

УДК 621.391.2

© Шевченко В.А.
Shevchenko V.**ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ДЛЯ ДВОИЧНЫХ КОДОВ
В НЕКОГЕРЕНТНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ С «САМОНОРМАЛИЗУЮЩЕЙСЯ»
МЕТРИКОЙ В ПРИСУТСТВИИ ИМПУЛЬСНОЙ ПОМЕХИ****THE ERROR PROBABILITY UPPER BOUND FOR BINARY CODES ON
COMMUNICATION CHANNELS WITH "SELF-NORMALISED" METRICS IN THE
PRESENCE OF THE PULSED JAMMING**

Аннотация. Исследованы характеристики двоичных кодов в некогерентном канале со случайной импульсной помехой в виде гауссовского шума. Рассмотрена «самонормализующаяся» метрика. Получена верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит для такого канала.

Annotation. The performance of binary codes on noncoherent channel with pulse Gaussian noise interference is investigated. The self-normalized metric are considered. The error probability union bound is obtained for such channel.

Ключевые слова. Помехоустойчивость, пакет ошибок, импульсная помеха, некогерентный канал связи, «самонормализующаяся» метрика, кодирование.

Key words. Anti-jamming, package errors, pulse jamming, noncoherent channel, self-normalized metric, coding.

Для каналов связи с кодированием в условиях воздействия случайной импульсной помехи характерно появление ошибок, группирующихся в пакеты, когда одиночный импульс помехи перекрывает несколько символов одной кодовой комбинации [1,2].

Наибольший выигрыш от кодирования в этих условиях достигается в случае использования «когерентного» приема, «мягких» решений и «сторонней» информации о состоянии канала [2].

Однако в ряде случаев, когда начальная фаза сигналов, передаваемых по каналу, меняется во времени случайным образом, а ее точная и своевременная оценка затруднительна, возможен только «некогерентный» прием. Таким примером являются каналы с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты.

В свою очередь наличие на приемной стороне «сторонней» информации о состоянии канала представляет собой идеализированный случай. В ее отсутствие «мягкие» решения с линейным сложением начинают уступать «жестким» [2]. Метрика с «самонормализующимся» объединением «мягких» решений демодулято-

ра, которую назовем «самонормализующейся», свободна от этого недостатка [3].

Получить точные аналитические оценки вероятности ошибки на бит P_b для «некогерентного» канала с «самонормализующейся» метрикой в условиях воздействия импульсной помехи, вызывающей группирование ошибок, затруднительно. Традиционно для расчета вероятности ошибки на бит применяют асимптотически точную верхнюю аддитивную границу. В работе [4] такая граница предложена для каналов с помехой в части полосы рабочих частот, вызывающей независимые ошибки. Вместе с тем известен подход построения верхней аддитивной границы вероятности ошибки на бит для каналов с произвольной решающей метрикой в условиях воздействия случайной импульсной помехи, вызывающей группирование ошибок [5].

Целью настоящей статьи является конкретизация данного подхода применительно к «самонормализующейся» метрике.

Рассмотрим канал связи, в котором для передачи информации используется блочный (n, k) код со скоро-

Шевченко Вячеслав Анатольевич – кандидат технических наук, начальник отдела Военно-научного комитета Вооруженных сил Российской Федерации, тел. +7(499)-739-91-32.

Shevchenko Vyacheslav – the candidate of the technical sciences, chief of division of military-scientific committee of Military forces of the Russian Federation, +7(499)-739-91-32.

стью $r=k/n$ и минимальным расстоянием d_{\min} . Для сверточных кодов аналогом длины кода может рассматриваться глубина декодирования как производная от длины кодового ограничения [1,2].

Дистанционные свойства кода охарактеризуем коэффициентами $A_{w,d}$ которые представляют собой количество кодовых комбинаций весом d , порожденных входными информационными последовательностями весом w .

Переданную кодовую комбинацию длиной n обозначим через $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ей соответствует канальная последовательность на входе декодера $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Введем понятие «пакет ошибок», под которым будем понимать совокупность символов одной кодовой комбинации, которые могут быть поражены одиночным импульсом помехи. Обозначим длину пакета через b .

