

УДК 517.929

© Черноскутов А.И., Зорин Э.Ф., Усачев В.В., Рыжов Б.С.
Chernoskutov A.I., Zorin E.F., Usachev V.V., Ryzhov B.S.**РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ
ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ
СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФА СОСТОЯНИЙ****SOLUTION OF SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM
OF THE ESTIMATION STABILITIES OF FUNCTIONING OF THE AUTOMATED
SYSTEM THE METHOD OF TRANS-FORMATION THE COLUMN OF CONDITIONS**

Аннотация. В статье рассматривается метод двойного преобразования графов состояний автоматизированной системы при решении задач оценки устойчивости в условиях программно-технических воздействий. Представлены аналитические соотношения оценки устойчивости функционирования автоматизированной системы в условиях программно-технических воздействий.

Annotation. In paper the method of a double condition the column of conditions of the automated system is considered at a solution of problems tasks of an estimation of a stability in conditions of program-technical actions. Analytical relations of an estimation of a stability of functioning of the automated system in conditions of program-technical actions are presented.

Ключевые слова. Автоматизированная система, граф состояний системы, система дифференциальных уравнений, вероятностно-временные характеристики системы.

Key words. The automated system, columns of a condition of system, system of the differential equations, is probability-time performances of system.

1. Актуальность решаемой задачи

Анализ устойчивости функционирования автоматизированной системы (АС) в условиях программно-технических воздействий (ПТВ) [1,2] непосредственно связан с определением вероятностно-временных характеристик её функционирования в условиях ПТВ. Однако в силу сложности решаемой задачи и большой размерности системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс функционирования АС в условиях ПТВ, использование известных программно-технических комплексов Mathematica и Maple приводит к недопустимо большой длительности решения задачи, либо, в худшем случае, к невозможности получения решения.

К этому следует также добавить и то, что даже по-

лученные в общем виде аналитические соотношения результатов решения задачи являются очень громоздкими и сложными для выявления влияния на конечный результат отдельных деструктивных факторов ПТВ.

В этой связи предложенный авторами методический подход, связанный с двойным преобразованием графа состояний АС, позволяет избежать указанных недостатков.

**2. Оценка устойчивости функционирования
АС в условиях ПТВ**

В соответствии с теорией массового обслуживания геометрическая интерпретация процесса функционирования АС в условиях ПТВ может быть представлена

Черноскутов Анатолий Иванович – доктор технических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник 4 ЦНИИ Минобороны России тел. (495) 515-25-75;

Зорин Эдуард Фёдорович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник 4 ЦНИИ Минобороны России, тел. (495) 515-64-28;

Усачев Вячеслав Валерьевич – адъюнкт 4 ЦНИИ Минобороны России;

Рыжов Борис Сергеевич – адъюнкт 4 ЦНИИ Минобороны России.

Chernoskutov Anatoly Ivanovich – Dr.Sci.Tech., the senior scientific employee, the main scientific employee 4 Central Scientific Research Institute Ministry of Defence of Russia, Ph. (495) 515-25-75;

Zorin Eduard Fedorovich – Dr.Sci.Tech., the senior scientific employee, the senior scientific employee 4 Central Scientific Research Institute Ministry of Defence of Russia, Ph. (495) 515-25-75;

Usachev Vyacheslav Valerevich – adjunct 4 Central Scientific Research Institute Ministry of Defence of Russia;

Ryzhov Boris Sergeevich – adjunct 4 Central Scientific Research Institute Ministry of Defence of Russia.

графом состояний. Примером такой интерпретации является граф, изображенный на рис. 1.

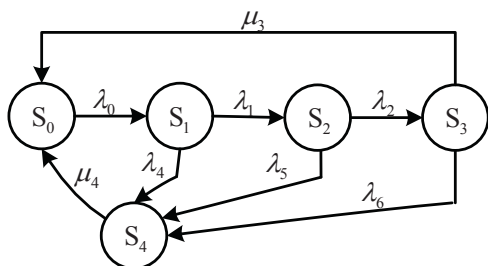


Рис.1. Исходный граф состояний АС оценки устойчивости в условиях ПТВ

На приведенном рисунке приняты следующие обозначения:

S₀ – АС исправна, ПТВ – отсутствуют;

S₁ – АС находится в состоянии воздействия на неё ПТВ;

S₂ – АС находится в состоянии, когда ПТВ обнаружено и идентифицировано;

S₃ – АС находится в состоянии, когда ПТВ обнаружено, идентифицировано и принимаются меры по его противодействию;

S₄ – АС неисправна, принимаются меры по её восстановлению;

λ₀, λ₁, ..., λ₆ – интенсивности переходов системы в соответствующие состояния;

μ₃, μ₄ – интенсивности восстановления системы из соответствующих состояний.

