

## УЛУЧШЕННАЯ ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ДЛЯ ДВОИЧНЫХ КОДОВ В НЕКОГЕРЕНТНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ СО СЛУЧАЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ПОМЕХОЙ

### IMPROVED ERROR PROBABILITY BOUNDS FOR BINARY CODES ON NONCOHERENT CHANNELS WITH THE PULSED JAMMING

**Аннотация.** Исследованы характеристики двоичных кодов в некогерентном канале со случайной импульсной помехой в виде гауссовского шума. Рассмотрены мягкие решения приемника с наличием информации о состоянии канала связи. Получена усовершенствованная верхняя аддитивная граница вероятности ошибки на бит для таких каналов.

**Annotation.** The performance of binary codes on noncoherent channel with pulse Gaussian noise interference is investigated. Soft decision receivers with side information are considered. The improved error probability bounds is obtained for such channels.

**Ключевые слова.** Помехоустойчивость, пакет ошибок, импульсная помеха, некогерентный канал связи, кодирование, перемежение.

**Key words.** Anti-jamming, package errors, pulse jamming, noncoherent channel, coding, interleaving.

Для защиты широкополосных каналов связи от случайной импульсной помехи применяются коды, наибольший эффект от которых может быть достигнут в случае декодирования по максимуму правдоподобия, использования «мягких решений» и «сторонней» информации о состоянии канала [1,2].

Оценка вероятности ошибки на бит  $P_b$  для таких каналов в случае использования турбокодов, кодов с низкой плотностью проверок на четность путем имитационного моделирования требует значительных вычислительных затрат.

Для получения аналитических оценок в работе [3] для каналов с «когерентным» приемом и случайной импульсной помехой предложена улучшенная верхняя граница. Эта граница до определенной степени устраняет недостатки верхней аддитивной границы и позволяет учесть группирование ошибок в пакеты, которое характерно для этого типа помех.

Целью статьи является разработка аналогичной границы для каналов с «некогерентным» приемом. Данный способ приема находит применение, когда начальная фаза сигналов, передаваемых по каналу, меняется во

времени случайным образом, а ее точная и своевременная оценка затруднительна. Таким примером являются каналы связи с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты.

Рассмотрим «некогерентный» канал связи, в котором для передачи информации используется двоичный блочный код  $(n, k)$  со скоростью  $r = k/n$  и минимальным расстоянием  $d_{\min}$ .

Для сверточных кодов аналогом длины кода может рассматриваться глубина декодирования как производная от длины кодового ограничения [1].

Дистанционные свойства кода охарактеризуем коэффициентами  $A_{w,d}$ , которые представляют собой количество кодовых комбинаций весом  $d$ , порожденных входными информационными последовательностями весом  $w$ .

Множество таких кодовых последовательностей весом  $d$ , сформированных из информационных последовательностей весом  $w$ , обозначим через  $N_{w,d}$ .

Для турбокодов и им подобным, использующих в схеме кодирования псевдослучайный перемежитель, значения коэффициентов  $A_{w,d}$  зависят от конкретной реализации перемежителя  $\pi$ . Учитывая сложность

---

Шевченко Вячеслав Анатольевич – кандидат технических наук, начальник управления 4 Центрального научно-исследовательского института Министерства обороны Российской Федерации, тел. +7(495)-519-98-02.

Shevchenko Vyacheslav – the candidate of the technical sciences, chief of department of 4 Central scientific research institute of Ministry of defense of Russian Federation, tel. +7(495)-519-98-02.

определения  $A_{w,d}(\pi)$  через рассмотрение всех возможных входных последовательностей, принято вычислять средний весовой коэффициент  $A_{w,d}$ .

Введем понятие «пакет ошибок», под которым будет понимать совокупность символов одной кодовой комбинации, которые могут быть поражены одиночным импульсом помехи. Обозначим длину пакета через  $b$ .

На интервале передачи одной кодовой комбинации возможно разместить  $L[n/b]$  пакетов длиной  $b$ . Кроме  $L$  пакетов длиной  $b$ , необходимо также рассматривать пакет длиной  $\Delta b$ , дополняющий эти пакеты до величины  $n$ , так что

$$n = \Delta b + bL. \quad (1)$$

Последовательность пакетов сопоставим с последовательностью «сторонней» информации о состоянии канала связи  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{L+1})$ , где  $z_i$  – случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью  $\rho$  (вероятность появления импульсной помехи) и значение 0 – с вероятностью  $1-\rho$ .

Будем считать, что в течение своего воздействия случайная импульсная помеха принимает вид АБГШ со спектральной плотностью  $N_J/\rho$ .

