

УДК 621.396.67.061

© Росляков Н.М., Кочугов А.А., Тенякова Н.А.
Roslyakov N., Kochugov A., Tenyakova N.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ИСТОЧНИКА С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ НА ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОМ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ШАРЕ

ELECTRODYNAMIC MODEL OF A DIFFRACTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE FROM A SOURCE WITH AXIAL SYMMETRY ON AN ECCENTRIC MAGNETODIELECTRIC SPHERE

Аннотация. На основе анализа распределения плотностей запасенных энергий в ближней зоне электрически малых излучателей, покрытых импедансными оболочками из магнитодиэлектрических метаматериалов, показаны возможности и актуальность задачи уменьшения расстояния между излучателями антенной решетки для создания малогабаритной сверхнаправленной антенной системы. Приведено решение внешней задачи – дифракции электромагнитной волны, излучаемой диполем Герца, окруженным магнитодиэлектрической шаровой оболочкой, на эксцентрическом магнитодиэлектрическом шаре. Получены соотношения, позволяющие рассчитывать внешнее и внутреннее относительно магнитодиэлектрической оболочки поля, рассеянные пассивной антенной.

Annotation. On the basis of the analysis of distribution of densities containing reserved energy in a nearby zone of electrically small radiators covered with impedance covers from magnetodielectric metamaterials, opportunities and urgency of a task of reduction of the distance between radiators of an antenna lattice for creation of the small-sized superdirected antenna system are shown. The solution of an external task – diffraction of an electromagnetic wave radiated by the Hertz dipole, surrounded by a magnetodielectric spherical cover, on an eccentric magnetodielectric sphere is given. The ratio allowing to calculate external and internal fields, diffracted by a magnetodielectric covering enveloping the passive antenna are received.

Ключевые слова. Антенна электрически малая, взаимное влияние, дифракция электромагнитной волны, запасенная энергия, импедансная оболочка, метаматериалы, плотности запасенных энергий.

Key words. Electrically small antenna, mutual influence, diffraction of an electromagnetic wave, reserved energy, impedance cover, metamaterials, densities of reserved energy.

Введение

Одним из возможных путей повышения эффективности малогабаритных антенн является применение их в схемно-конструктивных решениях, в частности в импедансных оболочках из метаматериалов – материалов с новыми физическими свойствами, обладающих как положительными, так и отрицательными значениями вещественной части диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Проведенные исследования [1–5] электрически

малых антенн (ЭМА) электрического и магнитного типов, помещенных в оболочку из таких материалов:

- полусферического монополя в импедансной оболочке с отрицательной диэлектрической проницаемостью ($\epsilon < 0$), возбуждаемого экваториальной щелью над экраном;
- щелевых антенн с односвязными формами щелей при использовании импедансных покрытий с отрицательной магнитной проницаемостью ($\mu < 0$);
- излучателя рамочного типа, помещенного в ша-

Росляков Николай Михайлович – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, 4НИИ МО РФ, тел. 519-02-94;
Кочугов Александр Александрович – доктор технических наук, заместитель генерального директора, ОАО «ВИКОР», тел.543-36-76;
Тенякова Надежда Архиповна – кандидат физико-математических наук, доцент, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (Ставропольский филиал).

Roslyakov Nikolay, doctor of technical science, professor, principal scientific collaborator, 4 Research Institute of the Ministry of defense of Russian Federation, tel. 519-02-94;

Kochugov Alexandr – doctor of technical science, deputy of director general, ОАО «Vikor», tel.543-36-76

Tenyakova Nadedzda, candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, the Povolzhsky state university of telecommunications and computer science (Stavropol branch).

ровую оболочку из ферромагнитного материала с отрицательной магнитной проницаемостью ($\mu < 0$), позволили установить, что наряду с увеличением сопротивления и мощности излучения на несколько порядков по сравнению с аналогичными характеристиками таких же излучателей без импедансной оболочки, имеет место существенное, на 2-3 порядка величины, уменьшение плотностей запасенных энергий как в непосредственной близости от излучателя, так и на различных расстояниях от оболочки (рис. 1).

