}} = g_2^{(\mathrm{v})}\vec{\mathbf{r}}^{(2)}-g_2^{(\mathrm{r})}\vec{\mathbf{v}}^{(2)};\\ \vec{\mathbf{v}} = f_2^{(\mathrm{r})}\vec{\mathbf{v}}^{(2)}-f_2^{(\mathrm{v})}\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\end{cases} \tag{2.10}$$

причём указанные коэффициенты удовлетворят равенствам

$$f_2^{(\mathrm{v})} = -\frac{\mu}{RC}\left(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right)\sin\phi;\; g_2^{(\mathrm{r})} = \frac{RR_2\sin\phi}{C};$$
$$f_2^{(\mathrm{r})} = 1-\frac{R_2}{P}(1-\cos\phi);\quad g_2^{(\mathrm{v})} = 1-\frac{R}{P}(1-\cos\phi) \tag{2.11}$$

и тождеству $f_2^{(\mathrm{r})}g_2^{(\mathrm{v})}-f_2^{(\mathrm{v})}g_2^{(\mathrm{r})}\equiv 1$. Соответствующие частные производные от векторов положения и скорости КО в точке В по текущему времени удовлетворят уравнениям

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial t} = \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t}-1\right);\quad \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial t} = -\frac{\mu}{R_2^2}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t}-1\right). \tag{2.12}$$

Частные производные от времени $t^{(2)}$ достижения точки В зависят от конкретной решаемой задачи или, что то же самое, от выбора точки В (рисунок). В частности, точка В может находиться на верхней кромке атмосферы Земли, на нижней или боковой границе сектора ответственности РЛС или соответствовать некоторому заданному постоянному значению времени $t^{(2)}$. В каждом из перечисленных случаев правая часть уравнений (2.4) и (2.5) будет своя и существенно отличаться от вида правых частей в другой постановке задачи.

Взаимосвязь частных производных от времени $t^{(2)}$ достижения точки В и частных производных от угловой дальности перелёта ϕ для произвольной кеплеровой дуги определена уравнениями ([2], 6.15)

$$\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}} = \frac{R_2}{C}\left[\frac{R_2}{P}(1-\cos\phi)+\frac{1}{\chi}-\cos\phi\right]\cdot\vec{\mathbf{Q}}+$$
$$+\frac{R_2}{C}(\mathrm{A}_2+\sin\phi)\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}+\frac{R_2{}^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{\mathbf{r}}}; \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}} = \frac{RR_2}{\mu}\left[\hat{\Upsilon}\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}+\left(\mathrm{A}_2-\frac{R_2}{P}\sin\phi\right)\cdot\vec{\mathbf{Q}}\right]+\frac{R_2{}^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{\mathbf{v}}}; \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t} = 1+\frac{R_2{}^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{2.15}$$

где функции A_2 и $\hat{\Upsilon}$ задаются уравнениями (1.6) и (1.8), а ξ – истинная аномалия текущего местоположения КО.

3. Свойства матриц частных производных
3.1. *Общий вид*

В компьютерных вычислениях не целесообразно все промежуточные расчёты производить с использованием векторного исчисления. Одновременно существенное сокращение, упрощение и повышение наглядности компьютерных вычислений достигается удачным выбором систем координат в точках А и В (рисунок). Чтобы добиться перечисленных преимуществ запишем изохронные составляющие матриц частных производных в виде, удобном для непосредственного преобразования вариаций из системы координат, принятой в точке А, в систему координат, принятую ранее для точки В (2.2, 2.3). Введём в рассмотрение элементы этих матриц равенствами

$$\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} = \{M_{0,j,k}^{(\mathrm{R,R})}\};\quad \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})} = \{M_{0,j,k}^{(\mathrm{R,V})}\};$$
$$\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} = \{M_{0,j,k}^{(\mathrm{V,R})}\};\quad \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})} = \{M_{0,j,k}^{(\mathrm{V,V})}\} \tag{3.1}$$