Согласно графу состояний АС динамику переходов при марковском процессе можно описать с помощью следующей системы дифференциальных уравнений (СДУ):

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_3 p_3(t) + \mu_4 \times \\ \times (1 - (p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t))); \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_4) p_1(t) + \lambda_0 p_0(t); \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_2 + \lambda_5) p_2(t) + \lambda_1 p_1(t); \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -(\mu_3 + \lambda_6) p_3(t) + \lambda_2 p_2(t); \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = -\mu_4 p_4(t) + \lambda_4 p_1(t) + \lambda_5 p_2(t) + \lambda_6 p_3(t) \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях:

$$p_0(0) = 1; p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0.$$

Уравнение нормировки учтено в первом уравнении СДУ (1).

На первом этапе осуществляется решение СДУ (1) с помощью программного комплекса Mathematica и Maple. В случае отрицательного результата, согласно таблице, осуществляется переход ко второму этапу, заключающемуся в нахождении вероятностей p_i, i = 0, 4 стационарного процесса путем приравнивания каждого уравнения СДУ нулю.

$$\begin{cases} -\lambda_0 p_0 + \mu_3 p_3 + \mu_4 (1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)) = 0; \\ -(\lambda_1 + \lambda_4) p_1 + \lambda_0 p_0 = 0; \\ -(\lambda_2 + \lambda_5) p_2 + \lambda_1 p_1 = 0; \\ -(\mu_3 + \lambda_6) p_3 + \lambda_2 p_2 = 0; \\ -\mu_4 p_4 + \lambda_4 p_1 + \lambda_5 p_2 + \lambda_6 p_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему однородных линейных алгебраических уравнений (САУ) (2) с помощью программного комплекса Mathematica, получаем

Основные этапы решения системы дифференциальных уравнений

№	Содержание этапа	Результат этапа	Контроль этапа
1	Решение СДУ (1)	Получение функций p ₀ (t), ..., p ₄ (t)	В случае нерешения СДУ (1) - переход к этапу 2
2	Решение САУ (2)	Получение выражений p ₀ , ..., p ₄	Проверка условия $\sum_{i=0}^4 p_i = 1$.
3	Решение (6) САУ при условии (5). Решение (8) СДУ (4)	Получение функций p ₀ (t), q ₃ (t), p ₄ (t)	Проверка условия p ₀ (t) + q ₃ (t) + p ₄ (t) = 1
4	Обратное преобразование графа. Решение СДУ (1).	Получение функций p ₁ (t), p ₂ (t), p ₃ (t)	Проверка условия $\sum_{i=0}^4 p_i(t) = 1$
5	Построение зависимостей	p ₀ (t), ..., p ₄ (t); p ₀ (t), q ₃ (t), p ₄ (t)	Сравнение зависимостей исходного и преобразованного графов состояний АС

$$\begin{aligned}
 p_0 &= ((\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_2 + \lambda_5)(\lambda_6 + \mu_3)\mu_4) / \\
 &/((\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_2 + \lambda_5)(\lambda_6 + \mu_3)\mu_4 + \lambda_0((\lambda_2 + \lambda_5) \times \\
 &\times (\lambda_6 + \mu_3)(\lambda_4 + \mu_4) + \lambda_1((\lambda_6 + \mu_3) \times \\
 &\times (\lambda_5 + \mu_4) + \lambda_2(\lambda_6 + \mu_4))))); \\
 p_1 &= (\lambda_0(\lambda_2 + \lambda_5)(\lambda_6 + \mu_3)\mu_4) / \\
 &/((\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_5 + \lambda_2)(\lambda_6 + \mu_3)\mu_4 + \lambda_0((\lambda_2 + \lambda_5) \times \\
 &\times (\lambda_6 + \mu_3)(\lambda_4 + \mu_4) + \lambda_1((\lambda_6 + \mu_3) \times \\
 &\times (\lambda_5 + \mu_4) + \lambda_2(\lambda_6 + \mu_4))))); \\
 p_2 &= (\lambda_0\lambda_1(\lambda_6 + \mu_3)\mu_4) / ((\lambda_1 + \lambda_4) \times \\
 &\times (\lambda_5 + \lambda_2)(\lambda_6 + \mu_3)\mu_4 + \lambda_0((\lambda_2 + \lambda_5)(\lambda_6 + \mu_3) \times \\
 &\times (\lambda_4 + \mu_4) + \lambda_1((\lambda_6 + \mu_3)(\lambda_5 + \mu_4) + \lambda_2(\lambda_6 + \mu_4))))); \\
 p_3 &= (\lambda_0\lambda_1\lambda_2\mu_4) / ((\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_5 + \lambda_2) \times \\
 &\times (\lambda_6 + \mu_3)\mu_4 + \lambda_0((\lambda_2 + \lambda_5)(\lambda_6 + \mu_3) \times \\
 &\times (\lambda_4 + \mu_4) + \lambda_1((\lambda_6 + \mu_3)\lambda_5 + \mu_4) + \lambda_2(\lambda_6 + \mu_4))); \\
 p_4 &= (\lambda_0(\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_5)\lambda_6 + \lambda_1\lambda_5\mu_3 + \\
 &+ \lambda_4(\lambda_5 + \lambda_2)(\lambda_6 + \mu_3))) / ((\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_5 + \lambda_2)(\lambda_6 + \mu_3) \times \\
 &\times \mu_4 + \lambda_0((\lambda_2 + \lambda_5)(\lambda_6 + \mu_3)(\lambda_4 + \mu_4) + \\
 &+ \lambda_1((\lambda_6 + \mu_3)(\lambda_5 + \mu_4) + \lambda_2(\lambda_6 + \mu_4)))).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Правильность полученного решения (3) системы линейных уравнений (2) проверяется равенством