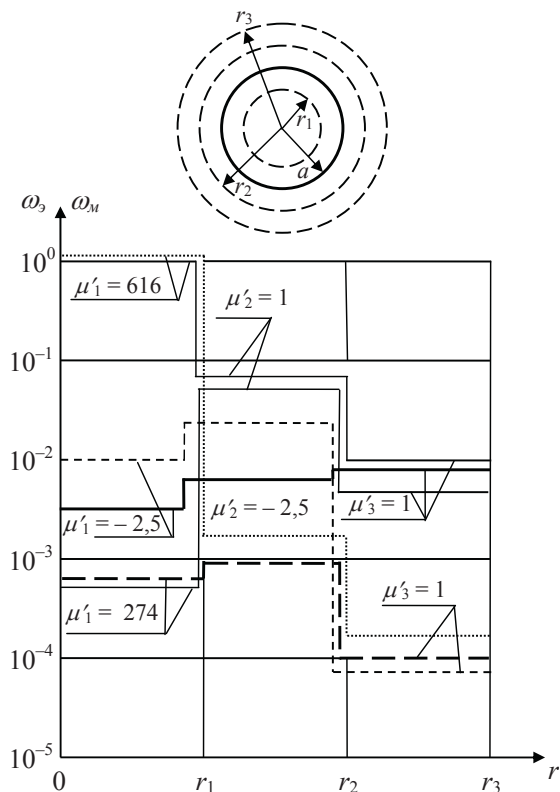


Рис. 1. Гистограммы нормированных распределений средних за период плотностей электрической ω_e (---) и магнитной ω_m (—) запасенных энергий в импедансных оболочках рамочной малогабаритной антенны радиуса $r=a(\epsilon'_i=1; i=1, 2, 3)$

Известно, что запасенные реактивные энергии ЭМА непосредственно связаны с ее мощностью излучения. Поэтому установленное существенное уменьшение плотностей запасенных энергий в пределах радиансферы (ближней зоны) ЭМА в импедансной оболочке с $\epsilon < 0$ или $\mu < 0$, окружающей излучатель, указывает на возможность уменьшения расстояния до соседнего аналогичного излучателя при сохранении их взаимодействия на уровне, свойственном полуволновому расстоянию между ЭМА без импедансной оболочки в свободном пространстве. Последнее непосредственно связано с проблемой создания сверхнаправленных антенных систем, особенно низкочастотных диапазонов.

Отсюда становятся актуальными постановка и ре-

шение задач по исследованию взаимного влияния двух ЭМА с излучателями в импедансных оболочках из метаматериалов, как элементов линейной антенной решетки, с целью установления допустимого уменьшения расстояния между ними при сохранении положительных свойств каждого излучателя в достигнутых за счет применения импедансных оболочек пределах.

Цель работы состоит в разработке методики расчета и обосновании минимального расстояния между электрически малыми излучателями сверхнаправленной решетки, покрытыми импедансными оболочками из метаматериалов с положительными и отрицательными диэлектрическими и магнитными проницаемостями.

В решении задачи о взаимном влиянии двух излучателей (ЭМА) в импедансных оболочках, размещенных в свободном пространстве, возникает необходимость рассмотрения двух частных, относительно самостоятельных задач, одна из которых предполагает рассмотрение явления дифракции (рассеяния) электромагнитной волны (ЭМВ), излучаемой активной антенной на внешней поверхности импедансной оболочки пассивной антенны, расположенной в ближней зоне активной ЭМА. Условно назовем ее внешней задачей; содержание другой, условно внутренней задачи посвящено определению взаимного сопротивления, наведенного в пассивной антенне полем активной антенны, прошедшим внутрь импедансной оболочки пассивной антенны. Настоящая статья посвящена решению первой задачи.

Методической основой решения задачи оценки взаимного влияния пары излучателей в импедансных оболочках служат методы наведенных ЭДС, интегрирования вектора Пойнтинга, электродинамического возбуждения импедансной сферы радиуса, много меньше длины волны.

Следует отметить, что задача получения оценок взаимного влияния электрически малых излучателей вибраторного типа в импедансных оболочках (покрытиях) из метаматериалов до настоящего времени не получила должного теоретического освещения. В этой связи заслуживающим внимания являются работы [6, 7, 8]. Однако результаты этих работ не могут быть в достаточной мере использованы для решения задач определения взаимного влияния ЭМА в импедансных оболочках из метаматериалов и оценок допустимых расстояний между ними в сверхнаправленной решетке.

Поэтому в настоящей статье рассматривается постановка и решение внешней задачи, а именно задачи дифракции (рассеяния) электромагнитной волны, создаваемой электрическим диполем Герца, помещенным

в шаровую оболочку из магнитоэлектрика, на импедансной оболочке пассивной антенны. Найденные в результате решения этой задачи составляющие поля, прошедшего во внутренний объем импедансной оболочки, окружающей пассивную антенну, послужат исходными данными для решения внутренней задачи.