так, чтобы изохронные составляющие частных производных (2.6) – (2.9) могли бы быть записаны в виде

$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} = \sum_{k,j}M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j;$$
$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} = \frac{RC}{\mu}\sum_{k,j}M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j; \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} = \frac{\mu}{RC}\sum_{k,j}M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,R})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j;$$
$$\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} = \sum_{k,j}M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,V})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j, \tag{3.3}$$

где в соответствии с принятым соглашением (2.2) и (2.3) использовано определение $\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{Q}}$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\vec{\mathbf{e}}_1^{(2)} = \vec{\mathbf{Q}}^{(2)}$, $\vec{\mathbf{e}}_2^{(2)} = \vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{e}}_3^{(2)} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}$. Чтобы в последующем не возвращаться к формату записи формул отметим, что системы уравнений (3.2) и (3.3), с одной стороны, и следующие записи равносильны

$$M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})} = \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)\,\mathrm{T}}\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)}\vec{\mathbf{e}}_j;$$
$$M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})} = \frac{\mu}{RC}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)\mathrm{T}}\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\vec{\mathbf{e}}_j; \tag{3.4}$$

$$M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,R})} = \frac{RC}{\mu}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)\mathrm{T}}\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)}\vec{\mathbf{e}}_j;$$
$$M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,V})} = \vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\vec{\mathbf{e}}_j. \tag{3.5}$$

Введённые равенствами (3.1), (3.2) и (3.3) матрицы являются матрицами изохронных частных производных (один из вариантов представления). Сравнивая системы уравнений (2.6) и (2.9) с матрицами (3.2) и (3.3), выпишем в явном виде элементы (3.1) матриц

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,R})}=\cos\phi-\frac{R_2}{p}(1-\cos\phi);\\
&M_{0,1,2}^{(\mathrm{R,R})}=M_{0,2,3}^{(\mathrm{R,R})}=0;\quad M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,R})}=-(\mathrm{A}_2+\sin\phi);\\
&M_{0,2,1}^{(\mathrm{R,R})}=0;\quad M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,R})}=1-\frac{R_2}{p}(1-\cos\phi);\\
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,R})}=\sin\phi;\quad M_{0,3,2}^{(\mathrm{R,R})}=0;\quad M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,R})}=\mathrm{J}_2+\cos\phi;
\end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})}=\frac{R_2}{p}\sin\phi-\mathrm{A}_2;\quad M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})}=-\hat{\mathrm{Y}};\\
&M_{0,1,2}^{(\mathrm{R,V})}=M_{0,2,1}^{(\mathrm{R,V})}=M_{0,2,3}^{(\mathrm{R,V})}=0;\quad M_{0,2,2}^{(\mathrm{R,V})}=\frac{R_2}{p}\sin\phi;\\
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}=\mathrm{J}_2;\quad M_{0,3,2}^{(\mathrm{R,V})}=0;\quad M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})}=\frac{R}{p}\sin\phi+\mathrm{J}_2\operatorname{tg}\theta;
\end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,1,1}^{(\mathrm{V,R})}=-\left(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right)\sin\phi;\\
&M_{0,1,2}^{(\mathrm{V,R})}=M_{0,2,1}^{(\mathrm{V,R})}=0;\\
&M_{0,1,3}^{(\mathrm{V,R})}=-(1-\cos\phi);\quad M_{0,2,2}^{(\mathrm{V,R})}=M_{0,1,1}^{(\mathrm{V,R})};\\
&M_{0,2,3}^{(\mathrm{V,R})}=0;\quad M_{0,3,1}^{(\mathrm{V,R})}=\chi(1-\cos\phi);\\
&M_{0,3,2}^{(\mathrm{V,R})}=0;\quad M_{0,3,3}^{(\mathrm{V,R})}=(\chi+1)\sin\phi+\chi\mathrm{A}_2;
\end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