Передаваемую кодовую комбинацию длиной  $n$  обозначим через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Примем, что двоичный символ кода  $x_i=0$  передается сигналом  $S_0(t)$ , а символ кода  $x_i=1$  – сигналом  $S_1(t)$ . Сигналы  $S_0(t)$  и  $S_1(t)$  являются ортогональными.

В демодуляторе каждому из этих сигналов соответствует канал приема, в котором на интервале времени приема символа кода вычисляется коэффициент корреляции принимаемого колебания отдельно с синфазной и отдельно с квадратурной составляющей ортогонального сигнала с последующим возведением в квадрат и суммированием результатов этих операций.

В канале с импульсной помехой коэффициент корреляции принимаемого колебания с  $k$ -м ортогональным сигналом, где  $k = \overline{0,1}$ , на интервале времени приема  $i$ -го символа кода определим следующим образом:

для синфазной составляющей

$$y_{i,k}(x_i, z_{j+1}) = c(z_j) \gamma \delta(k, x_i) \cos \varphi + z_j n_{i,k}, \quad (2)$$

для квадратурной составляющей

$$y_{i,k\perp}(x_i, z_j) = c(z_j) \gamma \delta(k, x_i) \sin \varphi + z_j n_{i,k\perp}, \quad (3)$$

где  $j = \lceil i/b \rceil$  – наибольшее ближайшее целое для отношения  $i/b$ ;

$\varphi$  – величина сдвига начальной фазы передаваемого сигнала относительно фазы опорного сигнала на приемной стороне, которая носит случайный характер и может быть равномерно распределена в интервале от 0 до  $2\pi$ ;

$$\delta(k, x_i) = \begin{cases} 1, & k = x_i; \\ 0, & k \neq x_i; \end{cases}$$

$$c(z_j) = \begin{cases} 1, & z_j = 1; \\ c_0 \gg 1, & z_j = 0; \end{cases}$$

$n_{i,k}, n_{i,k\perp}$  – случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1;

$\gamma = \sqrt{\frac{2E_b}{N_J}} r \rho$ ,  $E_b$  – энергия сигнала, приходящаяся на бит информации.

Совокупность последовательностей

$$y_k = (y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{n,k})$$

и  $y_{k\perp} = (y_{1,k\perp}, y_{2,k\perp}, \dots, y_{n,k\perp})$ ,

где  $k = \overline{0,1}$ , характеризуют принятую последовательность  $y$ .

Верхнюю границу вероятности ошибки на бит представим в следующем виде [4]:

$$P_b \leq \sum_{i=d_{\min}}^n P_d, \quad (4)$$

где  $P_d$  – вероятность ошибки на бит при трансформации кодовой последовательности, все символы которой имеют значение 0, в одну из последовательностей  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$  весом  $d$ .

Выразим вероятность  $P_d$  следующим образом [4]:

$$P_d = \sum_{w=1}^k \frac{w}{k} P_{w,d} \left( \bigcup_{\hat{x} \in N_{w,d}} (x \rightarrow \hat{x}) \right), \quad (5)$$

где  $P_{w,d} \left( \bigcup_{\hat{x} \in N_{w,d}} (x \rightarrow \hat{x}) \right)$  – вероятность трансформации

кодовой комбинации с нулевым весом в кодовую комбинацию из множества  $N_{w,d}$ . Для вычисления этой вероятности воспользуемся следующей верхней границей [4]:

$$\begin{aligned} P_{w,d} \left( \bigcup_{\hat{x} \in N_{w,d}} (x \rightarrow \hat{x}) \right) &\leq P_{w,d} \left( \bigcup_{\hat{x} \in N_{w,d}} (x \rightarrow \hat{x}), y \in \mathfrak{R} \right) + \\ &+ P_{w,d} (y \notin \mathfrak{R}) \leq \\ &\leq A_{w,d} P_{w,d} (x \rightarrow \hat{x}, y \in \mathfrak{R}) + P_{w,d} (y \notin \mathfrak{R}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathfrak{R}$  – некоторая область.

Тогда с учетом неравенства (6) выражение (5) примет следующий вид:

$$P_d \leq A_d P_{w,d} (x \rightarrow \hat{x}, y \in \mathfrak{R}) + P_{w,d} (y \notin \mathfrak{R}), \quad (7)$$

где  $A_d = \sum_{w=1}^k \frac{w}{k} A_{w,d}$ .

Выберем «подоптимальный» алгоритм декодирования, при котором ошибочный прием происходит в случае выполнения следующего условия [2]:

$$\begin{aligned} (x \rightarrow \hat{x}) \triangleq \{ \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i) [y_{i,1}^2(x_i, z_j) + \\ + y_{i,1\perp}^2(x_i, z_j) - y_{i,0}^2(x_i, z_j) - y_{i,0\perp}^2(x_i, z_j)] \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $j = \lceil i/b \rceil$ .

