УДК 629.7.05

© Захаров А.В.
Zaharov A.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХИ В ИЗМЕРЕНИЯХ АППАРАТУРЫ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ

ANALYSIS OF METHODS IDENTIFICATIONS DISPERSION A CASUAL HINDRANCE IN MEASUREMENTS EQUIPMENT OF SATELLITE NAVIGATION

Аннотация. *Проведен анализ возможных методов идентификации дисперсии случайной помехи в результатах измерений, полученных от аппаратуры спутниковой навигации. Показано, что для решения таких задач целесообразно использовать методы адаптивной фильтрации.*

Annotation. *Analysis of possible methods identifications dispersion a casual hindrance in results of measurements received from equipment of satellite navigation is carried out. It is shown that for decision of such problems it is expedient use methods an adaptive filtration.*

Ключевые слова. *Методы, оценка, измерения, случайная помеха, дисперсия, среднее.*

Key words. Methods, estimation, measurements, a casual hindrance, dispersion, an average.

Спутниковые радионавигационные системы (СРНС) являются современным средством координатно-временного обеспечения, применяемым в различных сферах человеческой деятельности. Главными их достоинствами являются глобальность, оперативность, всепогодность, оптимальная точность и высокая эффективность. Основу координатно-временных определений, выполняемых по сигналам СРНС, составляют дальности и радиальные скорости движения объекта, измеренные аппаратурой спутниковой навигации (АСН) относительно входящих в состав СРНС радиовидимых навигационных космических аппаратов (НКА). В общем виде выражения для измерений АСН можно записать как

$$y_{PR}(k) = PR(k) + v_{PR}(k);$$
$$y_{PV}(k) = PV(k) + v_{PV}(k), \qquad (1)$$

где $v_{PR}(\cdot)$ и $v_{PV}(\cdot)$ – случайные помехи, входящие в соответствующие измерения.

Наличие в уравнениях (1) составляющих $v_{PR}(\cdot)$ и $v_{PV}(\cdot)$ приводит к необходимости проведения предварительной обработки с целью выделения полезного сообщения из зашумленных результатов измерений. Так как параметры $v_{PR}(\cdot)$ и $v_{PV}(\cdot)$ некоррелированны между собой, для совместной обработки измерений целесообразно использовать методы оптимальной динамической фильтрации [1].

Применение фильтрационных методов предполагает предварительную идентификацию дисперсии случайной помехи, входящей в обрабатываемые измерения. В рамках проводимого в настоящей работе анализа необходимо отметить следующее:

- в отношении случайной помехи в результатах измерений АСН рассматривается нормальное распределение с нулевым средним;
- оценка дисперсии случайной помехи рассматривается в отношении каждого измеряемого параметра, причём с учётом того, что ковариационная матрица случайной помехи является диагональной, т.е. не содержит корреляционных моментов, поскольку результаты измерений получены от раздельных измерителей;
- для каждого измеряемого параметра делается предположение об относительно низкочастотном характере полезного сообщения $\mathbf{x}(\cdot)$ по сравнению со случайной помехой $v(\cdot)$.

Известно, что дисперсия σ^2 представляет собой средний квадрат отклонений значений параметра от их средней величины [2].

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2}{n-1}. \qquad (2)$$

Зная средние значения параметра в каждый момент времени на интервале $[t_0 \ldots t_n]$, по формуле цифро-

Захаров Александр Владимирович – старший научный сотрудник ОАО «ВИКор», тел. (495)543-36-76.

Zaharov Alexander Vladimirovich - the senior scientific employee in «VICor» Plc, tel. (495)543-36-76.

вого фильтра экспоненциального скользящего среднего можно определить дисперсию параметра в эти моменты времени t_i, $i \in [0,1,\ldots,n]$

$$\sigma_i^2 = \alpha \cdot \sigma_{i-1}^2 + \beta \cdot (x_i - \hat{x}_i)^2;$$

$$\beta = 1 - \alpha, \qquad (3)$$

где αv и β – весовые коэффициенты статистического осреднения фильтра экспоненциального скользящего среднего.