и

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,1,1}^{(\mathrm{V,V})}=\cos\phi-\frac{R}{P}(1-\cos\phi);\quad M_{0,1,2}^{(\mathrm{V,V})}=M_{0,2,1}^{(\mathrm{V,V})}=0;\\
&M_{0,1,3}^{(\mathrm{V,V})}=-\sin\phi;\quad M_{0,2,2}^{(\mathrm{V,V})}=1-\frac{R}{p}(1-\cos\phi);\\
&M_{0,2,3}^{(\mathrm{V,V})}=0;\quad M_{0,3,1}^{(\mathrm{V,V})}=\sin\phi+\chi\mathrm{A}_2;\\
&M_{0,3,2}^{(\mathrm{V,V})}=0;\quad M_{0,3,3}^{(\mathrm{V,V})}=\cos\phi+\chi\,\hat{\mathrm{Y}}.
\end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

При написании коэффициентов матриц были использованы обозначения (1.1) – (1.8), а также тождество

$$\chi+\frac{1}{\chi}+2-\mathrm{U}_2\equiv\chi+\left(\frac{1}{\chi}+1\right)\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}. \tag{3.10}$$

Чтобы существенно не увеличивать объём работы за счёт громоздких преобразований все соотношения, связывающие элементы кеплеровой дуги в точках A и B (рисунок), предполагаются известными [2] и предоставляются без доказательств. С учётом вида элементов матриц изохронных производных уравнения (2.13) и (2.14) приобретут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}=-\frac{R_2}{C}(M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,R})}\vec{\mathbf{Q}}+M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,R})}\vec{\boldsymbol{\gamma}})+\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{C}\vec{\mathbf{Q}}+\frac{R_2^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{\mathbf{r}}};\\
&\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}=-\frac{RR_2}{\mu}(M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}\vec{\mathbf{Q}}+M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})}\vec{\boldsymbol{\gamma}})+\frac{R_2^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{\mathbf{v}}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}=-\frac{R_2}{C}\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}}\vec{\mathbf{Q}}^{(2)}+\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{C}\vec{\mathbf{Q}}+\frac{R_2^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{\mathbf{r}}};\\
&\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}=-\frac{R_2}{C}\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}}\vec{\mathbf{Q}}^{(2)}+\frac{R_2^2}{C}\frac{\partial\phi}{\partial\vec{\mathbf{v}}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В процессе решения вариационных задач на кеплеровой дуге необходим ряд тождеств, связывающих элементы матриц изохронных производных. В силу этого выпишем тождества

$$\begin{aligned}
&M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})}-M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})}\operatorname{tg}\theta_2=\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{p}\sin\phi;\\
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}-M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})}\operatorname{tg}\theta_2=W_2\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{p}\sin\phi;
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,R})}+M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,R})}\operatorname{tg}\theta=\chi-\hat{\mathrm{Y}};\\
&M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,R})}-M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,R})}\operatorname{tg}\theta_2=\frac{1}{\chi}\left[1+\frac{R_2}{p}(1-\cos\phi)\right];\\
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,R})}-M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,R})}\operatorname{tg}\theta_2=2\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{p}\times\\
&\times\left(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}-\frac{R}{2a}\right)\sin\phi-\frac{1}{\chi}\operatorname{tg}\theta_2;
\end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{V,R})}+\chi M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,R})}=\chi\left[1-\frac{R_2}{p}(1-\cos\phi)\right];\\
&M_{0,3,3}^{(\mathrm{V,R})}\operatorname{tg}\theta_2+\chi M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,R})}=\frac{1}{\chi}+1-\cos\phi;\\
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{V,R})}\operatorname{tg}\theta_2+\chi M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,R})}=\left(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}\right)\sin\phi;\\
&M_{0,3,3}^{(\mathrm{V,R})}+\chi M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,R})}=\sin\phi;
\end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{V,V})}\operatorname{tg}\theta_2+\chi M_{0,3,1}^{(\mathrm{R,V})}=\frac{R}{p}(1-\cos\phi)+\frac{1}{\chi}-\cos\phi;\\
&M_{0,3,3}^{(\mathrm{V,V})}+\chi M_{0,1,3}^{(\mathrm{R,V})}=\cos\phi;\\
&M_{0,3,1}^{(\mathrm{V,V})}+\chi M_{0,1,1}^{(\mathrm{R,V})}=\left(1+\frac{R}{p}\right)\sin\phi;\\
&M_{0,3,3}^{(\mathrm{V,V})}\operatorname{tg}\theta_2+\chi M_{0,3,3}^{(\mathrm{R,V})}=\frac{1}{\chi}\operatorname{tg}\theta+\sin\phi.
\end{aligned}\right. \tag{3.16}$$

