УДК 629.7.05.

© Алферьев В.Л.
Alferyev V.

СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИ-ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

PROPERTIES OF THE TRAJECTORIES OF THE OBTAINED IN SPHERICALLY UNIFORM FIELD

Аннотация. *В статье продолжено рассмотрение сферически-однородного поля для создания быстродействующих алгоритмов имитационного моделирования управляемого движения некоторых космических объектов. Статья является второй из представляемой серии работ. Список сокращений и обозначений представлен в работе[1]. Там же даны полная постановка задачи и доказательство корректности излагаемой методики.*

Annotation. *The article further considered spherically uniform field to create a high-speed algorithms for simulation of the obtained some space objects. The article is the second in a series of papers submitted. List of abbreviations and symbols presented in [1]. It also gives the full statement of the problem and the proof of the correctness of the stated methods.*

Ключевые слова. *Общее свойство, импульсная вариация, линейное уравнение, вариационная задача.*

Key words. *General properties, pulse variation, linear equation, variational problem.*

Решение уравнений управляемого движения космических объектов строится в виде рядов, члены которого взаимосвязаны простыми рекуррентными соотношениями. Вид такого решения, рекомендуемого для использования в программной реализации, предоставляется в следующих работах. В настоящей статье проводятся необходимые подготовительные мероприятия и доказываются общие рекуррентные взаимосвязи, необходимые для последующих исследований. Разработчиками программно-реализованных имитационных моделей, которым нужны только конечные соотношения, этот раздел может быть пропущен без риска потери требуемых сведений.

Перепишем уравнение управляемого переходного процесса [1] в виде

[redacted] (1)

в котором единичный вектор управления (направления вектора нерегулируемой тяги ДУ) [redacted] постоянен в инерциальном пространстве, и в соответствии с уравнением [redacted] [1]. Вспомогательный параметр ε введен для отслеживания порядка величины суммы $\sum_{i=1}$ [redacted] и впоследствии, после построения разложения искомого решения по высоте сферического слоя, будет положен равным единице. Таким образом, на начальном этапе решение уравнения (1) будем искать в виде степенного ряда по параметру ε или, что то же самое, по степеням суммы $\sum_{i=1}$ [redacted]

[redacted] (2)

Каждый член этих рядов является вкладом очередного приближения по высоте сферического слоя в искомое решение уравнения (1). Подставляя выписанные разложения в уравнение (1), непосредственно получим

[redacted]

Сравнивая члены при одинаковых степенях параметра ε, получим дифференциальные уравнения для каждого приближения по высоте сферического слоя. Для нулевого приближения уравнение примет вид

[redacted] (3)

Для любого p-го приближения $p \geq 1$ можем написать

[redacted] (4)

Полное решение дифференциального уравнения (3) для нулевого приближения по высоте сферического слоя записывается в виде суммы общего решения [redacted] од-

Алферьев Виктор Леонидович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, МАК «Вымпел», тел. (495)543-36-76.

Alferyev Victor – PhD., senior researcher, IJSC «Vympel», tel. (495)543-36-76.

нородного уравнения и частного решения [redacted] неоднородного уравнения

[redacted] (5)

для которых справедливы выражения

[redacted] (6)

Векторы [redacted] и [redacted] являются константами, определяемыми положением и скоростью баллистического объекта на время z=0 начала активного движения

[redacted] (7)

Функция $\Pi(a,z)$ вместе со своей производной $\Pi'(a,z)$, входящие в решение неоднородного уравнения, характеризуют энергетические затраты ДУ на совершение маневра и вдоль интегральных кривых уравнения управляемого движения (2) определяются равенствами

$$\Pi(a,z)=\sin z\int_0^z \frac{\cos z}{a-z}dz-\cos z\int_0^z \frac{\sin z}{a-z}dz;$$
$$\Pi'(a,z)=\cos z\int_0^z \frac{\cos z}{a-z}dz+\sin z\int_0^z \frac{\sin z}{a-z}dz, \quad (8)$$

удовлетворяя при этом дифференциальному уравнению

$$\Pi''(a,z)+\Pi(a,z)=\frac{1}{a-z} \quad (9)$$

с начальными условиями

$$\Pi(a,0)=0; \quad \Pi'(a,0)=0. \quad (10)$$

Общее решение [redacted] однородного и частное решение [redacted] неоднородного дифференциального уравнения (3), описывающее движение баллистического объекта при нулевом приближении по высоте сферического слоя, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

[redacted] $\Pi(a,z)\Big]$ (11)

с начальными условиями

[redacted] (12)