Постановка задачи

При исследовании взаимного влияния двух излучателей, окруженных магнитоэлектрическими оболочками, возникает задача дифракции электромагнитной волны от источника с осевой симметрией на эксцентрическом шаре (рис. 2).

В качестве источника первичного излучения рас-

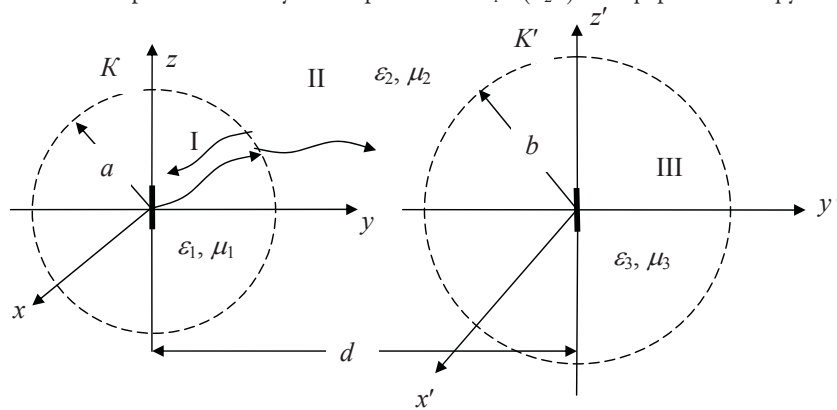


Рис. 2. Системы координат K и K' , связанные с излучателями

смотрим электрический диполь, расположенный вдоль оси z . Диполь окружен шаровой магнитоэлектрической оболочкой радиуса a с относительной диэлектрической и относительной магнитной проницаемостями ϵ_1 и μ_1 соответственно (область I). В дальнейшем слово относительная будем опускать.

Внешняя среда (область II) имеет параметры ϵ_2 и μ_2 . На расстоянии d , отсчитанном вдоль оси y от центра первого шара, помещен второй диполь, окруженный магнитоэлектрической шаровой оболочкой радиуса b с параметрами ϵ_3 и μ_3 (область III). Диэлектрические и магнитные проницаемости сред I, II, III в общем случае комплексные величины. Взаимное расположение источников излучения показано на рис. 2.

В сферической системе координат (r, θ, φ) с ортами $\mathbf{r}_\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho$ (рис. 3) электромагнитное поле, создаваемое одиночным вибратором, окруженным магнитоэлектрической шаровой оболочкой, во внешней среде II было получено в работе [1]. Компоненты этого поля будем снабжать индексом p (первичное поле).

Положим, что гармоническая зависимость компонентов поля от времени t описывается множителем $\exp(i\omega t)$, где i – мнимая единица, ω – циклическая частота.

Электрическое поле имеет две составляющие: радиальную, которую мы обозначим через E_{pr} , и лежащую в меридиональной плоскости составляющую $E_{p\theta}$. Запишем их в виде

$$E_{pr} = C \frac{2}{r} h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta); \tag{1}$$

$$E_{p\theta} = C \frac{1}{r} [k_2 r h_1^{(2)}(k_2 r)]' P_1^1(\cos \theta). \tag{2}$$

Магнитное поле имеет только азимутальную составляющую, которую мы обозначим через $H_{p\varphi}$:

$$H_{p\varphi} = -C i \omega \epsilon_0 \epsilon_2 h_1^{(2)}(k_2 r) P_1^1(\cos \theta), \tag{3}$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная;

k_2 – волновое число для среды II;

$h_1^{(2)}(k_2 r)$ – сферическая функция Бесселя третьего

рода первого порядка;

штрих у квадратных скобок $[k_2 r h_1^{(2)}(k_2 r)]'$ означает дифференцирование по аргументу $k_2 r$;

$P_1(\cos \theta)$ – полином Лежандра первой степени;

$P_1^1(\cos \theta)$ – присоединенный полином Лежандра первого рода первой степени первого порядка.

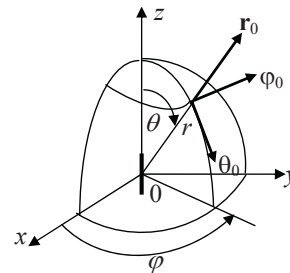


Рис. 3. Сферическая система координат

Функции Лежандра будем определять согласно работе [9]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}; \tag{4}$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}.$$

Коэффициент C выражается соотношением:

$$C = \frac{i\omega\varepsilon_1\mu_1\mu_0 l I}{4\pi k_1 a(b_1 - b_2)}, \quad (5)$$

где

$$b_1 = \varepsilon_1 j_1(k_1 a) \left[k_2 a h_1^{(2)}(k_2 a) \right]';$$

$$b_2 = \varepsilon_2 h_1^{(2)}(k_2 a) \left[k_1 a j_1(k_1 a) \right]';$$

μ_0 – магнитная постоянная;

k_1 – волновое число для среды I ;

$j_1(k_1 a)$ – сферическая функция Бесселя первого рода

первого порядка;

I – сила тока в вибраторе;

l – длина диполя.