В качестве начального значения можно задать $\sigma_0^2 = (x_0 - \hat{x}_0)^2$, при этом для компенсации ошибки задания начальных условий целесообразно провести прямой и обратный расчеты.

Для определения среднего значения параметра существует множество методов [3–7]. Одним из наиболее простых и распространенных приемов является метод скользящего среднего, суть которого состоит в последовательном осреднении значений параметра x_i, $i \in [0,1,\ldots,(m-1)]$ на интервале $[i-L/2;\ i+L/2]$, где L – целое четное число. Среднее значение параметра определяются по формуле:

$$\hat{x}_{i+L/2} = \frac{1}{L+1}\sum_{j=0}^{L} x_{i+j}\ ;\quad i \in [0,1,\ldots,(m-L-1)]. \qquad (4)$$

Правильный выбор значения L определяет качество отделения высокочастотной случайной помехи $v(\cdot)$ от более низкочастотного полезного сообщения $\mathbf{x}(\cdot)$. Уменьшение L ведет к недостаточному выравниванию измерительных данных, а завышение – к искажению существенных особенностей последовательности $\mathbf{x}(\cdot)$. Поскольку частотные спектры последовательностей $\mathbf{x}(\cdot)$ и $v(\cdot)$ заранее неизвестны, величину L обычно подбирают экспериментально [3]. На рис. 2 показано, как меняется значение оценок среднего и дисперсии параметра (см.

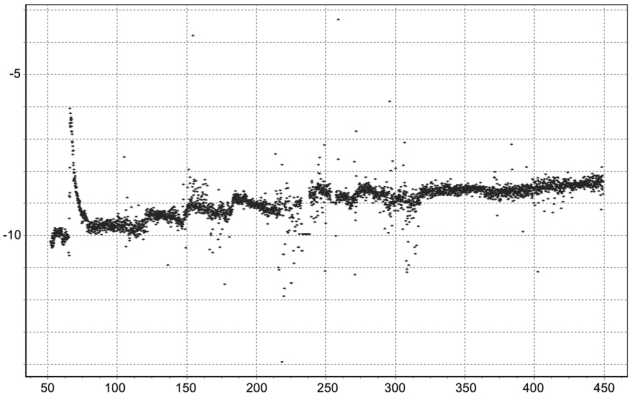

Рис.1. График измеренного параметра

рис. 1) в зависимости от значения параметра L.

Еще одним распространенным вариантом оценивания среднего значения параметра является метод наименьших квадратов. Этот метод относится к классу ап-

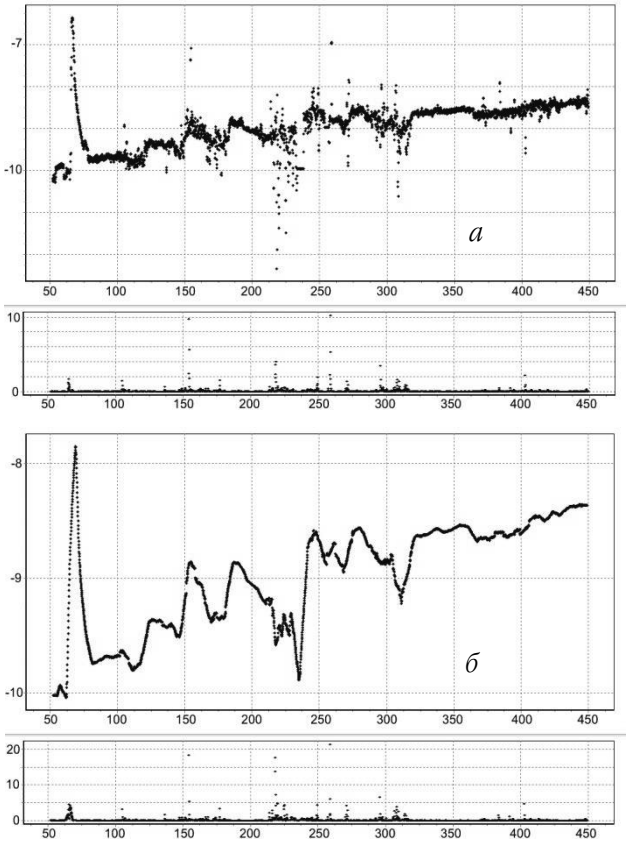

Рис.2. Графики изменения оценки среднего значения параметра и оценки дисперсии его случайной помехи, определенных с использованием скользящего среднего:

$a - L = 2;\ б - L = 64$

проксимационных методов, а его идея состоит в том, чтобы по имеющимся измерениям построить приближённо функцию в виде многочлена вида (5) с условием, чтобы сумма квадратов отклонений построенной функции от измеренной в узловых точках была минимальна.

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n. \qquad (5)$$

То есть фактически необходимо подобрать такие коэффициенты (a_0, a_1,..., a_n), которые минимизируют функцию

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{m}\left(y_i - P_n(x_i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{m}\left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2. \qquad (6)$$

Если степень многочлена n и количество точек m, обрабатываемых на одном шаге аппроксимации, заранее неизвестны, возникает проблема выбора оптимальных значений данных параметров (см. рис. 2). За оптимальное значение степени многочлена принимается то значение n, начиная с которого величина σ^2 стабилизируется или начинает возрастать. Однако при высоких степенях n получаемая в ходе решения система является плохо обусловленной. Поэтому МНК применяют для нахождения многочленов, степень которых не выше 5 [4]. На рис.3. показано, как меняются значения оценки среднего и дисперсии случайной помехи измеренного параметра (см. рис.1) в зависимости от степени многочлена и ко-

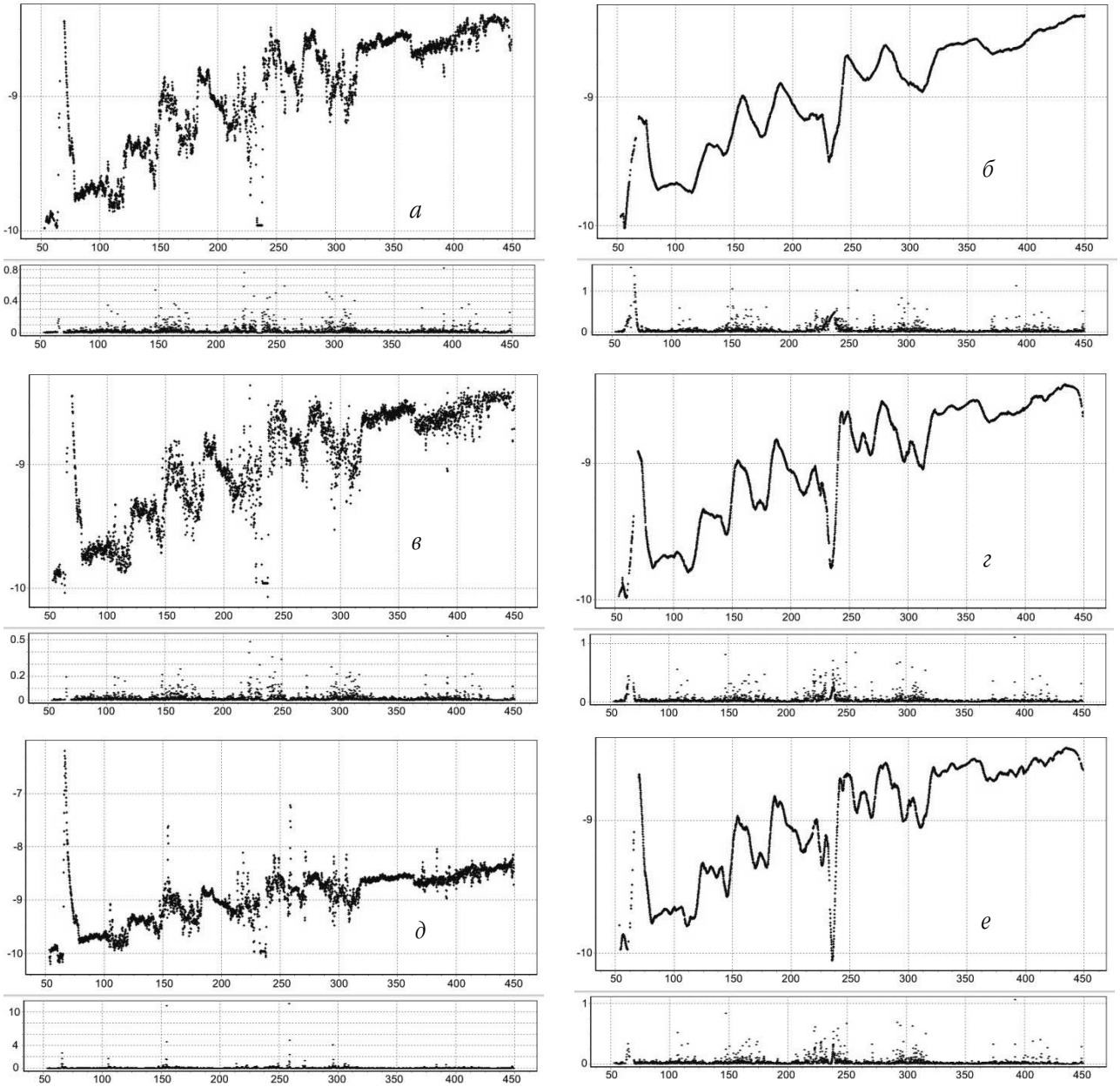

Рис.3. Графики изменения оценки среднего значения параметра и оценки дисперсии его случайной помехи, определенных с использованием МНК:
а – $n = 1, m = 3$; *б* – $n = 1, m = 64$; *в* – $n = 3, m = 3$; *г* – $n = 3, m = 64$; *д* – $n = 5, m = 6$; *е* – $n = 5, m = 64$

личества точек на каждом шаге аппроксимации при использовании метода наименьших квадратов.

Подобного рода проблемы возникают и при использовании для оценки среднего значения параметра локально-сплайновых моделей (сплайнов) (см. рис.4). Сплайном называется непрерывная функция, принимающая в узлах аппроксимации $(x_0, x_1,..., x_{m-1})$ соответствующие значения $(y_0, y_1,..., y_{m-1})$ и описываемая на отдельных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in [0,1,..., (m-2)]$ некоторыми полиномами $P_n(x_i)$. Сплайны дают возможность получить приближенный аналитический вид функции, при этом степень полинома остается невысокой [5]. Главным недостатком сплайнов является то, что на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ функция приближается отдельным полиномом. Таким образом, для всего промежутка $[x_0, x_{m-1}]$ требуется построить $(m-2)$ полинома. При увеличении степени сплайна повышается точность интерполяции, однако увеличивается количество вычислений и порядок полинома.

Таким образом, общим недостатком всех вышеизложенных методов является зависимость их основных характеристик от априорной информации о функции, характеризующей обрабатываемый параметр, а также статистических характеристик случайной помехи. Кроме того, в случаях, характерных для измерений АСН (см. рис.5), амплитудно-частотных изменений измеряемого