Введём в рассмотрение полные матрицы частных производных, которые также могут быть использованы при решении конкретных практических задач

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})}=\{M_{j,k}^{(\mathrm{R,R})}\};\quad \mathbf{M}_{\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}=\{M_{j,k}^{(\mathrm{R,V})}\};\\
&\mathbf{M}_{\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})}=\{M_{j,k}^{(\mathrm{V,R})}\};\quad \mathbf{M}_{\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})}=\{M_{j,k}^{(\mathrm{V,V})}\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

так, чтобы полные частные производные (2.4) и (2.5) могли бы быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}=\sum_{k,j}M_{k,j}^{(\mathrm{R,R})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j;\\
&\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}=\frac{RC}{\mu}\sum_{k,j}M_{k,j}^{(\mathrm{R,V})}\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}\otimes\vec{\mathbf{e}}_j;
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} = \frac{\mu}{RC}\sum_{k,j} M_{k,j}^{(\mathrm{V,R})} \bar{\mathbf{e}}_k^{(2)} \otimes \bar{\mathbf{e}}_j;$$
$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = \sum_{k,j} M_{k,j}^{(\mathrm{V,V})} \bar{\mathbf{e}}_k^{(2)} \otimes \bar{\mathbf{e}}_j. \tag{3.19}$$

Полные матрицы частных производных (3.18) и (3.19) всегда могут быть представлены с использованием их изохронных составляющих (3.1) и (3.2) и частных производных от времени прихода КО в точку В

$$M_{k,j}^{(\mathrm{R,R})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})} + (\vec{\mathbf{v}}^{(2)}, \bar{\mathbf{e}}_k^{(2)}) \left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}, \bar{\mathbf{e}}_j \right);$$
$$M_{k,j}^{(\mathrm{R,V})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})} + \frac{\mu}{RC} (\vec{\mathbf{v}}^{(2)}, \bar{\mathbf{e}}_k^{(2)}) \left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}, \bar{\mathbf{e}}_j \right); \tag{3.20}$$

$$M_{k,j}^{(\mathrm{V,R})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,R})} - \chi \frac{C}{R_2} \delta_{k,3} \left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}, \bar{\mathbf{e}}_j \right);$$
$$M_{k,j}^{(\mathrm{V,V})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,V})} - \frac{\mu}{R_2{}^2} \delta_{k,3} \left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}, \bar{\mathbf{e}}_j \right), \tag{3.21}$$

где $\delta_{k,3}$ – символ Кронекера. С целью получения решения обратной вариационной задачи продолжим рассмотрение свойств изохронных матриц частных производных. В силу справедливости тождеств

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \equiv \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}}; \\ \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} \equiv \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}}; \\ \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} \equiv \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})}; \\ \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})} \equiv \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Произведения $\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})^{\mathrm{T}}}$, $\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})^{\mathrm{T}}}$, $\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})^{\mathrm{T}}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})}$ и $\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})^{\mathrm{T}}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})}$ являются симметричными матрицами. Другими словами, $\forall k, p$ выполнены тождества

$$\sum_j (M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})} M_{0,p,j}^{(\mathrm{R,V})} - M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})} M_{0,p,j}^{(\mathrm{R,R})}) \equiv 0;$$
$$\sum_j (M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,R})} M_{0,p,j}^{(\mathrm{V,V})} - M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,V})} M_{0,p,j}^{(\mathrm{V,R})}) \equiv 0; \tag{3.23}$$