Для компактности последующего изложения введем в рассмотрение верхний индекс σ, который принимает одно из двух значений: 0 или 1. Значение индекса 0 соответствует общему решению однородного уравнения (1), а значение индекса σ=1 соответствует частному решению неоднородного уравнения

[redacted] (13)

С учетом введенного индекса σ уравнение (4) для каждой составляющей p-го приближения p≥1 перепишется в разделенном виде отдельно для слагаемых решения однородного уравнения и отдельно для слагаемых решения неоднородного дифференциального уравнения (1)

[redacted] (14)

с начальными условиями при p≥1

[redacted] (15)

В частности, для составляющих первого приближения по высоте сферического слоя уравнения (14) перепишутся в виде

[redacted] (16)

Поэтому, если положить

[redacted] (17)

и подставить эти свертки в уравнение (16), то, в силу произвольности (в общем случае) коэффициентов [redacted], окажутся справедливыми дифференциальные уравнения для компонент первого приближения

[redacted] (18)

Предположим далее, что для представления p-го приближения по высоте сферического слоя может быть использована свертка

[redacted] (19)

Покажем, что представление (19) будет справедливо и для (p+1)-го приближения. Поставим свертку (19) в дифференциальное уравнение (14). Получим

[redacted]

Вид выписанного уравнения позволяет формально задействовать свертку (19) для составляющих (p+1)-го приближения по высоте сферического слоя. Подставляя полученную формальную запись в это уравнение и сравнивая члены при одинаковых сомножителях [redacted], получим дифференциальные уравнения относительно компонент (p+1)-го приближения

[redacted] (20)

с начальными условиями при p≥0

[redacted] (21)

Так как решение дифференциального уравнения (20) с начальными условиями (21) имеет вид

[redacted] (22)

то, подставляя таким образом представленные компоненты p-го приближения в уравнение (19), получим

[redacted] (23)

что по индукции доказывает предположение (19). Общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1) имеют некоторые общие свойства, позволяющие организовать простой и эффективный итерационный вычислительный процесс.

Рассмотрим первое уравнение (22). Используя дифференциальное уравнение (20), для любого $p \geq 1$ выпишем цепочку преобразований

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_{p+1}^{(\sigma,i_1,\dots,i_{p+1}+1)}(z) =$$
$$= \int_0^z x^{i_{p+1}+1}[\vec{\boldsymbol{\rho}}_p''^{(\sigma,i_1,\dots,i_p)}(x) + z^{i_p}\vec{\boldsymbol{\rho}}_{p-1}^{(\sigma,i_1,\dots,i_{p-1})}(x)]\sin(z-x)\,dx =$$
$$= \int_0^z x^{i_{p+1}+1}\sin(z-x)\,d\vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(\sigma,i_1,\dots,i_p)} - \vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(\sigma,i_1,\dots,i_p+i_{p+1}+1)}(z) =$$
$$= x^{i_{p+1}+1}\text{[redacted]}$$
$$-\int_0^z \text{[redacted]}[x^{i_{p+1}+1}\sin(z-x)]'\,dx =$$
$$= \text{[redacted]}$$
$$+\int_0^z \text{[redacted]}[x^{i_{p+1}+1}\sin(z-x)]''\,dx =$$
$$= z^{i_{p+1}+1}\text{[redacted]}(z) +$$
$$+\begin{cases} 0, & i_{p+1}=0 \\ i_{p+1}(i_{p+1}+1)\int_0^z x^{i_{p+1}-1}\text{[redacted]}\mathrm{in}(z-x)dx, & i_{p+1}>0 \end{cases} -$$
$$-2(i_{p+1}+1)\int_0^z x^{i_{p+1}}\text{[redacted]}$$

Сокращая в крайних выражениях выписанной цепочки вектор [redacted] (z), с учетом соотношений (22) записываем

$$\text{[redacted]} = \frac{\text{[redacted]}}{2(i_{p+1}+1)} + \begin{cases} 0, & i_{p+1}=0; \\ \frac{i_{p+1}}{2}\text{[redacted]}, & i_{p+1}>0. \end{cases}$$

Совершая полностью аналогичные манипуляции с выражением

$$\text{[redacted]}\,dx,$$

дополнительно получим равенство

$$\text{[redacted]} = -\frac{\text{[redacted]}}{2(i_{p+1}+1)} - \frac{z^{i_{p+1}}}{2}\text{[redacted]}\begin{cases} 0, & i_{p+1}=0; \\ \frac{i_{p+1}\text{[redacted]}}{2}, & i_{p+1}>0. \end{cases}$$