Для решения задачи дифракции на шаре радиуса b с параметрами (ε_3, μ_3) , окружающем второй вибратор, необходимо компоненты электромагнитной волны (1) – (3) записать в системе отсчета K' . При переходе от одной сферической системы координат к другой орты двух систем в данной точке пространства связаны соотношениями [10]:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\partial r'}{\partial r} \mathbf{r}'_0 + \frac{\partial \theta'}{\partial r} r' \boldsymbol{\theta}'_0 + \frac{\partial \varphi'}{\partial r} r' \sin \theta' \boldsymbol{\varphi}'_0; \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \frac{\partial r'}{\partial \theta} \frac{1}{r} \mathbf{r}'_0 + \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{r'}{r} \boldsymbol{\theta}'_0 + \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} \frac{r'}{r} \sin \theta' \boldsymbol{\varphi}'_0; \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{\partial r'}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{r}'_0 + \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi} \frac{r'}{r \sin \theta} \boldsymbol{\theta}'_0 + \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} \frac{r'}{r \sin \theta} \sin \theta' \boldsymbol{\varphi}'_0, \quad (8)$$

где

$$r' = \sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}; \quad (9)$$

$$\theta' = \arccos \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}}; \quad (10)$$

$$\varphi' = \arctg \frac{r \sin \theta \sin \varphi - d}{r \sin \theta \cos \varphi}; \quad (11)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}}{\sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}}. \quad (12)$$

Из инвариантности длины и направления вектора в разных системах координат следуют равенства

$$E_r \mathbf{r}_0 + E_\theta \boldsymbol{\theta}_0 + E_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = E'_r \mathbf{r}'_0 + E'_\theta \boldsymbol{\theta}'_0 + E'_\varphi \boldsymbol{\varphi}'_0;$$

$$H_r \mathbf{r}_0 + H_\theta \boldsymbol{\theta}_0 + H_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = H'_r \mathbf{r}'_0 + H'_\theta \boldsymbol{\theta}'_0 + H'_\varphi \boldsymbol{\varphi}'_0.$$

Учитывая соотношения (6) – (12), можно найти составляющие электромагнитного поля в системе отсчета K'

$$E'_{pr'} = C \frac{1}{r \sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}} \times \left\{ 2h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta) (r - d \sin \theta \sin \varphi) - \left[k_2 r h_1^{(2)}(k_2 r) \right]' P_1(\cos \theta) d \cos \theta \sin \varphi \right\}; \quad (13)$$

$$E'_{p\theta'} = C \frac{1}{r \sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}} \times \left\{ 2h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta) d \cos \theta (r \sin \theta \sin \varphi - d) + \left[k_2 r h_1^{(2)}(k_2 r) \right]' P_1(\cos \theta) \times (r^2 \sin \theta - rd \sin^2 \theta \sin \varphi - rd \sin \varphi + d^2 \sin \theta) \right\}; \quad (14)$$

$$E'_{p\varphi'} = C \frac{1}{r} \left\{ 2h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta) \sin \theta + \left[k_2 r h_1^{(2)}(k_2 r) \right]' P_1(\cos \theta) \times \frac{d \cos \theta \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}} \right\}; \quad (15)$$

$$H'_{pr'} = C i \omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta) \times \frac{d \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}}; \quad (16)$$

$$H'_{p\theta'} = C i \omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta) \times \frac{dr \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}}; \quad (17)$$

$$H'_{p\varphi'} = -C i \omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 h_1^{(2)}(k_2 r) P_1(\cos \theta) \times \frac{r \sin \theta - d \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - 2dr \sin \theta \sin \varphi + d^2}}. \quad (18)$$

Чтобы окончательно записать (13) – (18) в системе отсчета K' , необходимо произвести замены

$$r = \sqrt{r'^2 + 2dr' \sin \theta' \sin \varphi' + d^2};$$

$$\cos \theta = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + 2dr' \sin \theta' \sin \varphi' + d^2}} \cos \theta';$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{r'^2 \sin^2 \theta' + 2r'd \sin \theta' \sin \varphi' + d^2}}{\sqrt{r'^2 + 2r'd \sin \theta' \sin \varphi' + d^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{r' \sin \theta' \sin \varphi' + d}{\sqrt{r'^2 \sin^2 \theta' + 2r'd \sin \theta' \sin \varphi' + d^2}};$$

$$\cos \varphi = \frac{r' \sin \theta' \cos \varphi'}{\sqrt{r'^2 \sin^2 \theta' + 2r'd \sin \theta' \sin \varphi' + d^2}}.$$

Электромагнитное поле в системе отсчета K' утрачивает осевую симметрию относительно оси z и содержит все возможные составляющие.