$$\sum_j (M_{0,j,k}^{(\mathrm{R,R})} M_{0,j,p}^{(\mathrm{V,R})} - M_{0,j,k}^{(\mathrm{V,R})} M_{0,j,p}^{(\mathrm{R,R})}) \equiv 0;$$
$$\sum_j (M_{0,j,k}^{(\mathrm{V,V})} M_{0,j,p}^{(\mathrm{R,V})} - M_{0,j,k}^{(\mathrm{R,V})} M_{0,j,p}^{(\mathrm{V,V})}) \equiv 0. \tag{3.24}$$

Уравнения (3.23) и (3.24) для изохронных составляющих частных производных (3.1) и (3.2) могут быть переписаны в инерциальной геоцентрической системе координат в виде

$$\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \equiv \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}};$$
$$\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \equiv \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}}; \tag{3.25}$$

$$\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} \equiv \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)};$$
$$\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \equiv \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}. \tag{3.26}$$

Дополнительно к уравнениям (3.22) для матриц (3.1) и (3.2) выполнены тождества

$$\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} - \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} \equiv \mathbf{E};$$
$$\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} - \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} \equiv \mathbf{E}, \tag{3.27}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица или, что то же самое, $\forall k, p$ выполнены равенства

$$\sum_j (M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})} M_{0,p,j}^{(\mathrm{V,V})} - M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})} M_{0,p,j}^{(\mathrm{V,R})}) \equiv \delta_{kp};$$
$$\sum_j (M_{0,j,k}^{(\mathrm{R,R})} M_{0,j,p}^{(\mathrm{V,V})} - M_{0,j,k}^{(\mathrm{R,V})} M_{0,j,p}^{(\mathrm{V,R})}) \equiv \delta_{kp}. \tag{3.28}$$

Уравнения (3.27) для изохронных матриц частных производных (3.1) и (3.2) полностью равносильны группе равенств

$$\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} - \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \equiv \mathbf{E};$$
$$\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} - \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} \equiv \mathbf{E}, \tag{3.29}$$

где, как и раньше, $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Как следствие уравнений (3.23) и (3.27), будет верно определение (одновременно как левой, так и правой) обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} & -\frac{RC}{\mu}\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})} \\ -\frac{\mu}{RC}\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} & \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} & \frac{RC}{\mu}\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \\ \frac{\mu}{RC}\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} & \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} & -\frac{RC}{\mu}\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \\ -\frac{\mu}{RC}\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})\mathrm{T}} & \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{R})} & \frac{RC}{\mu}\mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{R})} \\ \frac{\mu}{RC}\mathbf{M}_{0,\mathbf{R}}^{(\mathbf{V})} & \mathbf{M}_{0,\mathbf{V}}^{(\mathbf{V})} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

или в инерциальной геоцентрической системе координат

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} & -\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \\ -\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} & \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \\ \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} & \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} & -\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \\ -\left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} & \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \\ \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Для получения последних необходимых равенств можно воспользоваться законом сохранения энергии

$$V^2 - 2\frac{\mu}{R} \equiv V^{(2)2} - 2\frac{\mu}{R_2}. \tag{3.32}$$

Дифференцируя выписанное тождество по векторам положения и скорости КО, получаем

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{v}}^{(2)} + \frac{\mu}{R_2{}^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}^{\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)};$$
$$\frac{\mu}{R^2}\vec{\boldsymbol{\gamma}} \equiv \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{v}}^{(2)} + \frac{\mu}{R_2{}^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}. \tag{3.33}$$

Заменив в последних уравнениях полные частные производные посредством их представления через изохронные составляющие (2.6) – (2.9), напишем

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{v}}^{(2)} + \frac{\mu}{R_2^{\,2}} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)};$$

$$\frac{\mu}{R^2}\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{v}}^{(2)} + \frac{\mu}{R_2^{\,2}} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \qquad (3.34)$$

или, в силу обращаемости матриц изохронных производных (3.33) – (3.34),

$$\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)} \vec{\mathbf{v}} - \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)} \vec{\boldsymbol{\gamma}};$$

$$\frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)} \vec{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)} \vec{\mathbf{v}}. \qquad (3.35)$$

В разделе выписаны все основные свойства матриц частных производных на кеплеровой дуге, используемые при решении вариационных задач. В каждой отдельной вариационной задаче могут использоваться и другие свойства указанных матриц, которые будут выписываться по мере необходимости.