Для удобства дальнейшего анализа примем, что на интервале передачи одной кодовой комбинации возможно разместить $L = \lfloor n/b \rfloor$ пакетов длиной b . Очевидно, что i -й символ кодовой комбинации принадлежит пакету с номером $j = \lceil i/b \rceil$.

Последовательность пакетов сопоставим с последовательностью состояний канала связи $z=(z_1, z_2, \dots, z_L)$, где z_j – случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью ρ (вероятность появления импульсной помехи в течение передачи j -го пакета) и значение 0 – с вероятностью $1-\rho$.

Будем считать, что в течение своего воздействия случайная импульсная помеха принимает вид аддитивного белого гауссовского шума со спектральной плотностью N/ρ .

Под воздействием помехи возможна трансформация переданной кодовой последовательности в последовательность $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, отличающуюся от переданной d символами кода.

Количество символов v , которыми в пакете переданная последовательность отличается от ошибочно принятой, определяет его вес.

Пакеты, в которых нет «отличающихся» символов, назовем «нулевыми», остальные – «ненулевыми».

Обозначим число пакетов с весом v через f_v , число «ненулевых» пакетов – через l .

Ограничим максимальное число «ненулевых» пакетов величиной

$$F = \min(d, L), \tag{1}$$

минимальное – величиной $\lceil d/b \rceil$.

Максимальный вес пакета m определим следующим образом:

$$m = \begin{cases} b, & b \leq d; \\ d-l+1, & b > d. \end{cases} \tag{2}$$

С учетом соотношений (1) и (2) распределение числа пакетов различного веса $f=(f_0, f_1, \dots, f_m)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$F = \sum_{v=0}^m f_v = f_0 + l; \tag{3}$$

$$d = \sum_{v=1}^m v f_v. \tag{4}$$

Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит, учитывающая вероятности появления возможных комбинаций распределения d «отличающихся» символов по l «ненулевым» пакетам различной длины, имеет следующий вид [5]:

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^n A_d \left[\min_{s \geq 1} \frac{(bF-d)! F!}{(bF)!} \sum_{l=\lceil d/b \rceil}^F \frac{A(d, l; \mathbf{g})}{(F-l)!} \right], \tag{5}$$

где $A_d = \sum_{w=1}^k \frac{w}{k} A_{w,d}$;

$A(d, l, \mathbf{g})$ – однородные полиномы Белла;

$\mathbf{g}=(g_1, g_2, \dots, g_{d-l+1})$ – формальные переменные.

Однородные полиномы Белла, с учетом того, что $A(l, l, \mathbf{g})=g_l$, удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению [6]:

$$A(d, l, \mathbf{g}) = \begin{cases} g_d, & l = 1; \\ \sum_{i=1}^{d-l+1} C_{d-1}^{i-1} g_i A(d-i, l-1; \mathbf{g}), & l > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Для канала с произвольной решающей метрикой $m(y, x, z)$ формальные переменные g_v , где $v = \overline{1, n}$, определены следующим образом [5]:

$$g_v = \begin{cases} D(s, v) \frac{b!}{(b-v)!}, & v \leq b; \\ 0, & v > b, \end{cases} \tag{7}$$

где s – некоторое положительное число,

$$D(s, v) = \rho M \left(\exp \left(s \left(m(y_i, \hat{x}_i; z_j = 1) - m(y_i, x_i; z_j = 1) \right) \right) \right)^v + (1-\rho) \exp \left(s v \left(m(y_i, \hat{x}_i; z_j = 0) - m(y_i, x_i; z_j = 0) \right) \right). \tag{8}$$

Найдем соотношения для расчета величины $D(s, v)$ применительно к «самонормализующейся» метрике.

Примем, что двоичный символ кода $x_i=0$ передается сигналом $S_0(t)$, а символ кода $x_i=1$ – сигналом $S_1(t)$. Сигналы $S_0(t)$ и $S_1(t)$ являются взаимно ортогональными в усиленном смысле.