Определение полей дифракции на импедансной оболочке пассивной антенны

Для нахождения внутреннего (с индексом t) $\mathbf{E}'_t, \mathbf{H}'_t$ и внешнего (с индексом s) $\mathbf{E}'_s, \mathbf{H}'_s$ полей дифракции необходимо найти решение системы уравнений Максвелла такое, что $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_t, \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_t$ внутри шара и $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_p + \mathbf{E}'_s, \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_p + \mathbf{H}'_s$ вне шара. На поверхности шара должны соблюдаться граничные условия, в частности непрерывность тангенциальных составляющих \mathbf{E}' и \mathbf{H}' .

Решение системы уравнений Максвелла в сферической системе координат будем искать с помощью двух скалярных потенциалов P^e и P^m , известных как электрический и магнитный потенциалы Дебая [11]. В свободной от источников области электромагнитное поле связано с потенциалами Дебая соотношениями

$$\mathbf{E} = \text{rot rot}(\mathbf{r}P^e) - i\omega\mu_0\mu\text{rot}(\mathbf{r}P^m); \quad (19)$$

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\text{rot}(\mathbf{r}P^e) + \text{rot rot}(\mathbf{r}P^m). \quad (20)$$

Потенциалы P^e и P^m являются решениями однородного скалярного уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$\Delta P(r, \theta, \varphi) + k^2 P(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (21)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Решение уравнения (21), полученное методом разделения переменных, содержит сферические функции Бесселя $z_n(kr)$ порядка n и сферические функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$ n -й степени порядка m

$$P(r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} C(n, m) z_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (22)$$

Сферические функции записываются в виде [9]

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}; \quad (23)$$

$$Y_n^{-m} = (-1)^m (Y_n^m)^*, \quad (n=0, 1, 2, \dots; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n). \quad (24)$$

Звездочка в (24) – знак комплексного сопряжения, присоединенные полиномы Лежандра первого рода $P_n^m(\cos\theta)$ определяются формулами (4).

Функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$ с различными n и m взаимно ортогональны с нормой 4π

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_n^m (Y_{n'}^{m'})^* \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (25)$$

где $\delta_{nn'}$ и $\delta_{mm'}$ – символы Кронекера.

Потенциалы Дебая для внутреннего поля дифракции \mathbf{E}'_t и \mathbf{H}'_t содержат сферические функции Бесселя первого рода $j_n(k_3 r')$ [9], не имеющие особенностей в начале координат

$$P_t^e(r', \theta', \varphi') = \sum_{n,m} A_{mn} j_n(k_3 r') Y_n^m(\theta', \varphi'); \quad (26)$$

$$P_t^m(r', \theta', \varphi') = \sum_{n,m} B_{mn} j_n(k_3 r') Y_n^m(\theta', \varphi'), \quad (27)$$

где $j_n(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{n+1/2}(z)$, $J_{n+1/2}(z)$ – функция Бессе-

ля дробного порядка.

Внешнему полю дифракции $\mathbf{E}'_s, \mathbf{H}'_s$ соответствуют потенциалы Дебая, содержащие сферические функции Бесселя третьего рода $h_n^{(2)}(k_2 r')$ [9], которые при больших r' изменяются как $e^{-ik_2 r'}/r'$ и в сочетании с множителем $e^{i\omega t}$ дают сферическую волну, идущую от шара,

$$P_s^e(r', \theta', \varphi') = \sum_{n,m} D_{mn} h_n^{(2)}(k_2 r') Y_n^m(\theta', \varphi'); \quad (28)$$

$$P_s^m(r', \theta', \varphi') = \sum_{n,m} F_{mn} h_n^{(2)}(k_2 r') Y_n^m(\theta', \varphi'), \quad (29)$$

где $h_n^{(2)}(z) = (\pi/2z)^{1/2} H_{n+1/2}^{(2)}(z)$, $H_{n+1/2}^{(2)}(z)$ – функция Ханкеля второго рода.