$$\sum_{i=0}^4 p_i(t) = 1.$$

3. Преобразование исходного графа

Суть третьего этапа решения системы дифференциальных уравнений заключается в прямом преобразовании исходного графа (рис.1) путем его сжатия до вида, представленного на рис. 2.

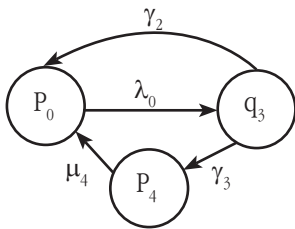


Рис.2. Преобразованный граф состояний оценки устойчивости АС в условиях ПТВ. Динамика преобразованного графа состояний АС описывается СДУ более простого типа

$$\begin{cases}
 \frac{dp_0(t)}{dt} = \gamma_2 q_3(t) + \mu_4 p_4(t) - \lambda_0 p_0(t); \\
 \frac{dq_3(t)}{dt} = -(\gamma_2 + \gamma_3) q_3(t) + \lambda_0 p_0(t); \\
 \frac{dp_4(t)}{dt} = -\mu_4 p_4(t) + \gamma_3 q_3(t); \\
 p_0(t) + q_3(t) + p_4(t) = 1
 \end{cases}
 \tag{4}$$

при начальных условиях: $p_0(0) = 1; q_3(0) = p_4(0) = 0$.

Для корректности результатов решения задачи необходимо соблюдение следующих условий:

$$\begin{aligned}
 q_3 &= p_1 + p_2 + p_3; \\
 P_{0, \text{эн}} - P_{0, \text{рэд}}(\gamma_2, \gamma_3) &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$P_{4, \text{эн}} - P_{4, \text{рэд}}(\gamma_2, \gamma_3) = 0.$$

Для выполнения последнего условия необходимо решить СДУ (4). В результате имеем

$$\begin{aligned}
 p_0 &= (\gamma_2 + \gamma_3)\mu_4 / (\gamma_3\lambda_0 + \gamma_2\mu_4 + \gamma_3\mu_4 + \lambda_0\mu_4); \\
 q_3 &= \lambda_0\mu_4 / (\gamma_3\lambda_0 + \gamma_2\mu_4 + \gamma_3\mu_4 + \lambda_0\mu_4); \\
 p_4 &= \gamma_3\lambda_0 / (\gamma_3\lambda_0 + \gamma_2\mu_4 + \gamma_3\mu_4 + \lambda_0\mu_4).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

С учётом соотношений (5) определим интенсивности γ_2, γ_3 преобразованного графа, позволяющие считать полученный граф адекватным исходному.

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_6 + \lambda_2\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6 + \lambda_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3 + \lambda_5\mu_3}; \\
 \gamma_3 &= \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_6 + \lambda_4\lambda_2\lambda_6 + \lambda_1\lambda_5\lambda_6 + \lambda_4\lambda_5\lambda_6 + \lambda_4\lambda_2\mu_3 + \lambda_5\lambda_1\mu_3 + \lambda_4\lambda_5\mu_3)}{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_6 + \lambda_2\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6 + \lambda_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3 + \lambda_5\mu_3)} +
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Новый граф значительно проще исходного, а описывающие его СДУ (4) позволяют оценить динамику системы посредством определения $p_0(t), q_3(t), p_4(t)$.

