УДК 519

© Гладков И.А., Кукушкин С.С.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ РН И КА

На основании теоремы Канторовича рассмотрены вопросы сходимости метода Ньютона при определении параметров активного участка траектории. Определена область сходимости, для которой выполняются условия теоремы Канторовича.

Обработка измерительной информации, полученной на активном участке полёта РН и КА, сводится к решению системы нелинейных уравнений вида

$$F_1(x_1,x_2,...,x_n)=0;$$
$$F_2(x_1,x_2,...,x_n)=0;$$
$$\cdots$$
$$F_m(x_1,x_2,...,x_n)=0,$$

где F_i – дифференцируемые функции переменных x_i.

В матричном виде $F(X) = 0$,

где F, X – вектор функция и вектор переменных.

Суть метода Ньютона решения систем нелинейных уравнений состоит в линеаризации заданной системы уравнений в точке нулевого приближения $X^{(i)}$.

Линеаризация производится путём разложения вектор-функции в ряд Тейлора и отбрасывания членов разложения порядка выше первого.

То есть итерационная формула метода Ньютона имеет вид $F(X^{(i)} + \dfrac{\partial F(X^{(i)})}{\partial X}\Delta X^{(i)} = 0$,

где $\dfrac{\partial F}{\partial X} = \left\{ \dfrac{\partial F_i}{\partial X_j} \quad i,j=1...N \right\}$ – квадратная матрица частных производных или матрица Якоби;

$$\Delta X^{(i)} = X^{(i+1)} - X^{(i)}.$$

Для решения системы нелинейных уравнений $F(x)=0$ по методу Ньютона используется итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x)\right]^{-1} f(x^{(k)}),\ k = 0, 1, 2,...,$$

где $x^{(0)}$ – некоторое начальное приближение к корню.

Условия сходимости метода Ньютона зависят от близости начального приближения к решению. При задании начального приближения достаточно далеко от решения итерационный процесс метода Ньютона может быть расходящимся.

Оценим область сходимости.

Определение траектории активного участка по информации в виде совокупности измерений r_i^* приводит к необходимости минимизации функционала вида

$$F = \sum_{i=1}^{N}\left(r_i^* - r_i\right)^2 \cdot p_i^2 \qquad (1)$$

где r_i^*, r_i – соответственно измеренные и расчётные значения измеряемых функций;

N – общее число измерений;

$p = \dfrac{1}{\sigma_i}$, σ_i – среднеквадратическая погрешность.

Минимизация функционала (1) в свою очередь приводит к необходимости решения следующей системы нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial q_0} = 0. \qquad (2)$$

Система нелинейных уравнений (2) может быть представлена в виде

$$\Phi(q) = \sum_{i=1}^{N}\Delta r_i \cdot p_i^2 \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_{j_0}} = 0;\ j=1,2,..., m, \qquad (3)$$

где $\Delta r_i \neq r_i^* - r_i$ – рассогласование между измеренными и расчётными значениями измеряемой функции;

$\dfrac{\partial r_i}{\partial q_{j_0}}$ – частные производные от измеряемых функций по уточняемым параметрам.

Система уравнений (3) при наличии достаточно хорошего нулевого приближения решается методом Ньютона путём введения поправок δq_j к значениям q_{j_0}

$$\hat{q}_j = q_{j_0} + \sum_{n=1}^{\bar{n}}\delta q_j^{(n)}, \qquad (4)$$

где $\bar{n}$ – общее число приближений.

В этом случае полученная система нелинейных уравнений (3) сводится к решению линейной системы:

$$\Phi(q) \cong \Phi(q_0) + \Phi'(q_0)(q - q_0) = 0. \qquad (5)$$

В развёрнутом виде система (5) представляется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial r_i}{\partial q_{\nu_0}} \cdot p_i^2 \cdot \Delta r_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial r_i}{\partial q_{\nu_0}} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_{j_0}} \cdot p_i^2 \cdot \delta q_j = 0.$$

Последнее обстоятельство при наличии существенной нелинейности у измеряемых функций r_i, являющихся функциями времени t_i и параметров движе-

Кукушкин Сергей Сергеевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ;
Гладков Игорь Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник 4 ЦНИИ МО РФ.