Составляющие электромагнитного поля дифракции внутри шара определяются формулами

$$E'_{r'} = \sum_{n,m} \frac{A_{mn}}{r'} n(n+1) j_n(k_3 r') Y_n^m(\theta', \varphi'); \quad (30)$$

$$E'_{t\theta'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \left\{ A_{mn} \frac{1}{r'} [k_3 r' j_n(k_3 r')] \frac{d[P_n^m(\cos\theta')]}{d\theta'} + B_{mn} m\omega\mu_0\mu_3 j_n(k_3 r') \frac{P_n^m(\cos\theta')}{\sin\theta'} \right\}; \quad (31)$$

$$E'_{t\varphi'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \left\{ A_{mn} im \frac{1}{r'} [k_3 r' j_n(k_3 r')] \frac{P_n^m(\cos\theta')}{\sin\theta'} + B_{mn} i\omega\mu_0\mu_3 j_n(k_3 r') \frac{d[P_n^m(\cos\theta')]}{d\theta'} \right\}; \quad (32)$$

$$H'_{r'} = \sum_{n,m} \frac{B_{mn}}{r'} n(n+1) j_n(k_3 r') Y_n^m(\theta', \varphi'); \quad (33)$$

$$H'_{t\theta'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \left\{ B_{mn} \frac{1}{r'} [k_3 r' j_n(k_3 r')] \frac{d[P_n^m(\cos\theta')]}{d\theta'} - A_{mn} m\omega\varepsilon_0\varepsilon_3 j_n(k_3 r') \frac{P_n^m(\cos\theta')}{\sin\theta'} \right\}; \quad (34)$$

$$H'_{t\varphi'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \left\{ B_{mn} im \frac{1}{r'} [k_3 r' j_n(k_3 r')] \frac{P_n^m(\cos\theta')}{\sin\theta'} - A_{mn} i\omega\varepsilon_0\varepsilon_3 j_n(k_3 r') \frac{d[P_n^m(\cos\theta')]}{d\theta'} \right\}. \quad (35)$$

Компоненты поля, рассеянного шаром, выражаются формулами

$$E'_{sr'} = \sum_{n,m} \frac{D_{mn}}{r'} n(n+1) h_n^{(2)}(k_2 r') Y_n^m(\theta', \varphi'); \quad (36)$$

$$E'_{s\theta'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ D_{mn} \frac{1}{r'} \left[k_2 r' h_n^{(2)}(k_2 r') \right]' \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} + \right. \\ \left. + F_{mn} m \omega \mu_0 \mu_2 h_n^{(2)}(k_2 r') \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} \right\}; \quad (37)$$

$$E'_{s\varphi'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ D_{mn} im \frac{1}{r'} \left[k_2 r' h_n^{(2)}(k_2 r') \right]' \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} + \right. \\ \left. + F_{mn} i \omega \mu_0 \mu_2 h_n^{(2)}(k_2 r') \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \right\}; \quad (38)$$

$$H'_{sr'} = \sum_{n,m} \frac{F_{mn}}{r'} n(n+1) h_n^{(2)}(k_2 r') Y_n^m(\theta', \varphi'); \quad (39)$$

$$H'_{s\theta'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ F_{mn} \frac{1}{r'} \left[k_2 r' h_n^{(2)}(k_2 r') \right]' \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} - \right. \\ \left. - D_{mn} m \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 h_n^{(2)}(k_2 r') \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} \right\}; \quad (40)$$

$$H'_{s\varphi'} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ F_{mn} im \frac{1}{r'} \left[k_2 r' h_n^{(2)}(k_2 r') \right]' \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} - \right. \\ \left. - D_{mn} i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 h_n^{(2)}(k_2 r') \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \right\}. \quad (41)$$

Коэффициенты $A_{mn}, B_{mn}, D_{mn}, F_{mn}$ в разложениях для полей $\mathbf{E}', \mathbf{H}', \mathbf{E}'_s, \mathbf{H}'_s$ найдем из непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля на поверхности шара $r' = b$:

$$E'_{p\theta'} + E'_{s\theta'} = E'_{t\theta'}; \quad (42)$$

$$E'_{p\varphi'} + E'_{s\varphi'} = E'_{t\varphi'}; \quad (43)$$

$$H'_{p\theta'} + H'_{s\theta'} = H'_{t\theta'}; \quad (44)$$

$$H'_{p\varphi'} + H'_{s\varphi'} = H'_{t\varphi'}. \quad (45)$$

Чтобы воспользоваться соотношениями ортогональности для показательных функций и функций Лежандра, представим составляющие первичного поля $E'_{p\theta'}(b, \theta', \varphi'), E'_{p\varphi'}(b, \theta', \varphi'), H'_{p\theta'}(b, \theta', \varphi'), H'_{p\varphi'}(b, \theta', \varphi')$ в виде разложений по сферическим функциям

$$E'_{p\theta'}(b, \theta', \varphi') = \sum_{n,m} a_{mn} Y_n^m(\theta', \varphi');$$

