УДК 519.711

© Дедков В.К.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ В ДИСКРЕТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрено преобразование, позволяющее перейти от описания непрерывного случайного процесса к описанию дискретного случайного процесса типа «практического белого шума», обладающего теми же вероятностными свойствами, что и исходный случайный процесс.

Работа выполнена по гранту 08-08-00086-а.

Косвенными методами прогнозирования надежности предусматривается определение состояния работоспособности объекта к некоторому моменту будущего. Работоспособность объекта связанна с составляющими комплекса условий его испытания причинно-следственными зависимостями. Эти зависимости выражаются в форме критериев отказа или работоспособного состояния объекта прогноза. При этом характеристики комплекса условий испытаний на интервале прогноза показателей надежности могут быть не связаны со сценарием прогноза надежности, а вытекать из иных прогнозов.

Построения такого сценария существенно упрощается, если описание аргументов логической функции исходов испытаний, выражаемой в форме предикатов, представить в виде совокупности *случайных величин*, а не *случайных функций*, каковыми, по сути дела, они являются.

Тогда сценарий прогноза надежности можно было бы представить в виде последовательности независимых *одноактных взаимодействий* со случайными (неопределенными) исходами, описываемыми в рамках теории случайных величин.

В большинстве случаев действительность такова, что нагрузка предстает в виде случайной величины, зависящей от времени, т. е. в виде случайного процесса $\hat{u}(t)$. Практика показывает, что многие процессы нагруженная в технике имеют стационарный случайный характер. Такие процессы нагружения связаны, например, со случайными колебаниями параметров тока или напряжения в электросетях, со сменой режимов обработки деталей, с флуктуациями характеристик внешней среды (ветра, температуры, влажности и т.п.) и другими неподдающимися точному учету факторами. Наблюдения за случайными режимами нагружения объектов на достаточно длительных отрезках времени свидетельствуют, что в большинстве случаев они стационарны.

Прогнозирование вероятностей отказов объектов в условиях случайных нагружений существенно упрощается, если исход одной реализации комплекса условий испытания $\hat{\vartheta}(\hat{u},\hat{x})$ не зависит от исхода других реализаций (принцип независимости событий). Чтобы свести реальные непрерывные случайные процессы нагружения $\hat{u}(t)$ к последовательности независимых реализаций комплекса условий испытания $\hat{\vartheta}(\hat{u},\hat{x})$, необходимо найти соответствующие *формы аналитического представления случайных функций, описывающих эти процессы, совокупностями случайных величин.*

Можно показать, что известные модели случайных процессов в форме матричных, канонических и неканонических разложений случайных функций использовать для подобного рода преобразований не представляется возможным [1].

Отправным положением в этом вопросе может являться представление о взаимодействиях объекта со средой в форме случайных «сигналов», которыми обмениваются взаимодействующие объекты. Каждый сигнал, детерминированный или случайный, характеризуется пространственно – временной структурой, т. е. имеет конечную длительность во времени и конечную амплитуду. Поэтому случайный процесс $\hat{u}(t)$ может рассматриваться как бесконечная (или конечная) последовательность случайных сигналов, имеющих случайную продолжительность (период), случайное наибольшее значение (амплитуду) и случайную фазу. Пренебрегая значениями фазы случайного сигнала, т. е. полагая, что фазовые изменения неразличимы, в качестве периода, определяющего в стохастическом смысле длительность сигнала, следует принять интервал корреляции $\tau_{кор}$ случайного процесса $\hat{u}(t)$, а его амплитудой может служить наибольшее значение процесса $\hat{u}$ на отрезке времени, равном интервалу корреляции.

При этом справедливо следующее утверждение:

Дедков Виталий Кирилович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник ВЦ им. А.А.Дородницына РАН.

«если за время $\tau_{кор}$ случайная амплитуда $\widehat{u}$ сигнала не превысила соответствующего значения сопротивляемости объекта $\widehat{x}(t)$ (отказ не произошел), то любые другие значения нагрузки за этот промежуток времени также не превысят значение сопротивляемости (не приведут к отказу)». Тогда в качестве нагрузки, действующей на объект, можно воспользоваться ее наибольшим значением $\widehat{u}$ на интервале $\tau_{кор}$ и рассматривать вместо непрерывного процесса нагружения дискретную цепь последовательных нагружений (испытаний) на отрезках времени, равных интервалам корреляции.