3.2. *Взаимосвязь вариаций на кеплеровой дуге*

С целью выявления условий обращаемости полных матриц частных производных рассмотрим взаимосвязь вариаций векторов положения и скорости КО в точках А и В (рисунок). В общем случае вариации векторов положения $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ КО в точке В запишутся в виде

$$\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\delta\vec{\mathbf{r}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial t}\delta t;$$

$$\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\delta\vec{\mathbf{r}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial t}\delta t. \qquad (3.36)$$

Подставляя вместо частных производных в уравнениях (3.36) их выражения через изохронные составляющие (2.4) – (2.5), а также используя равенство (3.35), получаем

$$\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)} + \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\delta t^{(2)};$$

$$\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} - \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\delta t^{(2)}, \qquad (3.37)$$

где изохронные составляющие вариаций $\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)}$ векторов положения $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и скорости $\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ в точке В определены равенствами

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)} \delta\vec{\mathbf{r}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)} \delta\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\delta t;$$

$$\delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)} \delta\vec{\mathbf{r}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)} \delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\delta t. \qquad (3.38)$$

Одновременно вариация $\delta t^{(2)}$ времени достижения точки В (рис.1) задаётся уравнением

$$\delta t^{(2)} = \frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\delta\vec{\mathbf{r}} + \frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{\partial t^{(2)}}{\partial t}\delta t. \qquad (3.39)$$

На основании обращаемости матриц изохронных производных (3.30) запишем обратное к (3.38) преобразование

$$\delta\vec{\mathbf{r}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \left(\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)} + \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\delta t\right) - \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \left(\delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} - \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\delta t\right);$$

$$\delta\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \left(\delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} - \frac{\mu}{R_2^{\,2}}\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}\delta t\right) - \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \left(\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)} + \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\delta t\right).$$

Используя далее тождество (3.34), получаем окончательный вид обратного к (3.37)–(3.38) преобразования

$$\delta\vec{\mathbf{r}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} - \vec{\mathbf{v}}\cdot(\delta t^{(2)} - \delta t);$$

$$\delta\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} - \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\Bigg|^{(0)\mathrm{T}} \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} + \frac{\mu}{R^2}\vec{\boldsymbol{\gamma}}\cdot(\delta t^{(2)} - \delta t) \qquad (3.40)$$

или с использованием элементов матриц вида (3.1), j=1,2,3,

$$\begin{cases} (\delta\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{e}}_j) = \sum\limits_{k,} M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,V})}(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}) - (\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{e}}_j)\times \\ \qquad \times(\delta t^{(2)} - \delta t) - \dfrac{RC}{\mu}\sum\limits_k M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})}(\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)},\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}); \\ (\delta\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{e}}_j) = \sum\limits_k M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})}(\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)},\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}) + \dfrac{\mu}{R^2}\delta_{j,3}\times \\ \qquad \times(\delta t^{(2)} - \delta t) - \dfrac{\mu}{RC}\sum\limits_k M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,R})}(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\vec{\mathbf{e}}_k^{(2)}), \end{cases} \qquad (3.41)$$