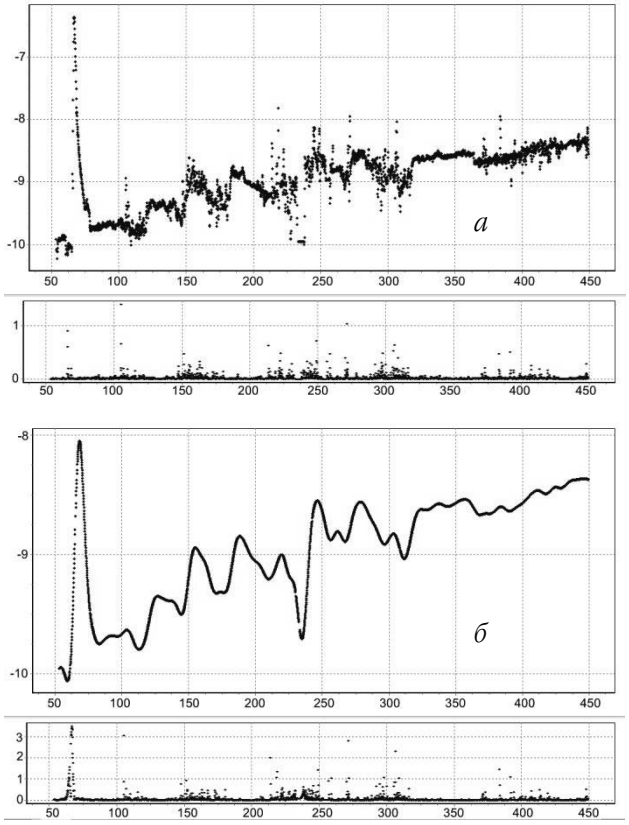

Рис.4. Графики изменения оценки среднего значения параметра и оценки дисперсии его случайной помехи, определенных с использованием ЛСМ:
а – $n = 3, m = 3$; *б* – $n = 3, m = 64$

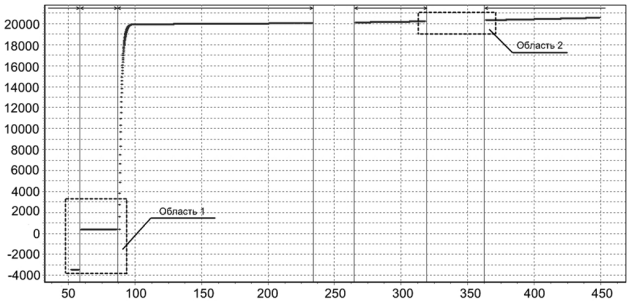

Рис.5. График измеренного параметра
(вертикальными линиями обозначены интервалы обработки)

параметра (область 1), а также неравномерности временной шкалы (область 2), при использовании рассмотренных выше методов необходимо проводить обработку параметра на интервалах с конечными значениями в точках разрывов.

Другой подход к оцениванию дисперсии случайной помехи в измерениях заключается в использовании фильтрационных методов.

Так в работе [8] описан метод адаптивной фильтрации, содержащий формальное правило определения оценки ковариационной матрицы случайной помехи в результатах измерений, которое имеет вид

$$\mathbf{\Psi}_{\mathrm{v}}(k) = \mathrm{cov}\left\{\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{y}}(k) - \boldsymbol{\xi}(k)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{y}}(k) - \boldsymbol{\xi}(k)\right]^{\mathrm{T}}\right\}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{y}}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k/k-1)$ – вектор текущих отклонений оценок измеряемых параметров от их измеренных значений;

$\boldsymbol{\xi}(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1)$ – медленно меняющаяся векторная марковская составляющая погрешности измерений.

Наличие такого правила непосредственно в контуре параметрической адаптации позволяет использовать предложенный фильтр для решения задачи идентификации дисперсии случайной помехи в измерениях АСН.

В то же время необходимо отметить, что непосредственное использование соотношения (12) требует введения компенсации динамической ошибки фильтрации, поскольку необходимо:

• учитывать импульсные возмущения, действующие на входе математической модели и компенсирующие погрешности её формализации в моменты резких динамических изменений;

• исключать из обработки те данные, которые воспринимаются как аномальные.

С учётом сделанных замечаний процедура идентификации дисперсии случайной помехи в измерениях должна основываться на решении двух задач:

• фильтрации скалярного полезного сообщения из зашумлённых результатов измерений;

• идентификации дисперсии помехи совместно с компенсацией динамической ошибки статистического осреднения.