Итак, прогнозирование нагрузки, действующей на объект, сводится к прогнозированию последовательности ее наибольших значений $\widehat{u}$ на интервалах $\tau_{кор}$. Рассмотрим методику преобразования непрерывного случайного процесса нагружения объекта в дискретную последовательность некоррелированных случайных величин нагрузок, подробное изложение которой дано в работе [1].

В большинстве случаев, как уже отмечалось, воздействие случайных внешних факторов на объект (особенно на установившихся режимах работы) можно считать стационарным.

Исследователь получает информацию о действии на объект случайных процессов нагружения при испытаниях или эксплуатации в форме осциллограмм, которые содержат реализации либо непрерывных измерений нагрузок, либо последовательностей измерений случайной величины нагрузки в некоторые моменты времени. Требование к исходной информации таково: *исходная информация должна быть представительной по объему и позволять судить о характере изменения рассматриваемых переменных во времени.*

Известно, что в общем случае отдельная реализация случайного процесса не дает исчерпывающей информации для определения его вероятностных характеристик, поэтому необходим определенный статистический набор реализаций. Только в частном случае, если стационарный процесс обладает свойством *эргодичности*, достаточно одной произвольной реализации, чтобы описать вероятностные характеристики процесса в целом. Однако во многих работах отмечается, что большинство случайных процессов нагружений, встречающихся в физике и технике, обладают свойством *эргодичности* [2,3]. Поэтому будем рассматривать стационарный процесс нагружения $\widehat{u}(t)$, обладающий свойством эргодичности.

В основу метода обработки реализации случайного процесса нагружения $\widehat{u}(t)$ положено его представление в виде «практического» белого шума: последовательности независимых случайных импульсов, имеющих некоторую случайную амплитуду $\widehat{u}$ с конечной дисперсией и определенной длительностью, равной $\tau_{кор}$. Методику преобразования реального непрерывного стационарного случайного процесса $\widehat{u}(t)$ к такому виду будем называть «*методом некоррелированных максимумов*» [1]. Методика преобразования включает выполнение следующих операций.

1. Анализ временной структуры случайного процесса $\widehat{u}(t)$, выполняемый посредством обработки *k*-й реализации $u_k(t)$ случайного процесса и построения автокорреляционной функции

$$k_{\widehat{u}}(t,t') = k_{\widehat{u}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_k(t)u_k(t+\tau)dt. \quad (1)$$

Автокорреляционная функция $k_{\widehat{u}}(\tau)$ показывает тесноту связи между значениями случайного процесса в момент времени t, $t\in[0, T]$, и в некоторые другие моменты $t+\tau$, $\tau\in[0, T]$.

2. Определение промежутка времени τ, по прошествии которого обеспечивается в стохастическом смысле некоррелированность двух соседних значений случайного процесса $\widehat{u}(t)$. Минимальным промежутком времени τ, обеспечивающим выполнение данного требования, является интервал корреляции случайного процесса $\tau_{кор}$. Существует несколько способов определения $\tau_{кор}$. Выбор того или иного способа расчета $\tau_{кор}$ определяется целью анализа случайного процесса и опытом исследователя. Отметим, что корреляционные связи между значениями случайного процесса в различные моменты времени определяются статистическим путем, поэтому интервал корреляции $\tau_{кор}$ является нестрогим математическим объектом. Он носит статистический характер и является неслучайной величиной, характеризующей временную структуру случайного процесса [2].

Автокорреляционной функцией $k_{\widehat{u}}(\tau)$ случайного процесса $\widehat{u}(t)$, как следует из выражения (1), является действительная четная функция с максимумом в точке $\tau=0$ (где $\tau=t'-t$), которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для упрощения анализа временной структуры процесса во многих приложениях используется нормированная корреляционная функция

$$\widetilde{k}_{\widehat{u}}(\tau) = \frac{k_{\widehat{u}}(\tau)}{\sigma_{\widehat{u}}(t)\sigma_{\widehat{u}}(t')}.$$

Для центрированного случайного процесса при $\tau=0$ имеем

$$\widetilde{\dot{k}}_{\widehat{u}}(0) = \frac{\dot{k}_u(0)}{\sigma^2_{\widehat{u}}(0)}, \quad (2)$$

так как $\dot{k}_u(0) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [\widehat{u}(t)]^2 dt = \sigma_u{}^2(0)$.

Использование нормированной корреляционной функции дает наглядное представление о степени связи между значением случайного процесса в данный момент и другие моменты времени. Так, при $\tilde{k}_{\hat{u}}(0)=1$ нормированная корреляционная функция является показателем наибольшей тесноты связи между рассматриваемыми значениями случайного процесса, а $\tilde{k}_{\hat{u}}(t)=0$ – свидетельством отсутствия как корреляционных, так и иных связей.