ния q_{j_0},

$$r_i = r\left(t_i, q_{j_0}\right) \qquad (6)$$

может привести к большому числу итераций, а в некоторых случаях и к расхождению процесса последовательных приближений.

Академиком Л.В.Канторовичем рассмотрены вопросы сходимости метода И.Ньютона для любых нормированных функциональных уравнений и сформулированы в виде следующих условий:

1. Для элементов q_0 (начального приближения) имеет место обратный оператор

$$r_i = r\left(t_i, q_{j_0}\right) \qquad (7)$$

и известна оценка его нормы

$$\left\|\Gamma_0\right\| \le B_0. \qquad (8)$$

2. Элементы q_0 приближённо удовлетворяют уравнению (2), причём известна оценка выражения $\left\|\Gamma_0 \cdot \Phi\left(q_0\right)\right\|$, а именно:

$$\left\|\Gamma_0 \cdot \Phi\left(q_0\right)\right\| \le \eta_0. \qquad (9)$$

3. Вторые частные производные ограничены в области, определяемой неравенством

$$\left\|\Phi''\left(q_0\right)\right\| \le \kappa. \qquad (10)$$

4. Постоянные B_0, η_0, к удовлетворяют соотношению

$$h_0 = B_0\eta_0\kappa \le \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Тогда уравнение (2) имеет решение q^*, которое лежит в области, определяемой неравенством

$$\left\|\Delta q\right\| = \left\|q^* - q_0\right\| \le \frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0} \cdot \eta_0 \qquad (12)$$

и последовательные приближения сходятся к нему, причём быстрота сходимости характеризуется оценкой

$$\left\|q_n - q^*\right\| \le \frac{1}{2^{n-1}}\left(2h_0\right)^{2n-1} \cdot \eta_0. \qquad (13)$$

Определим область, для которой выполняются условия теоремы Л.В.Канторовича для системы нормальных уравнений (5).

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Пусть матрица $\Phi'(q_0)$ имеет определитель $|\Phi'(q_0)| \ne 0$, отличный от нуля, и известна оценка нормы

$$\left\|\Gamma_0\right\| \le B_0$$

2. Рассогласование Δr_i является величиной ограниченной

$$\left|\Delta r_i\right| \le \eta_i. \qquad (14)$$

3. Частные производные первого и второго порядка ограничены в области, определяемой неравенствами

$$p_i\left|\frac{\partial r_i}{\partial q_{j_0}}\right| \le \beta_i; \qquad \left|\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_{j_0}\partial q_{\nu_0}}\right| \le L_i. \qquad (15)$$

4. Постоянные B_0, β_i, L_i удовлетворяют условиям

$$h_0 = 2B_0^2 NmL\bar{\eta}\beta \le \frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Тогда решение системы (5) методом И.Ньютона возможно, а его сходимость может быть оценена на основе теоремы Л.В.Канторовича.

Рассмотрим первое условие теоремы Л.В. Канторовича. Как видно из соотношения (5), матрица $\Phi'(q_0)$ может быть представлена в виде

$$\Phi'\left(q_0\right) = \left[a_{\nu_j}\right].$$

В результате определено условие оптимального определения траектории активного участка по информации, представленной в виде совокупности измерений r_i^*

$$\Phi'\left(q_0\right) = \left[a_{\nu_j}\right], \qquad (17)$$

где $a_{\nu j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta r_i}{\delta q_{\nu_0}} \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_{j_0}} \cdot p_i^2;$ ν=1,2,...m.