В демодуляторе этим сигналам соответствуют свои квадратичные детекторы. На выходе детекторов сигналов $S_0(t)$ и $S_1(t)$ по окончании приема i -го символа кода, где $i = \overline{1, n}$, формируются отсчеты $Y_{0,i}$ и $Y_{1,i}$ соответственно.

В демодуляторе отсчеты $Y_{0,i}$ и $Y_{1,i}$ нормируются относительно их суммы, так что на соответствующих выхо-

дах формируются величины [4]

$$\Omega_{k,i} = Y_{k,i} / (Y_{0,i} + Y_{1,i}), \quad k = \overline{0,1}, \quad (9)$$

которые связаны соотношением

$$\Omega_{0,i} + \Omega_{1,i} = 1. \quad (10)$$

Структурная схема демодулятора с «самонормализующимся» объединением «мягких» решений представлена на рис. 1.

«Самонормализующаяся» решающая метрика следующим образом:

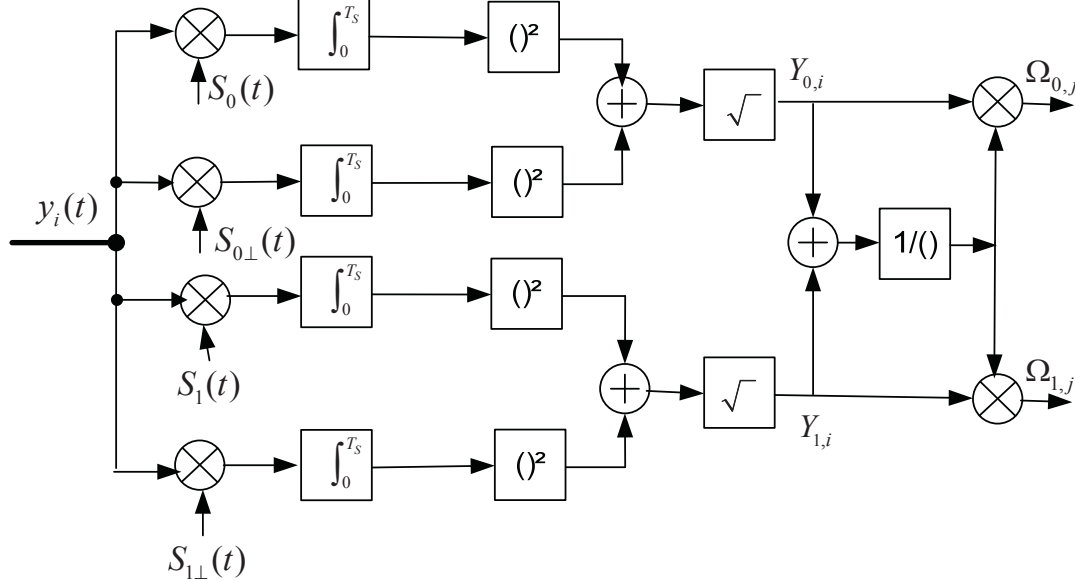


Рис. 1 Структурная схема демодулятора с «самонормализующимся» объединением «мягких» решений

определяется следующим образом [4]:

$$m(y_i = (Y_{0,i}, Y_{1,i}), x_i; z_j) = \Omega_{x_i,i}. \quad (11)$$

Тогда с учетом соотношений (10) и (11)

$$m(y_i, \hat{x}_i; z_j) - m(y_i, x_i; z_j) = \Omega_{\hat{x}_i,i} - \Omega_{x_i,i} = 1 - 2\Omega_{x_i,i}. \quad (12)$$

Примем, что $x_i = 0$.