Есть несколько способов определения интервала времени, в пределах которого корреляционные связи между значениями процесса «полностью» исчезают (точного значения такого интервала не существует). Такой интервал времени называют *интервалом корреляции*. Интервал корреляции или интервал «стохастической независимости» (независимости в среднем) между значениями случайного процесса будем обозначать $\tau_{кор}$.

Для определения уровня дискретизации случайного процесса по времени необходимо исследовать зависимость межу значением, которое принимает случайная переменная в данный момент *t* и ее значениями в последующие моменты времени. Другими словами, следует выяснить, как долго сохраняет случайный процесс «память» о том, что в момент t_1 его значение было равно $\hat{u}_1(t)$.

Одним из возможных путей определения интервала корреляции $\tau_{кор}$ может служить следующий графический прием: построим прямоугольник, площадь которого равна площади под кривой нормированной корреляционной функции центрированного случайного процесса. Если в качестве высоты этого прямоугольника принять значение $\tilde{k}_{\hat{u}}(0)=1$, то шириной прямоугольника будет $\tau'_{кор}$:

$$\tau'_{кор} \overset{d}{=} \frac{1}{\tilde{k}_{\hat{u}}(0)} \int_0^{\infty} \tilde{k}_{\hat{u}}(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

Этот способ определения интервала корреляции дает грубое приближение величины $\tau'_{кор}$ (рис. 1а).

Другой путь определения величины $\tau_{кор}$ заключается в следующем. В качестве критерия стохастической независимости между значениями случайного процесса, примем такую величину нормированного корреляционного процесса $(\min \tilde{k}_{\hat{u}}(\tau))$, значением которой можно пренебречь. Тогда отрезок времени между значениями нормированной корреляционной функции, равными $\tilde{k}_{\hat{u}}(t)=0$ и $\min \tilde{k}_{\hat{u}}(\tau)$, будет определять величину интервала корреляции $\tau''_{кор}$ (рис. 1 б). В этом случае величина $\tau''_{кор}$ определяется из условия малости корреляционной связи между значениями случайного процесса.

В случае знакопеременной автокорреляционной функции, такой, например, как показана на рис. 1в, интервал корреляции находится из условия равенства площади, расположенной между кривой $\tilde{k}_{\hat{u}}(\tau)$ и осью абсцисс, и площади прямоугольника с высотой $\tilde{k}_{\hat{u}}(0)=1$. Ширина (вдоль оси абсцисс) этого прямоугольника принимается равной интервалу корреляции $\tau_{кор}$ (рис.1в).

Итак, в общем случае, *интервал корреляции* ($\tau''_{кор}$) – это такой *минимальный интервал времени*, который определяет в стохастическом смысле, что значения случайной функции, разделенные любым большим интервалом, можно считать *практически некоррелированными*.

Используя понятие интервала корреляции можно любой случайный стационарный процесс представить в форме последовательности «случайных сигналов». Каждый сигнал характеризуется случайной продолжительностью (или «периодом» $\tau_{кор}$), случайной «амплитудой» (или наибольшим значением переменной $\hat{u}$) и случайной фазой.

С этих позиций интервал корреляции может рассматриваться как некоторое среднее значение длительности произвольного случайного сигнала – его «период» в стохастическом смысле.

Если бы имелась возможность «наблюдать» каждый случайный сигнал в отдельности, то весь процесс можно было бы представить последовательностью отрезков случайной длительности, в каждом из которых содержится наибольший из максимумов функции $\hat{u}(\tau)$, $\tau \in (t, t+\tau)$, т.е. «амплитуда сигнала».

Однако корреляционные связи, характеризующие длительность сигнала, могут быть определены лишь

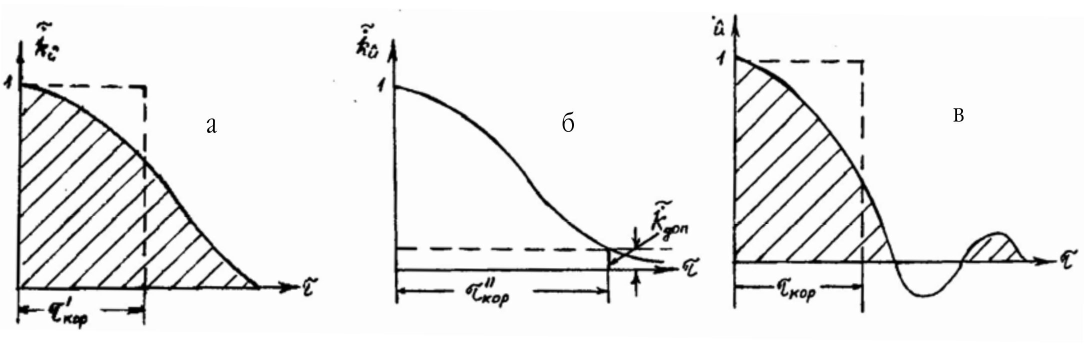

Рис. 1. Автокорреляционные функции случайных процессов и возможные значения интервалов корреляции