Исходя из этого можно определить:

• математическую модель полезного сообщения, которая может быть представлена в виде разностного стохастического уравнения

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{w}(k-1), \quad (8)$$

где $\mathbf{F}(\cdot)$, $\mathbf{G}(\cdot)$ – переходные матрицы состояний вектора $\mathbf{x}(\cdot)$ и формирующего шума $\mathbf{w}(\cdot)$;

• сопровождающие формы переходных матриц $\mathbf{F}(\cdot)$, и $\mathbf{G}(\cdot)$

$$\mathbf{F}(k/k-1) = \begin{pmatrix} 1 & \tau_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}(k/k-1) = \begin{pmatrix} \tau_k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\tau_k = t_k - t_{k-1}$;

• уравнение измерений в виде аддитивной смеси полезного сообщения и случайной помехи

$$y(k) = \mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k) + v(k), \quad (10)$$

где матрица измерений $\mathbf{h}(k) = (1 \quad 0)$.

Соотношения (9) и (10) с учёом модели (8) позволяют описать метод идентификации дисперсии случайной помехи в измерениях по следующему алгоритму:

предиктор

• прогнозирование состояния и ковариационной матрицы погрешностей оценок

$$\mathbf{x}(k/k-1)=\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{x}(k-1);$$
$$\mathbf{\Psi}_{\mathrm{x}}(k/k-1)=\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathrm{x}}(k-1)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(k/k-1)+$$
$$+\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathrm{w}}(k-1)\cdot\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(k/k-1);$$

• определение отклонения прогнозируемой оценки от измеренного значения

$$\varepsilon(k)=y(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k/k-1);$$

настройка коэффициентов статистического осреднения

• учёт неравномерности временной шкалы

$$q=|\tau_k/h_t|=|t_k-t_{k-1}|/h_t;$$
$$\alpha(k)=(1-\beta)^q;\quad \beta(k)=1-\alpha(k);$$

• компенсация динамической ошибки статистического осреднения при

$$|\varepsilon(k)|>(2,7...3,0)\cdot\left[\sigma_v^2(k-1)+\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathrm{h}^T(k)\right]^{1/2}$$

(текущее значение $y(k)$ может быть помечено как аномальное)

$$\varepsilon(k)=\xi(k-1)+\frac{\sigma_v(k-1)}{\alpha(k)}\cdot sign\{\varepsilon(k)\};$$

• частотное регулирование весовых коэффициентов

$$\xi(k)=\beta(k)\cdot\varepsilon(k)+\alpha(k)\cdot\xi(k-1);$$
$$\sigma_\xi^2(k)=\beta(k)\cdot\xi^2(k)+\alpha(k)\cdot\sigma_\xi^2(k-1);$$
$$\beta^*(k)=\beta(k)+0,5\cdot\alpha(k)\cdot\sigma_\xi^2(k)\cdot\sigma_v^{-2}(k-1);$$
$$\alpha^*(k)=1-\beta^*(k);$$

• расчёт текущих оценок

$$\xi(k)=\beta^*(k)\cdot\varepsilon(k)+\alpha^*(k)\cdot\xi(k-1);$$
$$\sigma_\xi^2(k)=\beta^*(k)\cdot\xi^2(k)+\alpha^*(k)\cdot\sigma_\xi^2(k-1);$$

• определение оценки дисперсии случайной помехи

$$v(k)=\varepsilon(k)-\xi(k);$$
$$\sigma_v^2(k)=\beta_v\cdot v^2(k)+\alpha_v\cdot\sigma_v^2(k-1);$$

контур параметрической адаптации

$$\gamma_w(k-1/k)=\left[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(k)\cdot\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{G}(k/k-1)\right]^{-1}\times$$
$$\times\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(k);$$
$$\sigma_w^2(k-1)=\gamma_w(k-1/k)\cdot\sigma_\varepsilon^2(k)\cdot\gamma_w^{\mathrm{T}}(k-1/k);$$

корректор

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)=\mathbf{F}(k/k-1)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k-1)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(k/k-1)+$$
$$+\mathbf{G}(k/k-1)\cdot\sigma_w^2(k-1)\cdot\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(k/k-1);$$

идентификатор

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}(k)=\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(k)\times$$
$$\times\left[\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1)\cdot\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(k)+\sigma_v^2(k)\right]^{-1};$$

$$\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k/k-1)+\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}(k)\times$$
$$\times\left[y(k)-\mathbf{h}(k)\cdot\mathbf{x}(k/k-1)\right];$$
$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k)=\left[\mathbf{I}-\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}(k)\cdot\mathrm{h}(k)\right]\cdot\mathbf{\Psi}_{\mathbf{x}}(k/k-1).$$

Ниже представлен ряд примеров, иллюстрирующих результаты идентификации дисперсии случайной помехи в измерениях АСН в соответствии с рассмотренным методом адаптивной фильтрации.