Для переданной «нулевой» кодовой комбинации выражение (8) после подстановки в него выражений (2) и (3) и выполнения некоторых преобразований приведем к следующему:

$$(x \rightarrow \hat{x}) \triangleq Z \geq 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Z = & \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{i=bj+1}^{b(j+1)} \hat{x}_i \left( z_{j+1}^2 n_{i,1}^2 - (c(z_{j+1})\gamma \cos \varphi + z_{j+1} n_{i,0})^2 \right) + \\ & + \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{i=bj+1}^{b(j+1)} \hat{x}_i \left( z_{j+1}^2 n_{i,1\perp}^2 - (c(z_{j+1})\gamma \sin \varphi + z_{j+1} n_{i,0\perp})^2 \right) + \\ & + \sum_{j=Lb+1}^{Lb+\Delta b} \hat{x}_i \left( z_{L+1}^2 n_{i,1}^2 - (c(z_{L+1})\gamma \cos \varphi + z_{L+1} n_{i,0})^2 \right) + \\ & + \sum_{j=Lb+1}^{Lb+\Delta b} \hat{x}_i \left( z_{L+1}^2 n_{i,1\perp}^2 - (c(z_{L+1})\gamma \sin \varphi + z_{L+1} n_{i,0\perp})^2 \right). \end{aligned}$$

Область  $\mathfrak{R}$  выберем таким образом, чтобы не учитывать нахождение канала в состоянии, когда воздействие помехи отсутствует

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = \{y \mid & \sum_{i=1}^n (y_{i,0}(0, z_j) - (\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-z_j))c(z_j)\gamma \cos \varphi)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n (y_{i,0\perp}(0, z_j) - (\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-z_j))c(z_j)\gamma \sin \varphi)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n (y_{i,1}(0, z_j))^2 + (y_{i,1\perp}(0, z_j))^2 \leq nR^2\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $j = \lceil i/b \rceil$ .

Подставив выражения (2) и (3) в выражение (10) и выполнив ряд преобразований, получим

$$\mathfrak{R} = \{y \mid W \leq 0\}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} W = & \sum_{j=0}^{L-1} z_{j+1}^2 \sum_{i=bj+1}^{b(j+1)} \left( ((1-\varepsilon)c(z_{j+1})\gamma \cos \varphi + n_{i,0})^2 + n_{i,1}^2 \right) + \\ & + \sum_{j=0}^{L-1} z_{j+1}^2 \sum_{i=bj+1}^{b(j+1)} \left( ((1-\varepsilon)c(z_{j+1})\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp})^2 + n_{i,1\perp}^2 \right) + \\ & + z_{L+1}^2 \sum_{i=Lb+1}^{Lb+\Delta b} \left( ((1-\varepsilon)c(z_{L+1})\gamma \cos \varphi + n_{i,0})^2 + n_{i,1}^2 \right) + \\ & + z_{L+1}^2 \sum_{i=Lb+1}^{Lb+\Delta b} \left( ((1-\varepsilon)c(z_{L+1})\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp})^2 + n_{i,1\perp}^2 \right) - nR^2. \end{aligned}$$

На основании выражения (11) с учетом использования границы Чернова  $P(W > 0) \leq e^{sW}$ , где  $0 \leq s \leq 1/2$ , ограничим сверху вторую часть слагаемого выражения (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{w,d}(y \notin \mathfrak{R}) = P(W \geq 0) & \leq e^{-snR^2} \times \\ & \times (1 - \rho + \rho q^b(s, \varepsilon, \gamma))^L \times \\ & \times (1 - \rho + \rho q^{\Delta b}(s, \varepsilon, \gamma)), \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q(s, \varepsilon, \gamma) = & M \left( \exp \left( s \left( (1-\varepsilon)\gamma \cos \varphi + n_{i,0} \right)^2 \right) \right) \times \\ & \times M \left( \exp \left( sn_{i,1}^2 \right) \right) \times \\ & \times M \left( \exp \left( s \left( (1-\varepsilon)\gamma \cos \varphi + n_{i,0\perp} \right)^2 \right) \right) M \left( \exp \left( sn_{i,1\perp}^2 \right) \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Вычислим математические ожидания величин, стоящих в правой части выражения (13):

$$\begin{aligned} M \left( \exp \left( s \left( (1-\varepsilon)\gamma \cos \varphi + n_{i,0} \right)^2 \right) \right) = \\ = \frac{\exp \left( \frac{\gamma^2 2s(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \varphi}{2(1-2s)} \right)}{\sqrt{1-2s}}; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \left( \exp \left( s \left( (1-\varepsilon)\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp} \right)^2 \right) \right) = \\ = \frac{\exp \left( \frac{\gamma^2 2s(1-\varepsilon)^2 \sin^2 \varphi}{2(1-2s)} \right)}{\sqrt{1-2s}}; \quad (15) \end{aligned}$$

$$M \left( \exp \left( sn_{i,1}^2 \right) \right) = M \left( \exp \left( sn_{i,1\perp}^2 \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1-2s}}. \quad (16)$$

