УДК 539.3

© Мусаев В.К.
Musayev V.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОТРАЖЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ОБЛАСТИ

REFLECTIONS ON SIMULATION OF ELASTIC WAVES THE STRESS OF DEFORMABLE FREE SURFACE AREA

Аннотация. *В работе приводится информация об оценке достоверности и точности результатов моделирования волн напряжений в областях ограниченных размеров. Задачи решаются с помощью численного моделирования двумерных плоских уравнений волновой теории упругости.*

Annotation. *The paper provides information on assessing the validity and accuracy of simulation results of stress waves in areas of limited size. Problems are solved by numerical simulation of two-dimensional plane wave equations in elasticity theory.*

Ключевые слова. *Волновая теория упругости, численное моделирование, метод конечных элементов, матрица жесткости.*

Key words. *Elastic wave theory, numerical modeling, finite element method, stiffness matrix.*

В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач нестационарной механики деформируемого твердого тела. Однако при решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов.

На основании изложенного можно утверждать, что оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей.

Для решения задачи о моделировании нестационарных волн напряжений в упругих деформируемых средах рассмотрим некоторое тело Г (рис. 1) в прямоугольной декартовой системе координат XOY, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие.

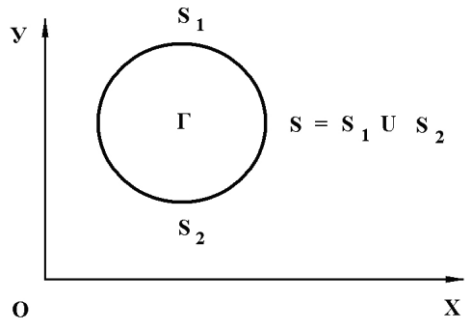

Рис.1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY

Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях.

Задача решается методом сквозного счета без выделения разрывов.

Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \qquad (1)$$

где $\bar{H}$ – матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (1) – система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных эле-

Мусаев Вячеслав Кадыр оглы – доктор технических наук, профессор, профессор Российского университета Дружбы народов, тел. 8-926-5670558.

Musaev Vyacheslav – doctor of technical sciences, professor, Russian Peoples' Friendship University, tel. 8-926-5670558.

ментов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (1).

Рассмотрим интегрирование системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Для интегрирования уравнения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду:

$$\bar{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}}+\bar{K}\vec{\Phi}=\vec{R}\,;\quad \frac{d}{dt}\vec{\Phi}=\dot{\vec{\Phi}}\,. \qquad (2)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (2) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}=\dot{\vec{\Phi}}_i+\Delta t\bar{H}^{-1}(-\bar{K}\vec{\Phi}_i+\vec{R}_i)\,;\quad \vec{\Phi}_{i+1}=\vec{\Phi}_i+\Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}\,, \qquad (3)$$

где Δt – шаг по временной переменной.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Система уравнений (3) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1). Шаг по временной переменной определяем из следующего соотношения:

$$\Delta t=k\frac{\min\Delta l_i}{C_p}, \qquad (4)$$

где Δl_i – длина стороны конечного элемента;

C_p – скорость распространения продольной волны.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0{,}5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками.

По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики и алгоритма и результаты решенных нестационарных динамических задач рассмотрены в работах [1–10].

Рассмотрим решение некоторых задач для оценки достоверности численного моделирования упругих волн напряжений в областях ограниченной формы.

Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности.

На границе пластинки (рис. 2) приложено нормальное напряжение σ_y(рис. 3), которое при $0\le n\le 10$ ($n=t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n\ge 10$ от P до 0 ($P=\sigma_0$, $\sigma_0=-0{,}1$ МПа (-1 кгс/см^2)).

Граничные условия для контуров BC и AD при $t>0$ $u=v=\dot{u}=\dot{v}=0$. Контур CD свободен от нагрузок.

Отраженные волны от контуров BC и AD не доходят до исследуемых точек при $0\le n\le 190$.

Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений с 16884 неизвестными.