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E'_{p\theta'}(b, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'; \quad (46)$$

$$E'_{p\varphi'}(b, \theta', \varphi') = \sum_{n,m} b_{mn} Y_n^m(\theta', \varphi');$$

$$b_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E'_{p\varphi'}(b, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'; \quad (47)$$

$$H'_{p\theta'}(b, \theta', \varphi') = \sum_{n,m} d_{mn} Y_n^m(\theta', \varphi');$$

$$d_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} H'_{p\theta'}(b, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'; \quad (48)$$

$$H'_{p\varphi'}(b, \theta', \varphi') = \sum_{n,m} f_{mn} Y_n^m(\theta', \varphi');$$

$$f_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} H'_{p\varphi'}(b, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (49)$$

Запишем теперь граничные условия

$$\sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ a_{mn} P_n^m(\cos \theta') + \right. \\ \left. + D_{mn} \frac{1}{b} \left[k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b) \right]' \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} + \right. \\ \left. + F_{mn} m \omega \mu_0 \mu_2 h_n^{(2)}(k_2 b) \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} \right\} = \\ = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ A_{mn} \frac{1}{b} \left[k_3 b j_n(k_3 b) \right]' \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} + \right. \\ \left. + B_{mn} m \omega \mu_0 \mu_3 j_n(k_3 b) \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} \right\}; \quad (50)$$

$$\sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ b_{mn} P_n^m(\cos \theta') + \right. \\ \left. + D_{mn} im \frac{1}{b} \left[k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b) \right]' \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} + \right. \\ \left. + F_{mn} i \omega \mu_0 \mu_2 h_n^{(2)}(k_2 b) \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \right\} = \\ = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ A_{mn} im \frac{1}{b} \left[k_3 b j_n(k_3 b) \right]' \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} + \right. \\ \left. + B_{mn} i \omega \mu_0 \mu_3 j_n(k_3 b) \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \right\}; \quad (51)$$

$$\sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ d_{mn} P_n^m(\cos \theta') + \right. \\ \left. + F_{mn} \frac{1}{b} \left[k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b) \right]' \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} - \right. \\ \left. - D_{mn} m \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 h_n^{(2)}(k_2 b) \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} \right\} = \\ = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ B_{mn} \frac{1}{b} \left[k_3 b j_n(k_3 b) \right]' \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} - \right. \\ \left. - A_{mn} m \omega \varepsilon_0 \varepsilon_3 j_n(k_3 b) \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} \right\}; \quad (52)$$

$$\sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ f_{mn} P_n^m(\cos \theta') + F_{mn} im \frac{1}{b} [k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b)] \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} - D_{mn} i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 h_n^{(2)}(k_2 b) \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \right\} = \sum_{n,m} e^{im\varphi'} N \left\{ B_{mn} im \frac{1}{b} [k_3 b j_n(k_3 b)] \frac{P_n^m(\cos \theta')}{\sin \theta'} - A_{mn} i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_3 j_n(k_3 b) \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \right\}, \quad (53)$$

где

$$N = \left[(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2}.$$

При нахождении коэффициентов $A_{mn}, B_{mn}, D_{mn}, F_{mn}$ воспользуемся условием ортогональности экспоненциальных функций

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} d\varphi = \delta_{mm'} \quad (54)$$

и интегральными формулами для присоединенных функций Лежандра

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{d[P_n^m(\cos \theta)]}{d\theta} \frac{d[P_{n'}^m(\cos \theta)]}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_n^m(\cos \theta) P_{n'}^m(\cos \theta) \right\} \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq n'; \\ \frac{2n(n+1)(n+m)!}{2n+1(n-m)!}, & n = n'; \end{cases} \quad (55)$$

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{d[P_{n'}^m(\cos \theta)]}{d\theta} + \frac{d[P_n^m(\cos \theta)]}{d\theta} \frac{P_{n'}^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right\} \sin \theta d\theta = 0. \quad (56)$$

Последний интеграл равен нулю независимо от значений n и n' .