В случае отсутствия помехи величина $Y_{k,i}$ определяется из следующего соотношения:

$$Y_{k,i} = \begin{cases} E_b r, & k = x_i; \\ 0, & k \neq x_i, \end{cases} \quad (13)$$

где E_b – энергия сигнала, приходящаяся на бит информации, так что $\Omega_{0,i} = 1$ и

$$\exp(s(m(y_i, \hat{x}_i; 1) - m(y_i, x_i; 1))) = \exp(-s). \quad (14)$$

В присутствии помехи величина $Y_{k,i}$ является случайной со следующей плотностью распределения [4]:

$$p_{Y_{k,i}}(y_{k,i} | x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y_{k,i}}{2\sigma^2} - \gamma^2\right) I_0\left(\sqrt{\frac{2y_{k,i}\gamma^2}{\sigma^2}}\right), & k = x_i \\ \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y_{k,i}}{2\sigma^2}\right), & k \neq x_i \end{cases} \quad (15)$$

где $\gamma^2 = \frac{E_b}{N_j} r \rho$;

σ^2 – мощность помехи;

$I_0()$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Соответственно, величина $\Omega_{0,i}$ будет также случайной. Определим плотность ее распределения. С этой целью введем следующие случайные величины:

$$\Omega_1 = \Omega_{0,i} = Y_{0,i} / (Y_{0,i} + Y_{1,i}); \quad (16)$$

$$\Omega_2 = Y_{0,i} + Y_{1,i}.$$

Из соотношений (16) выразим величины $Y_{0,i}$ и $Y_{1,i}$

$$Y_{0,i} = \Omega_1 \Omega_2; \quad Y_{1,i} = \Omega_2 (1 - \Omega_1). \quad (17)$$

Совместная плотность распределения случайных величин $Y_{0,i}$ и $Y_{1,i}$ определяется следующим образом:

$$p_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) = p_{Y_{0,i}}(y_{0,i} = \omega_1 \omega_2 | x_i = 0) \times p_{Y_{1,i}}(y_{1,i} = \omega_2 (1 - \omega_1) | x_i = 0) J, \quad (18)$$

где J – якобиан преобразования.

Плотность распределения величины Ω_1 найдем путем усреднения правой части выражения (18) по величине Ω_2 :

$$p_{\Omega_1}(\omega_1) = \int_0^\infty p_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) d\omega_2. \quad (19)$$

Якобиан преобразования J для системы (17) имеет следующий вид:

$$J = \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_2 & 1 - \omega_1 \end{vmatrix} = \omega_2. \quad (20)$$

Подставляя выражения (15) и (20) в выражение (18), а последнее – в выражение (19) и введя замену переменной $u = \omega_2 / 2\sigma^2$, получим

$$p_{\Omega_1}(\omega_1) = \exp(-\gamma^2) \int_0^\infty u I_0\left(2\sqrt{\gamma^2 \omega_1 u}\right) \exp(-u) du. \quad (21)$$

Вычислим интеграл в правой части выражения

(21) как интегральное преобразование Лапласа L функции $uI_0(2\sqrt{au})$, где $a = \omega_1\gamma^2$. Используя [7] табличное значение

$$F(p) = L\{f(u) = I_0(2\sqrt{au})\} = \exp(a/p)/p,$$

где p – положительная константа, и соотношение

$$L\{uf(u)\} = -\partial F(p)/\partial p,$$

приведем выражение (21) с учетом выбора $p=1$ к следующему виду:

$$P_{\Omega_1}(\omega_1) = (1 + \omega_1\gamma^2) \exp(\omega_1\gamma^2 - \gamma^2). \quad (22)$$

Величина Ω_1 изменяется в пределах от 0 до 1.

Тогда с учетом выражений (12) и (22)

$$\begin{aligned} M(\exp(s(m(y_i, \hat{x}_i; 0) - m(y_i, x_i; 0)))) &= \\ = M(\exp(s(1 - 2\Omega_1))) &= \\ = \exp(s - \gamma^2) \int_0^1 (1 + \omega_1\gamma^2) \exp((\gamma^2 - 2s)\omega_1) d\omega_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Воспользовавшись известными выражениями для неопределенных интегралов вида

$$\int u \exp(au) du = \exp(au)(au - 1)/a^2;$$

$$\int \exp(au) du = \exp(au)/a$$

и проделав некоторые математические преобразования, вместо выражения (23) получим

$$\begin{aligned} M(\exp(s(m(y_i, \hat{x}_i; 0) - m(y_i, x_i; 0)))) &= \\ = \frac{2s \exp(-\gamma^2 + s) + (\gamma^4 - 2s - 2s\gamma^2) \exp(-s)}{(\gamma^2 - 2s)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив выражения (14) и (24) в выражение (8), приведем его к следующему виду:

$$D(s, \nu) = (1 - \rho) \exp(-s\nu) + \rho \left[\frac{2s \exp(-\gamma^2 + s) + (\gamma^4 - 2s - 2s\gamma^2) \exp(-s)}{(\gamma^2 - 2s)^2} \right]^\nu. \quad (25)$$