где $\delta_{j,3}$ – символ Кронекера. При использовании в обратной задаче полного вида матриц частных производных уравнения (3.40) перепишутся иначе

$$\begin{cases} \delta\vec{\mathbf{r}} = \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)\mathrm{T}}\dfrac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} - \delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)\mathrm{T}}\dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} + \\ +\delta E\dfrac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} - \vec{\mathbf{v}}\cdot(\delta t^{(2)} - \delta t); \\ \delta\vec{\mathbf{v}} = \delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)\mathrm{T}}\dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} - \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)\mathrm{T}}\dfrac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} - \\ -\delta E\dfrac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} + \dfrac{\mu}{R^2}\vec{\boldsymbol{\gamma}}\cdot(\delta t^{(2)} - \delta t), \end{cases} \qquad (3.42)$$

где величина δE

$$\delta E \equiv \frac{\mu}{R_2^2}(\vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)},\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}) + (\vec{\mathbf{v}}^{(2)},\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}) \equiv$$

$$\equiv \frac{\mu}{R^2}(\vec{\boldsymbol{\gamma}},\delta\vec{\mathbf{r}}) + (\vec{\mathbf{v}},\delta\vec{\mathbf{v}})$$

является полной вариацией интеграла энергии, а также интегралом уравнений в вариациях.

Вариации векторов положения и скорости в точке В (рисунок), а также времени её достижения в общем случае не являются независимыми. Указанная зависимость является следствием назначенного закона $t^{(2)} = t^{(2)}(t,\vec{\mathbf{r}}^{(2)},\vec{\mathbf{v}}^{(2)})$ изменения времени достижения точки В, то есть является результатом конкретной постановки вариационной задачи. Для выявления этой зависимости (уравнений трансверсальности) подставим в уравнение (3.39) для вариации $\delta t^{(2)}$ выражения (3.40) векторов положения и скорости КО в точке А. Получим

$$\left(1+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}\right)\cdot\delta t^{(2)}=\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}-\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right)+$$

$$+\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}-\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right)+\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t}+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}\right)\delta t,\qquad(3.43)$$

где функция $\mathrm{L}_{\mathrm{t}}^{(2)}$ определена равенством

$$\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}=\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}},\vec{\mathbf{v}}\right)-\frac{\mu}{R^2}\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}},\vec{\boldsymbol{\gamma}}\right).\qquad(3.44)$$

В уравнении (3.43) внутри скобок производится свёртка векторов, определённых в точке А, после чего берётся скалярное произведение векторов, определённых в точке В. При этом, в силу справедливости тождеств (3.34) и (3.35), вместо полных частных производных при написании уравнения (3.43) возможно использование их изохронных составляющих

$$\left(1+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}\right)\cdot\delta t^{(2)}=\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)\mathrm{T}}\left(\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}-\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right)+$$

$$+\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)\mathrm{T}}\left(\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}-\left.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}}\right)+\left(\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t}+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}\right)\delta t.\qquad(3.45)$$

При использовании уравнений (3.43) или (3.45) вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ должны выбираться с учётом выполнения уравнения трансверсальности, если они существуют.

Если выражение $1+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}$ равно нулю, то вариация времени $\delta t^{(2)}$ достижения точки В (рисунок) не зависит от соответствующих вариаций векторов положения и скорости КО, является величиной независимой и при использовании уравнения (3.43) или (3.45) может устанавливаться произвольной.

Если величина $1+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}$ отлична от нуля, то вариацию $\delta t^{(2)}$ из уравнений (3.43) или (3.45) можно подставить в равенства (3.40). При этом будет получен общий вид уравнений обращения матриц частных производных (или их изохронных составляющих), позволяющих по независимым вариациям $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ в точке В (рисунок) получать вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}$.

Заключение

В работе выписан удобный для программирования вид матриц частных производных на кеплеровой дуге. Представлен явный вид и общие условия существования решения полной обратной вариационной задачи.

Литература:

1. В.И. Чарный. Об изохронных производных. АН СССР, ИСЗ, вып.16, 1963.

2. В. Алферьев. О частных производных на Кеплеровой дуге. Российская инженерная академия. Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии". Сборник трудов "Теоретические вопросы физики космоса, баллистики и практической космонавтики. Проблемы технической безопасности". Вып. 13. Москва, СИП РИА, 2005.

Материал поступил в редакцию 12. 08. 2011 г.