С помощью программного комплекса Mathematica после ряда упрощений находим

$$\begin{aligned}
 p_0(t) &= (e^{-1/2t(\alpha+\gamma_2+\gamma_3+\lambda_0+\mu_4)}((-1 + e^{t\beta})\beta\lambda_0(\gamma_3(\gamma_2 + \gamma_3 - \lambda_0) - \\
 &- (\gamma_2 + \lambda_0)\mu_4 + \mu_4^2) + (\gamma_2^2 + (\gamma_3 - \lambda_0)^2 + 2\gamma_2(\gamma_3 + \lambda_0 - \mu_4) - \\
 &- 2(\gamma_3 + \lambda_0)\mu_4 + \mu_4^2)(2e^{-1/2t(\beta+\gamma_2+\gamma_3+\lambda_0+\mu_4)} \times \\
 &\times (\gamma_2 + \gamma_3)\mu_4 + (1 + e^{t\beta})\lambda_0(\gamma_3 + \mu_4))) / \\
 &/ (2(\gamma_3\lambda_0 + (\gamma_3 + \gamma_2 + \lambda_0)\mu_4)((\gamma_3 + \gamma_2 + \lambda_0 + \mu_4)^2 - \\
 &- 4(\gamma_3\lambda_0 + (\gamma_3 + \gamma_2 + \lambda_0)\mu_4))); \\
 q_3(t) &= -(e^{-1/2t(\alpha+\gamma_2+\gamma_3+\lambda_0+\mu_4)}\lambda_0 \times \\
 &\times (\alpha\mu_4 + e^{t\alpha}\alpha\mu_4 - 2e^{1/2t(\alpha+\gamma_2+\gamma_3+\lambda_0+\mu_4)}\alpha\mu_4 + (1 - e^{t\alpha}) \times \\
 &\times ((\gamma_2 + \lambda_0 - \mu_4)\mu_4 + \gamma_3(2\lambda_0 + \mu_4)))) / \\
 &/ (2\alpha(\gamma_3\lambda_0 + (\gamma_2 + \gamma_3 + \lambda_0)\mu_4)); \\
 p_4(t) &= (e^{-1/2t(\alpha+\gamma_2+\gamma_3+\lambda_0+\mu_4)}\gamma_3\lambda_0 \times \\
 &\times (-1 + e^{t\alpha} - 2e^{1/2t(\alpha+\gamma_2+\gamma_3+\lambda_0+\mu_4)}\alpha - (-1 + e^{t\alpha}) \times \\
 &\times (\gamma_2 + \gamma_3 + \lambda_0 + \mu_4))) / (2\alpha(\gamma_3\lambda_0 + (\gamma_2 + \gamma_3 + \lambda_0)\mu_4)),
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{(\gamma_2 + \gamma_3 + \lambda_0 + \mu_4)^2 - 4(\gamma_2\lambda_0 + (\gamma_2 + \gamma_3 + \lambda_0)\mu_4)}; \\
 \beta &= \sqrt{\gamma_2^2 + (\gamma_3 - \lambda_0)^2 + 2\gamma_2(\gamma_3 + \lambda_0 - \mu_4) - 2(\gamma_3 + \lambda_0)\mu_4 + \mu_4^2}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

4. Обратное преобразование графа

Убедившись в адекватности преобразованного графа исходному и имея зависимости (8), на четвертом этапе в соответствии с таблицей осуществляется обратное преобразование графа путем введения в него состояния S_j , описываемого $p_j(t)$.

По известным значениям $p_0(t)$ и интенсивностям $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_4$ исходного графа из СДУ (1) представляется возможным сформировать дифференциальное уравнение
$$\frac{dp_1(t)}{dt} + (\lambda_1 + \lambda_4)p_1(t) - \lambda_0 p_0(t) = 0. \quad (10)$$

Решение данного уравнения может быть осуществлено либо аналитически, либо численно при конкретных значениях $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_4$. В связи с тем, что аналитическое решение громоздко, приведем пример численного решения уравнения (10).