статистическим путем. Поэтому интервал корреляци $\tau_{кор}$ представляет собой неслучайную величину, а фаза случайного сигнала, соответствующая началу отсчета интервала корреляции, оказывается случайной.

Амплитуда произвольного случайного сигнала должна удовлетворять двум признакам:

• амплитуда есть наибольшее значение случайного сигнала;

• амплитуды смежных сигналов некоррелированы.

3. Определение случайной амплитуды $\hat{u}$ процесса $\hat{u}(t)$. Для этого реализация $u_i(t)$ случайного процесса $\hat{u}(t)$, начиная с некоторого момента времени t_0 (в частном случае с t_0=0), разбивается на отрезки длительностью не менее $\tau_{кор}$. Принципиально отрезки разбиения (дискретизации) процесса $\hat{u}(t)$ могут быть и больше $\tau_{кор}$ (важно, чтобы не меньше), но при этом возрастает потребная длина реализации $\hat{u}(t)$, используемая для получения представительной выборки n реализаций u_i случайной величины $\hat{u}$. В каждом i-м отрезке случайного процесса выбирается u_i – наибольшее значение процесса $\hat{u}(t)$ в пределах интервала разбиения (интервала корреляции)

$$\hat{u}_i = \sup_{[i=1,(1)n]} < \hat{u}(\tau) >,$$
$$\tau \in [t_i, t_i + \tau_{кор}], \quad t_i \in [0, T]. \qquad (4)$$

Чтобы с гарантией избежать попадания в выборку $<u_i>$, $[i=1(1)n]$ коррелированных значений случайного процесса, рекомендуется включать в «зачет» значения u_i только из четных или нечетных интервалов разбиения. Однако во многих практических случаях для обеспечения некоррелированности значений u_i вполне достаточно производить выборку наибольших значений процесса $\hat{u}(t)$ из каждого интервала разбиения, тем более что методика определения некорелированных величин $\hat{u}$ включает в себя проверку выборки $< u_i >$, $[i=1(1)n]$ на независимость.

4. Проверка выборки $< \hat{u}_i >$, $[i=1(1)n]$ на независимость составляющих ее компонент может осуществляться любым параметрическим методом. В частности, для этой цели можно рекомендовать использование «критерия серий» [3].

5. Определение параметров закона распределения максимальных некоррелированных значений u_i случайного процесса нагружения на интервалах разбиения выполняется известными статистическими методами по выборке $< \hat{u}_i >$, $[i=1(1)n]$. При этом в силу стационарности процесса $\hat{u}(t)$ наибольшие некоррелированные значения u_i для всех $[i=1(1)n]$ подчинены одному и тому же закону распределения

$$F_{\hat{u}_1}(u) = F_{\hat{u}_2}(u) = \ldots = F_{\hat{u}_i}(u) =$$
$$= \ldots = F_{\hat{u}_n}(u) = F_{\hat{u}}(u). \qquad (5)$$

Изложенный выше метод «*некоррелированных максимумов*» позволяет представить стационарную, случайную функцию в виде более простой случайной функции («практического белого шума»), сохранив при этом необходимые для прогнозирования надежности свойства исходного процесса

$$\hat{u}(t) \xrightarrow{P} < \sup \hat{u}(\tau) >; \ t_i \in T;$$

$$\tau \in (t_i; t_i + \tau_{кор}); \ [i=1(1)n]; \ n \to \infty. \qquad (6)$$

Такое преобразование позволяет перейти от описания *непрерывного* случайного процесса к описанию *дискретного* случайного процесса типа «практического белого шума», обладающего теми же вероятностными свойствами, что и исходный случайный процесс.

Литература

1. Дедков В.К. Модели прогнозирования индивидуальных показателей надежности. М.: ВЦ им. Дородницына РАН. 2003. –188 с.

2. Дунин–Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М.: Гостехиздат. 1955.

3. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир. 1974.

Материал поступил в редакцию 03. 04. 2008г.