Как известно, обратная матрица $\left[\Phi'(q_0)\right]^{-1}$ определяется следующим образом:

$$\left[\Phi'(q_0)\right]^{-1} = \left|\frac{1}{\Delta}\sum A_{\lambda k}\right|, \qquad (18)$$

где $A_{\lambda\kappa}$ – алгебраические дополнения элементов Δ.

В этом случае m – норма матрицы Γ_0 определяется по следующей формуле:

$$\left\|\Gamma_0\right\| = \max_{\lambda}\frac{1}{|\Delta|}\Sigma\left|A_{\lambda k}\right|. \qquad (19)$$

Отсюда видно, что при $\left|\frac{\partial r_i}{\partial q_{j_0}}\right| \le \eta_i$ и Δ≠0 всегда найдется число B_0, которое обеспечивает выполнение условия

$$\left\|\Gamma_0\right\| = \max_{\lambda}\frac{1}{|\Delta|}\Sigma\left|A_{\lambda k}\right| \quad ,$$

т.е. условие $\left\|\Gamma_0\right\| \le B_0$ для системы (5) выполняется.

Найдем выражение для оценки нормы функции $\Phi(q_0)$

Согласно принятым предположениям, получим

$$\left\|\Phi(q_0)\right\| = \max_j\left|\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta r_i}{\delta q_{j_0}} \cdot p_i^2 \cdot \Delta r_i\right| \le$$

$$\le \max_j\left|\frac{\delta r_i}{\delta q_{j_0}} \cdot p_i\right|\left|p_i \cdot \Delta r\right| \le \max_j\sum_{i=1}^{N}\beta_i \cdot p_i^2 \cdot \eta_i \le \bar{\eta}, \qquad (20)$$

т.е. при выполнении условия ограниченности $\left|\frac{\partial r_i}{\partial q_{j_0}}\right|$ и Δr_i имеет место оценка

$$\left\|\Phi(q_0)\right\| \le \bar{\eta}. \qquad (21)$$

Поскольку

$$\left\|\Gamma \cdot \Phi(q_0)\right\| \le \left\|\Gamma_0\right\| \cdot \left\|\Phi(q_0)\right\|,$$

то, подставив значения $\|\Gamma_0\|$ и $\|\Phi(q_0)\|$, получим

$$\left\|\Gamma_0 \cdot \Phi(q_0)\right\| \le \eta_0, \qquad (22)$$

где $\eta_0 = B_0 \cdot \bar{\eta}$.

Таким образом, выполнено условие 2, которое равносильно выполнению условия ограниченности суммы рассогласований и частных производных первого порядка.

Использовав соотношение для $\Phi'(q_0)$, получим выражение для $\Phi''(q_0)$, которое выглядит следующим образом:

$$\Phi''(q_0)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\delta^2 r_i}{\delta q_{\nu_0}\delta q_{\lambda\nu}}p_i^2\frac{\delta r_i}{\delta q_{j_0}}+\frac{\delta r_i}{\delta q_{\nu_0}}p_i^2\frac{\delta^2 r_i}{\delta q_{j_0}\delta q_{\lambda\nu}}\right). \quad (23)$$

Отсюда, учитывая условия ограниченности частных производных первого и второго порядка, получим

$$\|\Phi''(q_0)\|=\max_{\lambda}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\delta^2 r_i}{\delta q_{\nu_0}\delta q_{\lambda_0}}\cdot\frac{\delta r_i}{\delta q_{j_0}}+\frac{\delta r_i}{\delta q_{\nu_0}}\frac{\delta^2 r_i}{\delta q_{j_0}\delta q_{\lambda_0}}\right)\cdot p_i^2\right|\le 2Nm^2L\beta.$$

Отсюда следует, что условие 3 также выполняется. В этом случае выражение для постоянных h_0 представляется следующим образом:

$$h_0=B_0\cdot\eta_0\cdot k=2B_0\cdot\eta_0\cdot N\cdot m^2\cdot L\cdot\beta\le\frac{1}{2}. \quad (24)$$

Остается показать, что на следующем приближении постоянная h_1, также будет удовлетворять неравенству (11).