Пусть исходный граф описывается следующими интенсивностями переходов:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0,1; \lambda_1 = 0,05; \lambda_2 = 0,05; \lambda_3 = 0,05; \\ \lambda_4 &= 0,01; \lambda_5 = 0,01; \lambda_6 = 0,01; \mu_3 = 0,2; \\ \mu_4 &= 0,04. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение уравнения (10) позволяет получить временную зависимость

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 0,3185 - 1,595e^{-0,11645t} + \\ &+ 2,6e^{-0,06t} - 1,3234e^{-0,0531t}. \end{aligned} \quad (12)$$

По аналогии с нахождением зависимости $p_1(t)$ для численных значений (11) определяем значения вероятностей $p_2(t), p_3(t)$ исходного графа

$$\begin{aligned} p_2(t) &= 0,2654 + 1,413e^{-0,1165t} + \\ &+ 9,59e^{-0,053t} + e^{-0,0531t}(7,912 + 0,13t); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} p_3(t) &= 0,0632 - 0,1131e^{-0,21t} + 0,7556e^{-0,1165t} - \\ &- 3,054e^{-0,053t} + e^{-0,06t}(2,3484 + 0,0433t). \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с таблицей четвертый этап должен закончиться проверкой условия $\sum_{i=0}^4 p_i(t) = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 p_i(t) &= 0,1911 + 0,9005e^{-0,1165t} - 0,09157e^{-0,05308t} + \\ &+ 0,3185 - 1,595e^{-0,11645t} + 2,6e^{-0,06t} - 1,3234e^{-0,0531t} + \\ &+ 0,2654 + 1,413e^{-0,1165t} - 9,59e^{-0,053t} + \\ &+ e^{-0,06t}(7,912 + 0,13t) + 0,0632 - 0,1131e^{-0,21t} + \\ &+ 0,7556e^{-0,1165t} - 3,054e^{-0,053t} + \\ &+ e^{-0,06t}(2,3484 + 0,0433t) + 0,1618 + \\ &+ 0,1355e^{-0,1165t} - 0,2973e^{-0,0530t} = 1. \end{aligned}$$

Литература

1. Черноскутов АИ, Шабакин МВ. Математическая модель оценки эффективности системы защиты информации АС ВН // XXVI Межрегиональная НТК, Серпухов. – Часть II. – 2007. С. 212 – 216.
2. Климов СМ, Черноскутов АИ, Мухомин ВА. Оценка эффективности защиты информации в АС ВН // Стратегическая стабильность. – 2008, №1. С. 34–38.
3. Половко АМ. Основы теории надежности. – М: 2004 – 704с.

Материал поступил в редакцию 30. 04. 2009 г.

5. Графическое представление зависимостей $p_0(t), q_3(t), p_4(t)$ и $p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$

На рис. 3 и 4 представлены зависимости вероятностей функционирования преобразованного и исходного графов.

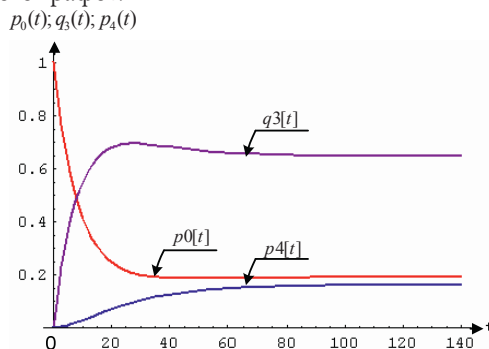


Рис. 3. Зависимости $p_0(t), p_3(t), p_4(t)$ преобразованного графа

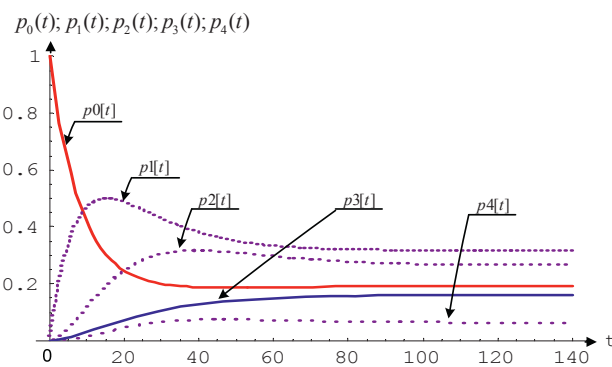


Рис. 4. Результирующие зависимости $p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ исходного графа

6. Заключение

Предложенный метод преобразования графа состояний процесса функционирования АС обеспечивает возможность существенного снижения временных затрат на решение задачи оценки устойчивости функционирования АС в случае большой размерности системы дифференциальных уравнений, описывающих сложные процессы функционирования АС.

Кроме того, полученные авторами аналитические соотношения упрощают оценку влияния отдельных деструктивных факторов ПТВ на точность функционирования АС в условиях ПТВ.