УДК 528.21/22

© Плешаков Д.И.
Pleshakov D.

ПРИНЦИПЫ СОЗДАНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ АНОМАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

PRINCIPLES OF THE CREATING THE EARTH'S ANOMALOUS GRAVITY FILD LOCAL MODELS

Аннотация. *Разработаны теоретические принципы однозначного определения внешнего возмущающего геопотенциала по гравиметрической информации, заданной на ограниченном участке морской поверхности. Предложен функционал, минимизация которого позволяет получить локальную модель в виде системы точечных масс, точно представляющую аномальное гравитационное поле Земли.*

Annotation. *It is designed theoretical principles of the unambiguous determination external disturbing geopotential on gravimetric information, given on limited area to sea surface. It is received expression, which minimization allows to get the local model in the manner of systems of the point masses, exactly presenting anomalous gravity field of the Earth.*

Ключевые слова. *Потенциал, аномалия, геоид, модель, гравиметрическая информация.*

Key words. *Potential, anomaly, geoid, model, gravimetric information.*

Эффективность применения корабельных ракетных комплексов стратегического назначения в инерциальном режиме существенно зависит от точности навигационных и баллистических данных, в том числе расчетных значений аномальных гравитационных ускорений (АГУ) на активных и пассивных участках траекторий полета ракет.

На практике для вычисления АГУ используют метод моделирования аномального гравитационного поля Земли (АГПЗ) потенциалом притяжения системы точечных масс [1].

$$T(P) = fM\sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon_i}{r_i(P)}, \qquad (1)$$

где T – возмущающий потенциал, представляющий аномальное гравитационное поле Земли (АГПЗ);

P – точка во внешнем пространстве;

ε_i – величина точечной массы (ТМ), выраженная в единицах массы Земли;

$r_i(P)$ – расстояние между i-й ТМ и P;

fM – геоцентрическая гравитационная постоянная.

Структурно такая модель состоит из планетарной подсистемы, представляющей АГПЗ в целом, региональной и локальных подсистем, обеспечивающих детализацию представления АГПЗ в области действия модели. Под областью действия понимается такая область, любая точка которой может быть точкой старта. По сложившейся терминологии модели такого типа принято называть локальными (ЛМ).

Требования к точности ЛМ АГПЗ задаются в виде предельных отклонений конечных точек траекторий из-за погрешности представления АГУ локальной моделью, поэтому задача создания ЛМ АГПЗ в строгой постановке может быть решена минимизацией следующего функционала:

$$f\left(\varepsilon,\rho,\varphi,\lambda,N,\Omega,B\right) = \min_{\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0}\left|\Delta r\right| =$$
$$= \min_{\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0}\left|Q(\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0,N,\Omega,B)\right| \approx$$
$$\approx \min_{\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0}\left\|Q(\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0,N,\Omega,B)\right\|_{L_2}, \qquad (2)$$

где ε, ρ, φ, λ – искомые (уточненные) параметры ЛМ АГПЗ. Для каждой ТМ: масса; радиус-вектор; сферическая широта и долгота;

ε^0, ρ^0, φ^0, λ^0 – предварительные (уточняемые) параметры ЛМ АГПЗ;

Плешаков Дмитрий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, заместитель начальника отдела 29 НИИ Минобороны России, тел. (495)269-53-43.

Pleshakov Dmitriy– the candidate of technical sciences, the senior research scientist, deputy of the chief of division of 29 SRI Defense Ministry Russia, tel. (495)269-53-43.

Ω – область действия ЛМ АГПЗ;

B – характеристики всех допустимых траекторий с точками старта в Ω;

N – количество ТМ в модели;

Δr – отклонения конечных точек траекторий в плане;

$\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в пространстве L_2 [2].

При наличии точных АГУ (например, эталонной модели АГПЗ) функционал Q может быть минимизирован в квадратичной метрике, однако практическая реализация такого подхода трудоемка, поэтому создание ЛМ выполняют упрощенным способом. В этом случае ЛМ АГПЗ рассматривается как решение краевой задачи теории потенциала, состоящей в определении внешнего возмущающего потенциала Земли. Существуют решения Стокса и Молоденского для классических геодезических краевых задач, для которых в линеаризованном случае доказаны их существование и единственность [2, 3]. Принципиальным моментом в задачах такого типа является задание исходных данных по всей земной поверхности. Основное отличие задачи создания ЛМ АГПЗ от классических состоит в том, что внешний потенциал определяется по информации, заданной детально лишь в ограниченной области. Включение в состав ЛМ АГПЗ планетарной подсистемы не устраняет эту особенность, поскольку такая подсистема представляет только глобальные характеристики АГПЗ. Существующие методики вывода параметров региональных и локальных подсистем, как правило, основаны на использовании исходных данных в виде аномалий силы тяжести (АСТ), заданных в ограниченной области. Однако для корректного восстановления геопотенциала во всем внешнем пространстве необходимо покрытие АСТ всей земной поверхности, точный учет которых ограниченным составом параметров невозможен. Определение параметров ЛМ АГПЗ по АСТ в ограниченной области приводит к тому, что в результате получаются по существу согласующие модели, которые могут точно аппроксимировать исходные аномалии, но не представлять однозначно геопотенциал во всем внешнем пространстве. В связи с этим, помимо задания гармоники первой степени [4], параметры ЛМ необходимо определять с учетом дополнительных условий, обеспечивающих исключение запретных гармоник, включаемых в нормальный потенциал. Это приводит к увеличению погрешностей ЛМ АГПЗ, в том числе систематических.