В результате проведенных преобразований имеем достаточный набор рекуррентных зависимостей для расчета (p+1)-го приближения по высоте сферического слоя $p \geq 1$ обоих решений как однородного, так и неоднородного уравнения (1)

$$\begin{cases} \text{[redacted]} \\ -\frac{\text{[redacted]}}{2(i_{p+1}+1)} - \frac{\text{[redacted]}}{2}\text{[redacted]}, \\ \text{[redacted]} \\ +\frac{\text{[redacted]} - z^{i_{p+1}+1}\text{[redacted]}}{2(i_{p+1}+1)} \end{cases} \quad (24)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \text{[redacted]}, \\ \text{[redacted]} = \frac{\text{[redacted]}}{2}. \end{cases} \quad (25)$$

В процессе практического моделирования, скорее всего, уравнения (24) и (25) будут использованы только для расчета компонент второго приближения по высоте сферического случая. Поэтому перепишем их вид специально для этого частного случая

$$\begin{cases} \text{[redacted]}, \\ \text{[redacted]}\frac{\text{[redacted]}}{2(k+1)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{[redacted]}, \\ \text{[redacted]}\frac{\text{[redacted]}}{2}. \end{cases}$$

Уравнения (24) и (25) справедливы для любого $p \geq 1$, то есть особенности поведения решений однородного и неоднородного уравнения (1) проявляются исключительно в компонентах, описывающих нулевое и первое приближение по высоте сферического слоя.

Чтобы оценить лаконичность записи рекуррентных уравнений (24) с граничными условиями (25), получим решение этого уравнения. Это решение не используется в программной реализации методики, а просто раскрывает структуру самого решения. Для краткости записи временно введем обозначение для компонент решения

$$f_n = \text{[redacted]}$$

и правых частей уравнений (24)

$$\mathrm{I}_n^{(1)} = \frac{\text{[redacted]}}{2(n+1)} + \text{[redacted]};$$

$$\mathrm{I}_n^{(2)} = \frac{\text{[redacted]}}{2(n+1)}.$$

Тогда разностная система уравнений (24) – (25)

перепишется в виде

$$\begin{cases} f_n = -\frac{n}{2} g_{n-1} - \mathrm{I}_n^{(1)}; \quad g_n = \frac{n}{2} f_{n-1} + \mathrm{I}_n^{(2)}; \\ f_0 = -\mathrm{I}_0^{(1)}; \quad g_0 = \mathrm{I}_0^{(2)}. \end{cases} \tag{26}$$

Решение выписанной системы рекуррентных уравнений находится непосредственно и имеет вид

$$\begin{cases} f_n = -\frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \left[\mathrm{I}_k^{(2)} \sin\frac{(n-k)\pi}{2} + \mathrm{I}_k^{(1)} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \right]; \\ g_n = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \left[\mathrm{I}_k^{(2)} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} - \mathrm{I}_k^{(1)} \sin\frac{(n-k)\pi}{2} \right]. \end{cases} \tag{27}$$

Подставляя в данное решение ранее условно обозначенные величины, после небольших преобразований получим

$$\begin{cases} \text{[redacted]}(z) = \frac{k!}{2^{k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \times \\ \times \sin\frac{(k-j)\pi}{2} - \frac{k!}{2^{k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \times \\ \times \cos\frac{(k-j)\pi}{2} - \frac{k!}{2^{k+2}} \cos\frac{k\pi}{2}\,\text{[redacted]}; \\ \text{[redacted]}(z) = -\frac{k!}{2^{k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \times \\ \times \cos\frac{(k-j)\pi}{2} - \frac{k!}{2^{k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \times \\ \times \sin\frac{(k-j)\pi}{2} - \frac{k!}{2^{k+2}} \left[\frac{(2z)^{k+1}}{(k+1)!} + \sin\frac{k\pi}{2} \right] \text{[redacted]} \end{cases} \tag{28}$$

Выписанные соотношения справедливы для любого $p \ge 1$ и $k \ge 0$. Для компонент второго приближения по высоте сферического слоя последние уравнения перепишутся в виде

$$\begin{cases} \text{[redacted]} = \frac{k!}{2^{k+2}} \left[\sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \sin\frac{\text{[redacted]}\pi}{2} - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \cos\frac{\text{[redacted]}\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\,\text{[redacted]} \right] \\ \text{[redacted]} = -\frac{k!}{2^{k+2}} \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \cos\frac{\text{[redacted]}\pi}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{2^j\,\text{[redacted]}}{j!} \sin\frac{\text{[redacted]}\pi}{2} + \left[\frac{(2z)^{k+1}}{(n+1)!} + \sin\frac{k\pi}{2} \right] \text{[redacted]} \right. \end{cases}$$