Выражение (13) с учетом соотношений (14)...(16) представим в следующем виде:

$$q(s, \varepsilon, \gamma) = \exp \left( \frac{\gamma^2 2s(1-\varepsilon)^2}{2(1-2s)} \right) / (1-2s)^2. \quad (17)$$

Поскольку  $q(s, \varepsilon, \gamma) \geq 1$  и соответственно  $1 - \rho + \rho q^x(s, \varepsilon, \gamma) \leq q^x(s, \varepsilon, \gamma)$ ,

где  $x$  – некоторое положительное число, неравенство (12) с учетом выражения (1) приведем к следующему:

$$P_{w,d}(y \notin \mathfrak{R}) \leq e^{-snR^2} q^n(s, \varepsilon, \gamma). \quad (18)$$

Для определения вероятности  $P_{w,d}(x \rightarrow \hat{x}, y \in \mathfrak{R})$  воспользуемся соотношениями (9) и (11) и границей Чернова для двух случайных величин, в результате чего получим

$$\begin{aligned} P_{w,d}(x \rightarrow \hat{x}, y \in \mathfrak{R}) = \\ = P(Z \geq 0, W \leq 0) \leq M \left( e^{tZ+rW} \right), \quad (19) \end{aligned}$$

где  $t \geq 0, r \leq 0$ .

Будем считать, что в  $i$ -м пакете число символов, которыми ошибочно принята кодовая комбинация  $\hat{x}$  отличается от переданной  $x$  («отличающихся» символов) равно  $m_i \in [0, b]$ , так что

$$\sum_{i=1}^{L+1} m_i = d. \quad (20)$$

Количество «отличающихся» символов определяет вес пакета.

Пакеты, в которых «отличающихся» символов нет, назовем «нулевыми», остальные – «ненулевыми».

Тогда с учетом того, что случайная величина  $Z$  формируется из слагаемых, для которых  $\hat{x}_i \neq x$ , и число этих слагаемых в  $i$ -м пакете равно  $m_i$ , получим верхнюю границу для вероятности  $P_d(x \rightarrow \hat{x}, y \in R)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{w,d}(x \rightarrow \hat{x}, y \in \mathfrak{R}) = P(Z \geq 0, W \leq 0) \leq \\ \leq \varphi(\Delta b, m_{L+1}) \prod_{j=1}^L \varphi(b, m_j), \quad (21) \end{aligned}$$

где с учетом обозначения

$$f(r, t, \varepsilon, \gamma) = M\left(\exp\left((t+r)n_{i,1}^2\right)\right)M\left(\exp\left((t+r)n_{i,1\perp}^2\right)\right) \times \\ \times M\left(\exp\left(-t(\gamma \cos \varphi + n_{i,0})^2 + r((1-\varepsilon)\gamma \cos \varphi + n_{i,0})^2\right)\right) \times \\ \times M\left(\exp\left(-t(\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp})^2 + r((1-\varepsilon)\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp})^2\right)\right), \quad (22)$$

функция  $\varphi(b, m)$  имеет следующий вид:

$$\varphi(b, m) = (1-\rho)\exp(-mt\gamma^2 c_0^2) + \rho f^m(r, t, \varepsilon, \gamma) q^{b-m}(r, \varepsilon, \gamma). \quad (23)$$

Найдем математические ожидания величин, входящих в правую часть выражения (22):

$$M\left(\exp\left((t+r)n_{i,1}^2\right)\right) = M\left(\exp\left((t+r)n_{i,1\perp}^2\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2t-2r}}; \quad (24)$$

$$M\left(-t(\gamma \cos \varphi + n_{i,0})^2 + r((1-\varepsilon)\gamma \cos \varphi + n_{i,0})^2\right) = \\ = \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} \cos^2 \varphi \left(2t-2r(1-\varepsilon)^2 - \frac{4(t-r(1-\varepsilon))^2}{1+2t-2r}\right)\right) / \\ / \sqrt{1+2t-2r} = \\ = \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} \frac{2t(1-2r\varepsilon^2) - 2r(1-\varepsilon)^2}{1+2t-2r} \cos^2 \varphi\right) / \\ / \sqrt{1+2t-2r}; \quad (25)$$

$$M\left(-t(\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp})^2 + r((1-\varepsilon)\gamma \sin \varphi + n_{i,0\perp})^2\right) = \\ = \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} \frac{2t(1-2r\varepsilon^2) - 2r(1-\varepsilon)^2}{1+2t-2r} \sin^2 \varphi\right) / \\ / \sqrt{1+2t-2r}. \quad (26)$$