Выполнив преобразования, получим следующие выражения для коэффициентов $A_{mn}, B_{mn}, D_{mn}, F_{mn}$.

$$A_{mn} = \frac{G_1 i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 b h_n^{(2)}(k_2 b) + G_4 [k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b)]}{i\omega \varepsilon_0 N_1 (\varepsilon_2 a_1 - \varepsilon_3 a_2)}; \quad (57)$$

$$B_{mn} = \frac{G_3 i\omega \mu_0 \mu_2 b h_n^{(2)}(k_2 b) - G_2 [k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b)]}{i\omega \mu_0 N_1 (\mu_2 a_1 - \mu_3 a_2)}; \quad (58)$$

$$D_{mn} = \frac{G_1 i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_3 b j_n(k_3 b) + G_4 [k_3 b j_n(k_3 b)]}{i\omega \varepsilon_0 N_1 (\varepsilon_2 a_1 - \varepsilon_3 a_2)}; \quad (59)$$

$$F_{mn} = \frac{G_3 i\omega \mu_0 \mu_3 b j_n(k_3 b) - G_2 [k_3 b j_n(k_3 b)]}{i\omega \mu_0 N_1 (\mu_2 a_1 - \mu_3 a_2)}, \quad (60)$$

где

$$a_1 = h_n^{(2)}(k_2 b) [k_3 b j_n(k_3 b)];$$

$$a_2 = j_n(k_3 b) [k_2 b h_n^{(2)}(k_2 b)];$$

$$N_1 = 2n(n+1) \left[\frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2};$$

$$G_1(m, n) = \sum_{n'} N' (a_{mn'} I_2 - b_{mn'} im I_1);$$

$$G_2(m, n) = \sum_{n'} N' (a_{mn'} im I_1 + b_{mn'} I_2);$$

$$G_3(m, n) = \sum_{n'} N' (d_{mn'} I_2 - f_{mn'} im I_1);$$

$$G_4(m, n) = \sum_{n'} N' (d_{mn'} im I_1 + f_{mn'} I_2);$$

$$I_1 = \int_0^\pi P_{n'}^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta') d\theta';$$

$$I_2 = \int_0^\pi P_{n'}^m(\cos \theta') \frac{d[P_n^m(\cos \theta')]}{d\theta'} \sin \theta' d\theta';$$

$$N' = \left[(2n'+1) \frac{(n'-m)!}{(n'+m)!} \right]^{1/2}.$$

Подставив коэффициенты (57) – (58) в выражения (30) – (41), можно вычислить внутреннее и внешнее поле дифракции.

В отличие от известной в литературе задачи дифракции плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре [12], в данной работе рассмотрен более сложный случай дифракции гибридной электромагнитной волны, что имеет самостоятельное значение. Составляющие внутреннего поля дифракции будут использоваться для нахождения наведенного сопротивления и сопротивления излучения пассивной антенны.

Литература

1. Вольперт А. Р. О сопротивлении излучения вибратора, окруженного шаровой магнитодиэлектрической оболочкой. – Радиотехника, 1948, т. 3, № 6, с. 29-48.
2. Пистолькорс А. А., Зимина В. И. Об излучении вибратора, окруженного слоем изотропной плазмы. – Вопросы радиоэлектроники. Серия XII Общетехническая, 1963, № 1, с. 3-12.
3. Беликов Ю. П., Лишин И. В., Киселев С. И., Росляков Н. М., Чиж А. А. – Способ излучения электромагнитной энергии. АС. 197742, СССР. – 1984.
4. Росляков Н. М., Тенякова Н. А., Воробьев О. Б. Излучение кольцевой рамочной антенны, окруженной магнитодиэлектрической сферой. – Радиотехника и электроника, 2004, т. 49, № 10, с. 1210-1217.

5. Росляков Н. М., Тенякова Н. А. Излучение вытянутой сфероидальной антенны с плазменным покрытием. – *Радиотехника и электроника*, 1992, вып. 4, с. 583-592.
6. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах. В 2-х книгах. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984, с. 73-93.
7. King R.W.P., Wu T.T., Sben L.C. *Radio Science*, 11, 661, 1976.
8. Слюсар В. Диэлектрические резонаторные антенны. Малые размеры, большие возможности//*Электроника: Наука, Технология, Бизнес*. №№ 2, 4, 2007.
9. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979, 832 с.
10. М.-А. Тонела. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: ИИЛ, 1962, 483 с.
11. Bouwkamp C.J., Casimir H.B.G. On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation. *Physica*, 20, 1954, 539 – 554.
12. Дж. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма. – М.: Гостехиздат, 1948.

Материал поступил в редакцию 12. 08. 2011 г.