и, так как

$$\text{[redacted]}$$

то производя соответствующие суммирования, получим уравнения для поиска (p+1)-го приближения по известному p-му приближению, $p \ge 1$

$$\begin{cases} \text{[redacted]} \sum \text{[redacted]} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k\,\text{[redacted]}}{k!} \sin\frac{\text{[redacted]}\pi}{2} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k\,\text{[redacted]}}{k!} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} - \text{[redacted]}\frac{n\pi}{2} \right]; \\ \text{[redacted]} - \sum \text{[redacted]} \left\{ \sum \frac{2^k\,\text{[redacted]}}{k!} \cos\frac{\text{[redacted]}\pi}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k\,\text{[redacted]}}{k!} \sin\frac{(n-k)\pi}{2} + \text{[redacted]}\frac{\text{[redacted]}}{(n+1)!} + \sin\frac{n\pi}{2} \right] \right\}, \end{cases} \tag{29}$$

где для любого $p \ge 1$ векторные функции [redacted] и их производные определены соотношениями

$$\text{[redacted]}(z) = \sum \text{[redacted]}(z); \qquad \text{[redacted]}(z) = \sum \text{[redacted]}(z), \tag{30}$$

причем

$$\text{[redacted]} \tag{31}$$

С использованием компонент всех приближений по высоте сферического слоя общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения (1) запишутся в виде рядов

$$\text{[redacted]} \tag{32}$$

Выбор достаточного приближения
по высоте сферического слоя

Обозначим через [redacted] приближенное представление решения при использовании n приближений по высоте сферического слоя

$$\text{[redacted]} \sum_{\sigma=0} \sum_{k=0} \text{[redacted]} \tag{33}$$

В соответствии с уравнениями (32) функции [redacted] удовлетворят дифференциальным уравнениям

$$\text{[redacted]} \tag{34}$$

в котором

$$\text{[redacted]}, \tag{35}$$

и, если положить Δ[redacted], то закон изменения неучитываемой n-м приближением части решения будет подчиняться дифференциальному уравнению

$$\Delta\,\text{[redacted]} \tag{36}$$

с нулевыми начальными условиями как по положению, так и по скорости. Поэтому при численном моделировании произведение нормы n-го приближения [redacted] и суммы $\sum_{i=1}$ [redacted] может служить сигналом в выборе учитываемого приближения по высоте сферического слоя.

С точки зрения практического моделирования всегда можно заранее приближенно оценить ожидаемое изменение нормы радиус-вектора центра масс баллистического объекта и принять решение об использовании приводимого в разделе метода моделирования его движения. Во всяком случае в своих программно-реализованных алгоритмах мы ограничивались учетом первого или второго приближения по высоте сферического слоя. Это связано с тем, что сумма $\sum_{i=1}$ [redacted] с увеличением времени z быстро растет. Поэтому учет высших приближений по высоте сферического слоя имеет смысл для ограниченных значений z, для которых время активного движения баллистического объекта не превышает, например, 80–100 секунд. Однако при таком ограничении величины z аппроксимации посредством учета только первого или второго приближения по высоте сферического слоя более чем достаточно. При превышении временем активно движения некоторой критической величины ~120–150 *сек* аппроксимация посредством учета только первого приближения оказывается более предпочтительной. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [2].

В статье не рассмотрены рекуррентные уравнения для нахождения компонент первого приближения [redacted] и [redacted] по высоте сферического слоя как для однородного, так и для неоднородного уравнения (1). Раскрытие этих вопросов, а также дополнительных особенностей обеих составляющих решений уравнения (1), будет приведено в следующем номере журнала.

Справочник используемых функций

Раскрываемый ниже минимальный набор сведений имеет непосредственное отношение к решению дифференциального уравнения (1) и будет использоваться в последующих статьях. Доказательство выписываемых ниже соотношений вне интересов настоящей статьи и для экономии места опускается.