Найденное соотношение (25) при подстановке в выражение (7) и расчете полиномов $A(d, l, g)$ с использованием рекуррентной формулы (6) определяет верхнюю границу вероятности ошибки на бит (5) для канала с «самонормализующейся» метрикой.

Воспользуемся полученными соотношениями для оценки характеристик некоторых двоичных сверточных кодов в условиях воздействия «наихудшей» помехи. Под «наихудшей» будем понимать помеху, вероятность появления отдельного импульса ρ которой выбрана таким образом, чтобы максимизировать правую часть выражения (5).

На рис.2 для сверточных кодов с длиной кодового ограничения $\nu=7$, скоростями $r=1/2, 1/3, 1/4$ и порождающими полиномами в восьмеричной форме (247,371), (225,331,367), (231,273,327,37) соответственно представлены зависимости вероятности ошибки на бит P_b от отношения E_b/N_j в канале с «самонормализующейся» метрикой при различных значениях максимальной длины пакетов ошибок.

Из анализа графиков, представленных на рис. 2, следует, что если при независимых ошибках характеристики сверточных кодов со скоростями $r=1/3$ и $r=1/4$

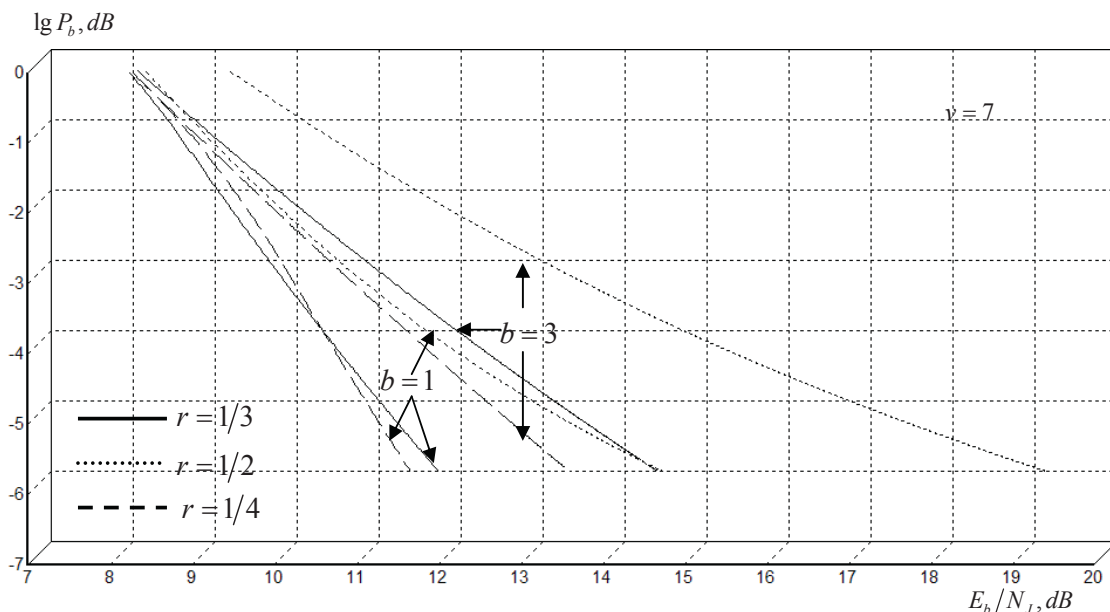


Рис.2 Зависимость верхней аддитивной границы P_b от отношения E_b/N_j для сверточных кодов со скоростями $r=1/2, 1/3, 1/4$ и $\nu=7$ при различных значениях максимальной длины пакетов b

сравнимы, то при группировании ошибок сверточный код со скоростью $r=1/4$ начинает показывать наилучшие характеристики. Данное обстоятельство обусловлено тем, что среди рассматриваемых этот код имеет наибольшее минимальное кодовое расстояние, позволяющее эффективно исправлять пакеты ошибок.