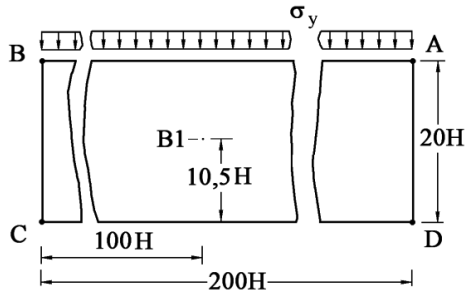

Рис.2. Постановка задачи об отражении волн напряжений

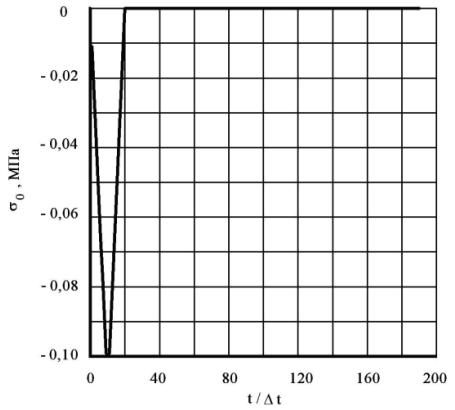

Рис.3. Воздействие в виде дельта функции

Для примера на рис. 4 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y=\sigma_y/|\sigma_0|$) во времени в точке B1(рис.2) при воздействии в виде дельта функции.

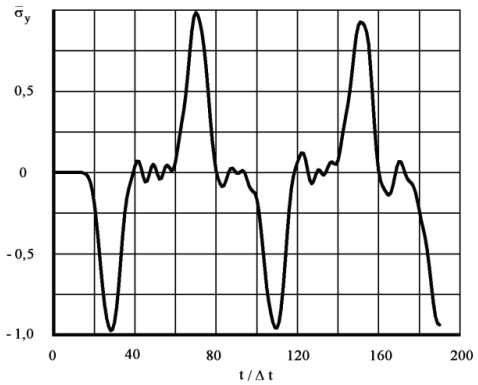

Рис.4. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени в точке В1 (рис.2) при воздействии в виде дельта функции

Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности.

На границе пластинки АВ (рис. 2) приложено нормальное напряжение σ_y (рис. 5), которое при $0 \le n \le 10$ ($n=t/\Delta t$)изменяется линейно от 0 до P, а при $n \ge 10$ равно P ($P=\sigma_0$, σ_0= – 0,1 МПа (–1 кгс/см^2)).

Для примера на рис. 6 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точке В1 (рис. 2) при воздействии в виде функции Хевисайда.

Сравнение с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.

Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях.

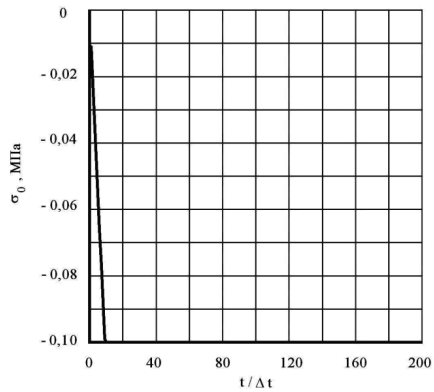

Рис.5. . Воздействие в виде функции Хевисайда

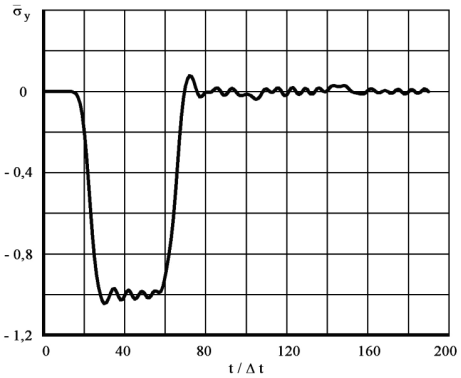

Рис.6. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени в точке B_1 при воздействии в виде функции Хевисайда

Литература

1. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

2. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 43–51.

3. Мусаев В.К. Компьютерное моделирование задачи об отражении плоских продольных волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 2. – С. 32–41.

4. Мусаев В.К. О достоверности результатов численного метода решения сложных задач при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2008. – С. 211–221.

5. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

6. Мусаев В.К. Численное моделирование отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Тезисы докладов XLV Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии. Секции физики. – М.: РУДН, 2009. – С. 53–54.

7. Мусаев В.К. Компьютерное моделирование отражения упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности // Тезисы докладов XLV Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии. Секция физики. – М.: РУДН, 2009. – С. 55–56.

8. Мусаев В.К. О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Ученые записки Российского государственного социального университета. – 2009. – № 5. – С. 21–33.
9. Мусаев В.К. Моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью метода вычислительной механики // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2 (XXVII). – С. 44–52.
10. Мусаев В.К. Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2 (XXVII). – С. 138–149.

Материал поступил в редакцию 28. 07. 2012 г.