С учетом соотношений (24)...(26) выражение (22) определим следующим образом:

$$f(r, t, \varepsilon, \gamma) = \frac{\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} \frac{2t(1-2r\varepsilon^2) - 2r(1-\varepsilon)^2}{1+2t-2r}\right)}{(1-2t-2r)(1+2t-2r)}. \quad (27)$$

Поскольку  $c_0 \gg 1$ , то при  $m > 0$  первым слагаемым в выражении (23) можно пренебречь. В свою очередь, при  $m=0$  –  $\varphi(b, m) = 1 - \rho + \rho q^b(r, \varepsilon, \gamma) \leq q^b(r, \varepsilon, \gamma)$ . На основании этого выражение (23) приведем к следующему виду:

$$\varphi(b, m) \approx \begin{cases} q^b(r, \varepsilon, \gamma), & m = 0; \\ \rho f^m(r, t, \varepsilon, \gamma) q^{b-m}(r, \varepsilon, \gamma), & m > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя выражение (28) в неравенство (21) и учтя соотношения (1) и (20), получим следующую верхнюю границу:

$$P_{w,d}(x \rightarrow \hat{x}, y \in \mathfrak{R}) \leq \rho^l f^d(r, t, \varepsilon, \gamma) q^{n-d}(r, \varepsilon, \gamma), \quad (29)$$

где  $l$  – количество «ненулевых» пакетов, которое распределено по случайному закону.

Подставляя выражения (18) и (29) в выражение (7) и усредняя последнее по величине  $l$ , ограничим сверху вероятность  $P_d$  следующим образом:

$$P_d \leq e^{-nrR^2} M(\rho^l) A_d f^d(r, \varepsilon, \gamma) \times \\ \times q^{n-d}(r, \varepsilon, \gamma) + e^{-nsR^2} q^n(s, \varepsilon, \gamma). \quad (30)$$

Для расчета величины  $M(\rho^l)$  воспользуемся результатом, полученным в работе [3], в соответствии с которым при  $b \leq d_{\min}$

$$M(\rho^l) = \sum_{i=\lceil d/b \rceil}^F C_F^i \rho^i (1-\rho)^{F-i} \left( \prod_{j=1}^d \frac{ib-d+j}{Fb-d+j} \right), \quad (31)$$

где  $F = \min(d, L)$  – максимальное возможное количество «ненулевых» пакетов.

Вначале оптимизируем величину  $R$ , в результате чего получим

$$P_d \leq e^{H\left(\frac{s}{s-r}\right)} (M(\rho^l) A_d f^d(r, t, \varepsilon, \gamma) \times \\ \times q^{n-d}(r, \varepsilon, \gamma))^{\frac{s}{s-r}} q^{\frac{nr}{s-r}}(s, \varepsilon, \gamma), \quad (32)$$

где  $H(a) = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a)$ .

Подстановкой выражений (17) и (27) в выражение (32) и выполнением некоторых математических преобразований приведем последнее к следующему виду:

$$P_d \leq \exp\left(H\left(\frac{s}{s-r}\right)\right) (M(\rho^l) A_d)^{\frac{s}{s-r}} \times \\ \times \exp\left(2n\left(\frac{r}{s-r} \ln(1-2s) - \frac{s}{s-r} \ln(1-2r)\right)\right) \times \\ \times \exp\left(-d \frac{s}{s-r} (\ln(1+2t-2r) + \ln(1-2t-2r) - 2 \ln(1-2r))\right) \times \\ \times \exp\left(n(1-\varepsilon)^2 \frac{\gamma^2}{2} \left(-\frac{r}{s-r} \frac{2s}{(1-2s)} + \frac{s}{s-r} \frac{2r}{(1-2r)}\right)\right) \times \\ \times \exp\left(-d \frac{\gamma^2}{2} \frac{s}{s-r} \frac{2t(1-2\varepsilon r)^2}{(1-2r)(1+2t-2r)}\right). \quad (33)$$

Проведя замены переменных  $s, r$  и  $\varepsilon$  на переменные  $\sigma = \frac{s}{s-r}$ ;  $\beta = \sigma(1-2r)$  и  $\zeta = \sigma(1-2r\varepsilon)$  [4], переменной  $t$  на переменную  $\alpha = 2t/(1-2r)$ , а также учитывая, что при  $n \gg 1$  множителем  $\exp\left(H\left(\frac{s}{s-r}\right)\right)$  можно пренебречь [3], получим

$$P_d \leq \left(\frac{M(\rho^l) A_d}{(1-\alpha^2)^d}\right)^\sigma \exp\left(2n\left(\sigma \ln \frac{\sigma}{\beta} + (1-\sigma) \ln \frac{(1-\sigma)}{(1-\beta)}\right)\right) \times \\ \times \exp\left(-n \frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\beta} (1-\eta) - \frac{(1-\zeta)^2}{(1-\beta)}\right)\right), \quad (34)$$

$$\text{где } \eta = \frac{\alpha}{(1+\alpha)} \frac{d}{n}. \quad (35)$$

Дальнейшую оптимизацию выражения (34) проведем, воспользовавшись подходом и результатами работы [4]. Оптимальное значение величины  $\zeta$ , которое делает минимальной правую часть выражения (34),