Для сверточного кода с $\nu=7$ и скоростью $r=1/4$ оценим, насколько «самонормализующаяся» метрика уступает «мягким» решениям с наличием «сторонней» информации о состоянии канала и превосходит «жесткие» решения без наличия информации о состоянии канала.

Для случая «жестких» решений без наличия «сторонней» информации о состоянии канала величина $D(s, \nu)$ задается следующим выражением [5]:

$$D(s, \nu) = (1 - \rho) e^{-s\nu} + \rho \left((1 - p_M) e^{-s} + \frac{(M-2)p_M}{M-1} + \frac{p_M}{M-1} e^s \right)^\nu, \quad (26)$$

где M – объем алфавита сигналов, используемого для передачи $\log_2(M)$ информации;

p_M – вероятность ошибочного приема M -го сигнала, определяемая следующим образом:

$$p_M = \frac{1}{M} \sum_{i=2}^M (-1)^i C_M^i \exp\left(-\frac{E_b}{N_J} \log_2(M) r \rho \left(1 - \frac{1}{i}\right)\right). \quad (27)$$

Для случая «мягких» решений с наличием «сторонней» информации о состоянии канала улучшенная верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит имеет следующий вид [8]:

$$\lg P_b, dB$$

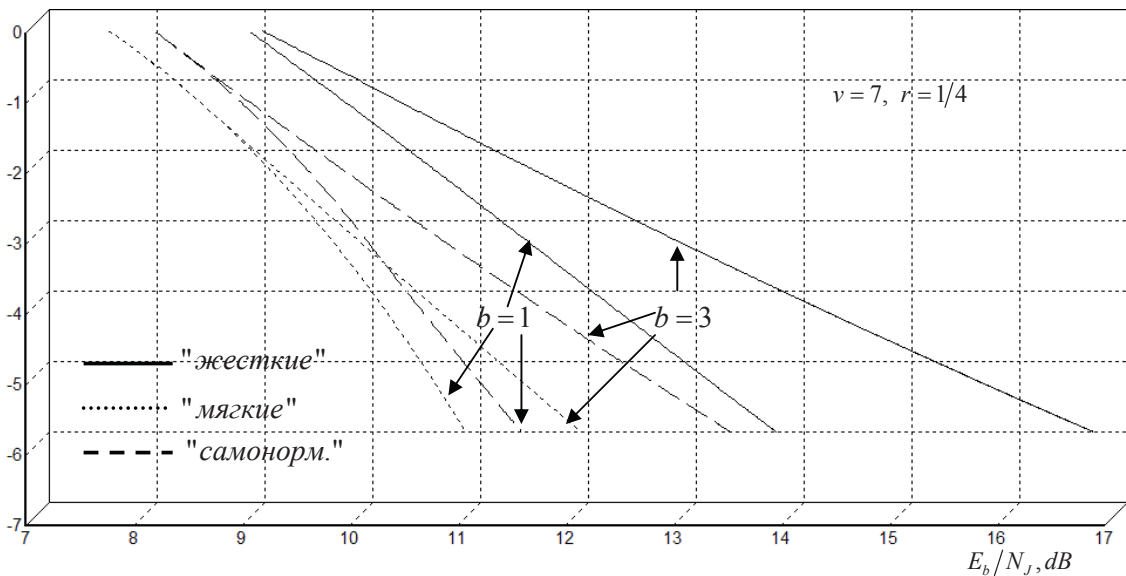


Рис.3 Зависимость верхней аддитивной границы P_b от отношения E_b/N_J для сверточного кода со скоростью $r=1/4$ и $\nu=7$ для различных решающих метрик при различных значениях максимальной длины пакетов b

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^n \min_{\alpha, \beta} \left(1 - \beta + \beta \left(\frac{(1 - \alpha^2)^d}{A_d M(\rho^l)} \right)^{1/2n} \right)^{-2n} \times \exp\left(-n \frac{\eta \beta}{1 - \eta(1 - \beta)} \frac{E_b}{N_J} r \rho\right), \quad (28)$$

где α, β – параметры, подлежащие оптимизации численными методами;

$$\eta = \alpha d / ((1 + \alpha) n);$$

$M(\rho^l)$ – вероятность поражения помехой d «отличающихся» символов кода, усредненная по возможному числу «ненулевых» пакетов l .