Определим элементарные функции рядами

[redacted] (37)

при этом [redacted] окажутся чётными, а [redacted] – нечетными функциями своего аргумента

[redacted] (38)

причем

[redacted], (39)

в частности

[redacted]; [redacted]. (40)

Соотношения для понижения порядков функций (37) имеют вид

[redacted] (41)

а также

[redacted]. (42)

Одним из свойств данных функций являются интегралы

$$\begin{cases} \int_0^z x^n \sin bx dx = z^{n+1}\text{[redacted]} \\ \int_0^z x^n \cos bx dx = z^{n+1}\text{[redacted]} \\ \int_0^z x^n \sin b(z-x) dx = z^{n+1}\text{[redacted]} \\ \int_0^z x^n \cos b(z-x) dx = z^{n+1}\text{[redacted]} \end{cases} \qquad (43)$$

Справедливы взаимосвязи

[redacted] (44)

Ряды (37) суммируются, так что функции [redacted] и [redacted] представимы также в виде конечных сумм

$$\begin{cases} \text{[redacted]} \frac{n!\,p!}{x^{p+n+1}}\left\{\sum_{i=0}^{p}\frac{x^i \sin\left[x+(p-n-i)\pi/2\right]}{i!} - \right. \\ \left. -\sin\frac{(p-n)\pi}{2} + \frac{1}{p+n+1} - \frac{n!}{x^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i\cos(n-i)\pi/2}{i!(p+i+1)}\right\}; \\ \text{[redacted]} \frac{n!\,p!}{x^{p+n+1}}\left\{\cos\frac{(p-n)\pi}{2} - \right. \\ \left. -\sum_{i=0}^{p}\frac{x^i\cos\left[x+(p-n-i)\pi/2\right]}{i!}\right\} + \frac{n!}{x^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i\sin(n-i)\pi/2}{i!(p+i+1)}. \end{cases} \qquad (45)$$

В последующих параграфах при получении ряда рекуррентных зависимостей используются определенные интегралы

$$\int_0^x x^{n+1}\text{[redacted]}\, x\,dx =$$

$$= -x^{n+1}\left[\frac{n}{2}[\text{[redacted]}\right]$$

$$\int_0^x x^{n+1}\,\text{[redacted]}\,x\,dx = \tag{46}$$
$$= x^{n+1}\left[\frac{n}{2}[\,\text{[redacted]}\right]$$

$$\int_0^x x^{n+1}\,\text{[redacted]}\,x\,dx =$$
$$= x^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\,\text{[redacted]}\right] \tag{47}$$
$$\int_0^x x^{n+1}\,\text{[redacted]}\,x\,dx =$$
$$= x^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\,\text{[redacted]}\right]$$

а также обозначения для остатков гармонических рядов

$$\Delta_1^{(n)}(z) = \cos z - \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!}\cos\frac{i\pi}{2};$$
$$\Delta_2^{(n)}(z) = \sin z - \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!}\sin\frac{i\pi}{2}. \tag{48}$$

Остатки гармонических рядов связаны с функциями [redacted] и [redacted] уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n!}\,\text{[redacted]}\,\Delta_2^{(n)}(x)\cos\dfrac{n\pi}{2} - \Delta_1^{(n)}(x)\sin\dfrac{n\pi}{2}; \\ \dfrac{x^{n+1}}{n!}\,\text{[redacted]}\,\Delta_1^{(n)}(x)\cos\dfrac{n\pi}{2} - \Delta_2^{(n)}(x)\sin\dfrac{n\pi}{2}. \end{cases} \tag{49}$$

В процессе последующего изложения будут использованы выражения для производных от введенных функций, описываемые равенствами

$$\begin{cases} \text{[redacted]} \\ = \dfrac{m}{m+1}\,\text{[redacted]} \\ \text{[redacted]} \\ = \text{[redacted]} \end{cases} \tag{50}$$

Выводы

Сформулирована математическая постановка задачи построения быстродействующих алгоритмов синтеза управляемого движения космических объектов специального назначения. Показано, что выбранный подход удачен с точки зрения программной реализации, позволяющий найти решение в виде рядов, для членов которого существуют простые для машинного программирования рекуррентные соотношения. Проведены необходимые подготовительные мероприятия для последующих исследований, а также выписаны необходимые алгебраические равенства.

Литература

1 Алферьев В.Л. Использование сферически-однородного поля для моделирования управляемого движения космических объектов. Постановка задачи. Российская инженерная академия.
Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии". Сборник трудов "Методология системных исследований. Теоретические вопросы физики, баллистики". Выпуск 20. Юбилейный, Изд-во "ПСТМ", 2011.
2. Алферьев В.Л. О моделировании управляемого движения космических объектов. Российская инженерная академия.
Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии". Сборник трудов "Методология системных исследований. Теоретические вопросы физики, баллистики". Выпуск 20. Юбилейный, Изд-во "ПСТМ", 2011.

Материал поступил в редакцию 28. 10 2012 г.