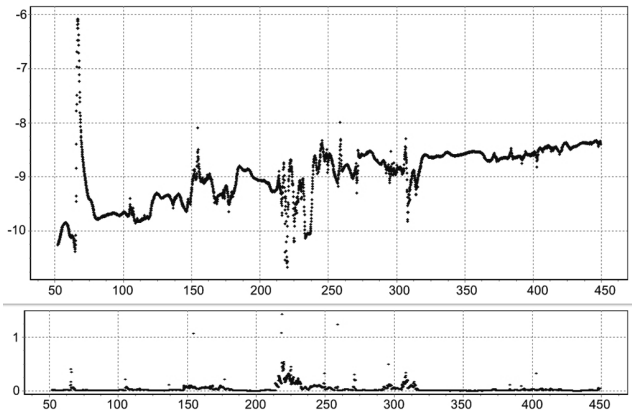

Рис.6. Графики изменения оценки среднего значения параметра и оценки дисперсии его случайной помехи, определенных с использованием АДФ

На рис. 6 и 7 показаны результаты обработки параметров, графики измерений которых представлены соответственно на рис. 1 и 5. Результаты позволяют сделать вывод о том, что применение метода адаптивной фильтрации обеспечивает оперативную подстройку фильтра в частотно-временной области, что позволяет повысить точность и достоверность оценок дисперсии случайной помехи в результатах измерений.

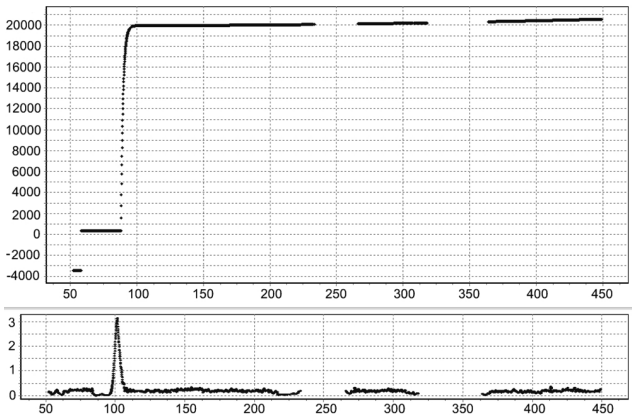

Рис.7. Графики изменения оценки среднего значения параметра и оценки дисперсии его случайной помехи, определенных с использованием АДФ

Таким образом, основанный на реализации метода адаптивной фильтрации, алгоритм идентификации дисперсии случайной помехи:

• обеспечивает раскрытие неопределённости априорно неизвестной дисперсии случайной помехи в

измерениях;

• характеризуется высоким быстродействием и устойчивостью функционирования при различных проявлениях возмущающих факторов (неравномерность временной шкалы, амплитудно-частотные изменения измеряемого параметра, импульсные возмущения), что свидетельствует об эффективности его применения при решении практических задач обработки измерительных данных, в том числе полученных с использованием АСН.

Литература:

1. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под редакцией Харисова В.Н., Перова А.И. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.

2. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Учебное пособие – 2-е изд., исправл. и дополн.— М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2002. – 496 с.

3. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум. – Учебное пособие – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 100 с.

4. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. – М.: Наука, 1971. – 248 с.

5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

6. Катковник В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 336 с.

7. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов/Пер. с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 232 с.

8. Кузнецов В.И. Адаптивная фильтрация в задачах параметрической идентификации нестационарных динамических систем. – Двойные технологии, 2008, № 1 (42).

Материал поступил в редакцию 28. 07. 2012 г.