При выборе $\beta=1$ граница (27) переходит в верхнюю аддитивную.

Выражение для расчета величины $M(\rho^l)$ определяется следующим образом [8]:

$$M(\rho^l) = \frac{(bF - d)! F!}{(bF)!} \sum_{i=\lfloor d/b \rfloor}^F \frac{A(d, i; \mathbf{g})}{(F - i)!}, \quad (29)$$

где $A(d, i; \mathbf{g})$ – однородные полиномы Белла, определяемые с использованием рекуррентной формулы (6);

$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{d+i-1})$ – переменные, определяемые с использованием выражения (7) с учетом того, что [8]

$$D(s, \nu) = \rho. \quad (30)$$

На рис.3 представлены зависимости вероятности ошибки на бит от отношения E_b/N_J для указанных решающих метрик. Как и ранее, предполагается, что максимальная длина пакетов ошибок принимает различные значения.

Из анализа графиков, представленных на рис. 3, следует, что применение «самонормализующейся» ме-

трики вместо «жестких» решений без наличия информации о состоянии канала позволяет существенно уменьшить отношение E_b/N_f , при котором обеспечивается требуемая вероятность ошибки на бит.

При этом в случае независимых ошибок ($b=1$) «самонормализующаяся» метрика почти не уступает «мягким» решениям с наличием «сторонней» информации о состоянии канала. С появлением группирования ошибок этот разрыв увеличивается, однако использование «жестких» решений ведет к еще более худшим результатам.

Таким образом, получены аналитические соотношения, которые позволяют конкретизировать верхнюю

аддитивную границу вероятности ошибки на бит применительно к «некогерентному» каналу с «самонормализующейся» метрикой в условиях воздействия случайной импульсной помехи, вызывающей группирование ошибок. Найденные соотношения позволяют оценить для этих условий степень приближения характеристик «самонормализующейся» метрики к характеристикам метрики с «мягкими» решениями и наличием информации о состоянии канала, а также определить преимущество относительно характеристик метрики с «жесткими» решениями без наличия информации о состоянии канала связи.

Литература

1. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1987. - 392 с.
2. Simon M.K., Omura J.K., Scholtz R.A., Levitt B.K. *Spread Spectrum Communications, vol. I-III*, Rockville, MD: Computer Science, Maryland, 1985.
3. Miller L. E., Lee J. S., Kadriou A. P. *Probability of error analyses of a BFSK frequency-hopping system with diversity under partial-band jamming interference—Part III: Performance of square-law self-normalizing soft decision receivers*, //IEEE Transactions on Communication, vol. COM-34, pp. 669-675, July 1986.
4. Cbeun K., Stark W.E. *Performance of robust metrics with convolutional coding and diversity in FHSS systems under partial-band noise jamming*, //IEEE Transactions on Communication, vol. 41, pp. 200-209, January 1993.
5. Шевченко В.А. Верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит в канале с «жесткими» решениями в условиях воздействия случайной импульсной помехи, //Известия института инженерной физики, 2010. - № 3, С. 43-47.
6. Кузьмин О.В. Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов, //Дискретная математика, 1994- том 6, вып. 3, С.39-49.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина: Пер. с англ. - М.: Наука, 1968. - 344 с.
8. Шевченко В.А., Скорик А.Д. Метод оценки вероятности ошибки на бит в каналах связи с группированием ошибок, //Двойные технологии, 2010. № 3.С. 68-71.

Материал поступил в редакцию 12. 12. 2010 г.