определяется выражением

$$\zeta = \frac{\beta}{(\beta + (1-\beta)(1-\eta))}, \quad (36)$$

а оптимальное значение величины  $\sigma$  выражением

$$\sigma = \left( 1 + \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) \left( \frac{A_d M(\rho')}{(1-\alpha^2)^d} \right)^{2n} \right)^{-1}. \quad (37)$$

Последовательная подстановка выражений (36) и (37) в правую часть выражения (34) с учетом того, что  $\frac{\gamma^2}{2} = \frac{E_b}{N_j} r \rho$ , позволяет получить

$$P_d \leq \left( 1 - \beta + \beta \left( \frac{(1-\alpha^2)^d}{A_d M(\rho')} \right)^{\frac{1}{2n}} \right)^{-2n} \times \exp \left( -n \frac{\eta \beta}{1-\eta(1-\beta)} \frac{E_b}{N_j} r \rho \right). \quad (38)$$

Параметр  $\alpha$ , а также параметр  $\beta$  в случае, если выполняется условие  $M(\rho') A_d / (1-\alpha^2)^d < 1$ , требуют дальнейшей оптимизации численными методами.

Для значений  $M(\rho') A_d / (1-\alpha^2)^d \geq 1$ , значение  $\beta$ , которое минимизирует правую часть неравенства (38), определяется из следующего соотношения:

$$\beta = \frac{(1-\eta)}{\eta} \times \left( \sqrt{\frac{\eta}{(1-\eta)} \left( \frac{2 \frac{E_b}{N_j} r \rho}{1 - \left( \frac{(1-\alpha^2)^d}{A_d M(\rho')} \right)^{\frac{1}{2n}}} + \left( 1 + \frac{E_b}{N_j} r \rho \right)^2 - 1 - \left( 1 + \frac{E_b}{N_j} r \rho \right)} \right) \right)$$

При подстановке выражения (38) в выражение (4) верхняя граница вероятности ошибки на бит примет следующий вид:

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^n \min_{\alpha, \beta} \left( 1 - \beta + \beta \left( \frac{(1-\alpha^2)^d}{A_d M(\rho')} \right)^{\frac{1}{2n}} \right)^{-2n} \times \exp \left( -n \frac{\eta \beta}{1-\eta(1-\beta)} \frac{E_b}{N_j} r \rho \right). \quad (39)$$

Наихудшей будет импульсная помеха с таким значением вероятности появления ее отдельного импульса  $\rho$ , которое максимизирует правую часть выражения (39).

При выборе  $\beta=1$  и  $b=1$  граница переходит в известную верхнюю аддитивную [2,5,6]

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^n A_d \left( \rho \exp \left( -\frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{E_b}{N_j} r \rho \right) / (1-\alpha^2) \right)^d, \quad (40)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\left( \frac{E_b}{N_j} r \rho \right)^2 + 12 \frac{E_b}{N_j} r \rho + 4} - \frac{E_b}{N_j} r \rho - 2}{4}.$$

Воспользуемся полученными выражениями (29) и (39) для оценки воздействия на канал связи случайной импульсной помехи, вызывающей группирование ошибок.

Для примера рассмотрим турбокод с полиномами в восьмеричном представлении (37, 21), числом информационных символов  $k=512$ , минимальным кодовым расстоянием  $d_{\min}=8$  и скоростью кода  $r=1/3$ . Характеристики кода оценим в диапазоне значений вероятности ошибки на бит  $P_b$  в пределах от  $10^{-1}$  до  $10^{-7}$ .

На рис. 1 представлены зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_j$  при максимальной