Как известно, существует обратная матрица

$$H=\left\{E-\Gamma_0\left[\Phi'(q_0)-\Phi'(q_1)\right]\right\}^{-1}, \quad (25)$$

для нормы которой справедлива оценка

$$\|H\|=\frac{1}{1-h_0}.$$

Полагая $\Gamma_1=H\Gamma_0$ и пользуясь правилом обращения произведения матриц, получим

$$\Gamma_1=H\Gamma_0=\left\{E-\Gamma_0\left[\Phi'(q_0)-\Phi'(q_1)\right]\right\}^{-1}\left[\Phi'(q_0)\right]^{-1}=$$
$$=\left\{\Phi'(q_0)\left[E-\Gamma_0(\Phi'(q_0)-\Phi'(q_1))\right]\right\}=\left[\Phi'(q_1)\right]^{-1}. \quad (26)$$

Соотношение (26) доказывает наличие обратной матрицы $\Gamma_1=\left[\Phi'(q_1)\right]^{-1}$.

На основе (25) получим оценку матрицы Γ_1

$$\|\Gamma_1\|\le\|\Phi'(q_1)^{-1}\|\le\frac{B_0}{1-h_0}=B_1. \quad (27)$$

На основе уже известных оценок и значения $h_0=\dfrac{1}{2}$ получим

$$h_1=B_1\cdot\eta\cdot k=\frac{B_0}{1-h_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\eta_0\cdot k=\frac{h_0^2}{2(1-h_0)^2}\le 2h_0^2\le\frac{1}{2}.$$

Таким образом, условия 1 – 4 теоремы Канторовича выполнены и для случая замены чисел B_0, η_0, k на B_1, η_1, k_1.

Отсюда следует вывод, что система уравнений (5) имеет решение q^*, которое лежит в области, определяемой неравенством (12), а быстрота сходимости приближений характеризуется соотношением(13).

Однако теоретическая сходимость на практике, как правило, не совпадает с вычислительной сходимостью, определяемой обусловленностью матрицы(7).

Поэтому при реализации методов решения уравнений (5) на ЭВМ необходимо использовать соответствующие методы вычислительного контроля.

Выводы

При решении задачи итерационными методами следует обращать внимание на следующие моменты:

1. Расчетная формула.

Для выбранного метода Ньютона это формула (4)

$$\hat{q}_j=q_{j_0}+\sum_{n=1}^{\bar{n}}\delta q_j^{(n)}.$$

2. Условие сходимости.

Согласно теореме Канторовича Л.В. решение q^* лежит в области, определяемой неравенством

$$\|\Delta q\|=\|q^*-q_0\|\le\frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\cdot\eta_0.$$

При выборе начального приближения за пределами этой области процесс может быть расходящимся.

3. Скорость сходимости.

Согласно формуле (13)

$$\|q_n-q^*\|\le\frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2n-1}\cdot\eta_0$$

метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью, т.е. по мере приближения к решению скорость схождения возрастает.

4. Получение решения с заданной точностью ε:

В методе Ньютона если $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$, то $|x_{k-x^*}|<\varepsilon$. Таким образом, при вычислении корня уравнения с точностью ε по методу Ньютона условием окончания итераций может служить

$$|x^{(k+1)}-x^{(k)}|\le\varepsilon.$$

Литература

1. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи матем. наук. 1948. Т3, вып.6. С. 89 – 185.

2. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова. 1949. Т.28. С. 104 – 144.

3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966.

4. Михеев С.В. Сходимость метода Ньютона на различных классах функций. // Вычислительные технологии. Новосибирск. 2005. №3. С. 72-86.

Материал поступил в редакцию 03. 28. 2008г.