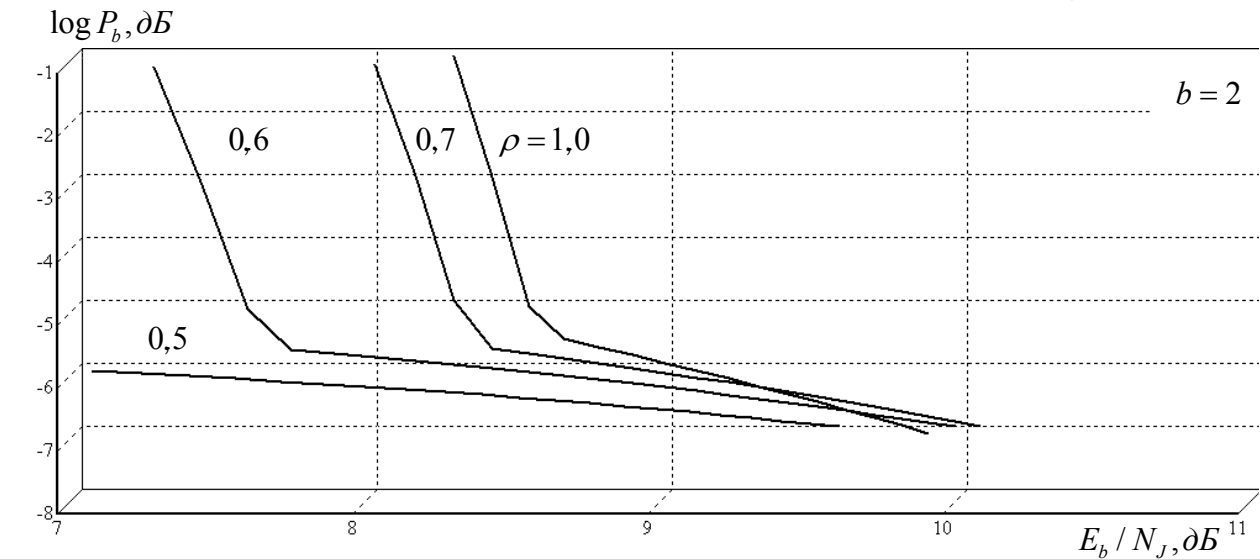


Рис. 1. Зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_j$  для турбокода (37, 21) при различных значениях вероятности появления импульсной помехи и  $b=2$

длине пакетов ошибок  $b=2$  для различных значений вероятности  $\rho$ .

Анализ зависимостей, представленных на рис. 1, показывает, что для значений  $d_{\min}/b=4$  импульсная помеха в диапазоне значений вероятности ошибки на бит  $P_b$  в пределах до  $10^{-6}$  уступает по эффективности непрерывно излучаемой.

Рассмотрим теперь характеристики того же кода, что и выше, но для условий воздействия импульсной помехи, вызывающей группирование ошибок в пакеты длиной  $b=d_{\min}$ . Для этого случая зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_j$  для различных значений вероятности появления отдельного импульса помехи  $\rho$  представлены на рис. 2.

Из анализа рис.2, следует, что наилучшей в рассматриваемом диапазоне значений вероятности ошиб-

ки на бит  $P_b$  является импульсная помеха с  $\rho > 0,3$ . По сравнению с непрерывно излучаемой компенсация «наихудшей» импульсной помехи потребует увеличения значения отношения  $E_b/N_j$  примерно на 2,2 дБ.

На рис. 3 представлены зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_j$  построенные на основе использования верхней аддитивной границы и границы, полученной выше, для условий воздействия импульсной помехи, вызывающей группирование ошибок в пакеты с максимальной длиной, равной 8.

Из анализа зависимостей, представленных на рис. 3, следует, что полученная граница по сравнению с верхней аддитивной позволяет точнее оценить вероятность ошибки на бит  $P_b$  в пределах ее значений от  $10^{-1}$  до  $10^{-6}$ . При этом с уменьшением вероятности появления импульсной помехи  $\rho$  различие между этими границами

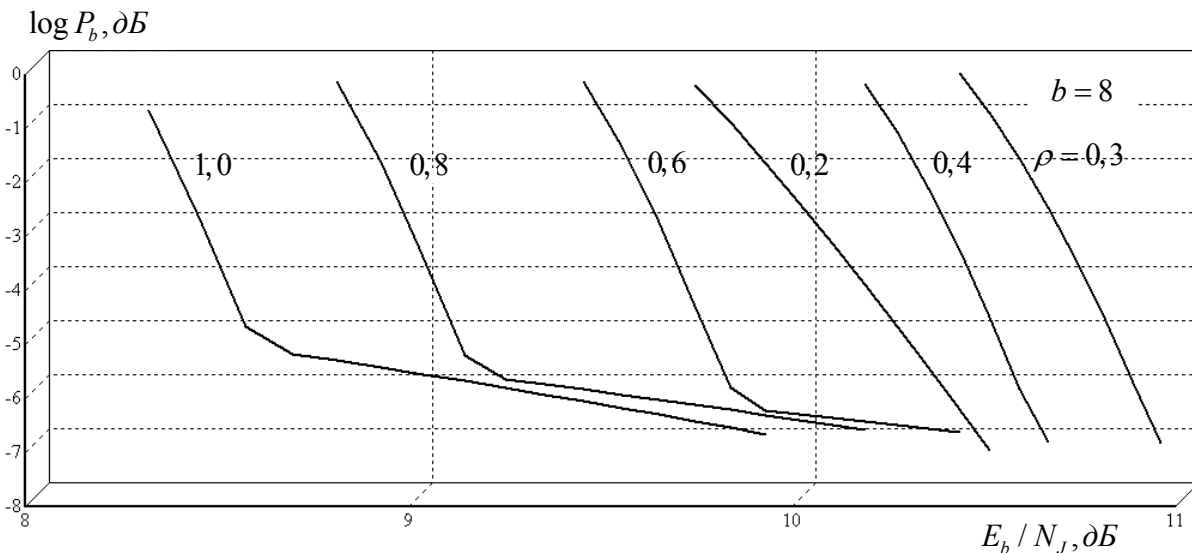


Рис. 2. Зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от отношения  $E_b/N_j$  для турбокода (37, 21) при различных значениях вероятности появления импульсной помехи и  $b=8$

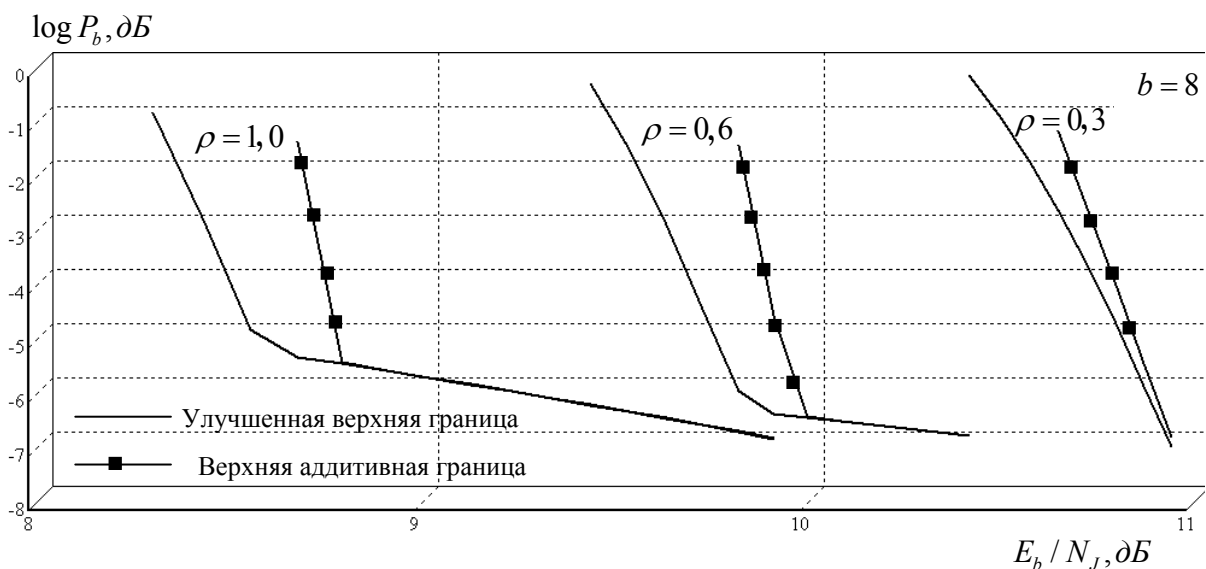


Рис. 3. Улучшенная и верхняя аддитивные границы вероятности ошибки на бит для турбокода (37, 21)

становится все меньше.

Таким образом, получены соотношения, которые позволяют более точно по сравнению с верхней аддитивной границей определить достижимую помехоустойчивость «некогерентного» канала связи с двоичными кода-

ми в условиях воздействия случайной импульсной помехи, в том числе вызывающей группирование ошибок для случая приема с «мягкими» решениями и наличия информации о состоянии канала.

#### Литература

1. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
2. Simon MK, Omura JK, Scholtz RA, Levitt BK. *Spread Spectrum Communications*, Rockville, MD: Computer Science, Maryland, 1985.
3. Шевченко ВА. Улучшенная верхняя граница вероятности ошибки для двоичных кодов в каналах связи со случайной импульсной помехой, вызывающей группирование ошибок. // Двойные технологии, 2010. № 1, С. 69–74.
4. Divsalar D. *A simple tight bound on error probability of block codes with application to turbo codes*.//JPL TMO progress report 42–139, Nov. 1999.
5. Kang J. H., Stark WE., *Turbo codes for noncoherent FH-SS with partial-band interference*.//IEEE Transactions on Communication, vol. 46, pp. 1451–1458, Nov. 1998.
6. Zhang Q., Le-Ngoc. T. *Turbo Product Codes for FH-SS with partial-band interference*.//IEEE Transactions on wireless communications, vol.1, no 3, pp. 513-520, July 2002.

Материал поступил в редакцию 06. 04. 2010 г.