Статья посвящена уточнению теоретических основ создания ЛМ АГПЗ для морских акваторий под условием однозначного представления внешнего возмущающего потенциала Земли. Целесообразность решения этой задачи обусловлена повышением требований к ЛМ АГПЗ по точности, надежности и другим эксплуатационным характеристикам. На основе такой теории создаются предпосылки разработки методики создания ЛМ АГПЗ, обладающей свойствами оптимальности.

Гравитационный потенциал притяжения, характеризующий АГПЗ, является гармонической функцией, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Теоретической основой единственности решения уравнения Лапласа по данным, заданным в ограниченной области, является теорема Ковалевской (частный случай теоремы Коши) [5]: Если существует решение V уравнения Лапласа, непрерывное вместе со своими первыми производными (по нормали к поверхности) вплоть до гладкой граничной поверхности S, на которой искомая функция и ее производная принимают предписанные значения, то такое решение единственно. Гладкость поверхности S понимается в смысле ее аналитичности.

При создании ЛМ АГПЗ поверхностью задания краевых или граничных условий служит непрерывный ограниченный участок морской поверхности, соответствующий области действия модели. Необходимо определить условия, выполнение которых позволит получить ЛМ АГПЗ, однозначно представляющую возмущающий потенциал Земли во внешнем пространстве. Данные условия сформулируем в виде следствия к теореме Ковалевской. Будем предполагать, что наша задача стационарна во времени. Дополнительно вводим поправку на влияние атмосферы, то есть внешнее пространство над поверхностью моря рассматриваем как пустоту и принимаем выполнение условия равенства нормального потенциала на общеземном эллипсоиде (ОЗЭ) с потенциалом силы тяжести на геоиде.

Следствие. Если:

1 – морская поверхность в области действия ЛМ АГПЗ совпадает с геоидом;

2 – на морской поверхности в области действия ЛМ АГПЗ безошибочно и непрерывно заданы исходные высоты квазигеоида (ВКГ) и АСТ в редукции свободного воздуха;

3 – вычисленные ВКГ и АСТ по параметрам ЛМ АГПЗ совпадают с заданными значениями соответственно;

4 – точечные массы, содержащиеся в ЛМ АГПЗ, расположены в произвольной сфере внутри Земли,

то такая ЛМ АГПЗ точно представляет возмущающий потенциал Земли во внешнем пространстве и на морской поверхности в области своего действия.

Отметим, что из первого условия следует совпадение ВКГ и высот геоида в области действия ЛМ АГПЗ, поэтому не будем их различать. Четвертое условие необходимо для обеспечения непрерывности возмущающего потенциала и его производных, вычисленных по параметрам ЛМ АГПЗ, во внешнем пространстве и на морской поверхности в области действия ЛМ АГПЗ, поскольку их гладкость гарантирована видом базисных функций обратных расстояний во всем пространстве за исключением точек сингулярности, совпадающих с геометрическим расположением ТМ. Если не рассматривать сходимость ЛМ АГПЗ на морской поверхности, достаточно потребовать расположение ТМ внутри Земли.

Доказательство основывается на том, что исходные ВКГ и АСТ могут быть безошибочно преобразованы в потенциал притяжения Земли, являющийся гармонической функцией во внешнем пространстве, и его первые производные по нормали к граничной поверхности (в нашем случае к геоиду). Уравнения связи основываются на преобразовании потенциала силы тяжести, включающего потенциалы притяжения Земли и центробежный. Вклад центробежного потенциала, являющегося негармонической функцией, может быть точно вычислен при известных координатах и скорости вращения Земли.

Для любой точки M на морской поверхности в области действия ЛМ (см. рисунок) потенциал притяжения V_M может быть вычислен двумя способами. Первый вытекает из условия задания ОЗЭ.

$$V_M = W_M - \frac{1}{2}\omega^2(X_M^2 + Y_M^2) =$$
$$= U_Q - \frac{1}{2}\omega^2(X_M^2 + Y_M^2). \qquad (3)$$

Во втором способе дополнительно используется теорема Брунса [4]

$$V_M = W_M - \frac{1}{2}\omega^2(X_M^2 + Y_M^2) =$$
$$= U_M + T_M - \frac{1}{2}\omega^2(X_M^2 + Y_M^2) =$$
$$= U_M + \gamma_Q \zeta_M - \frac{1}{2}\omega^2(X_M^2 + Y_M^2),$$

где W_M – потенциал силы тяжести на геоиде;

U_Q – нормальный потенциал на ОЗЭ;

U_M – нормальный потенциал в точке М;

T_M – возмущающий потенциал в точке М;

ζ_M – ВКГ в точке М;

γ_Q – ускорение нормальной силы тяжести в точке Q;

ω – угловая скорость вращения Земли;

(X_M, Y_M, Z_M) – геоцентрические координаты точки М, соответствующие геодезическим координатам (B_M, L_M, ζ_M);

$(B_M, L_M, 0)$ – геодезические координаты точки Q.

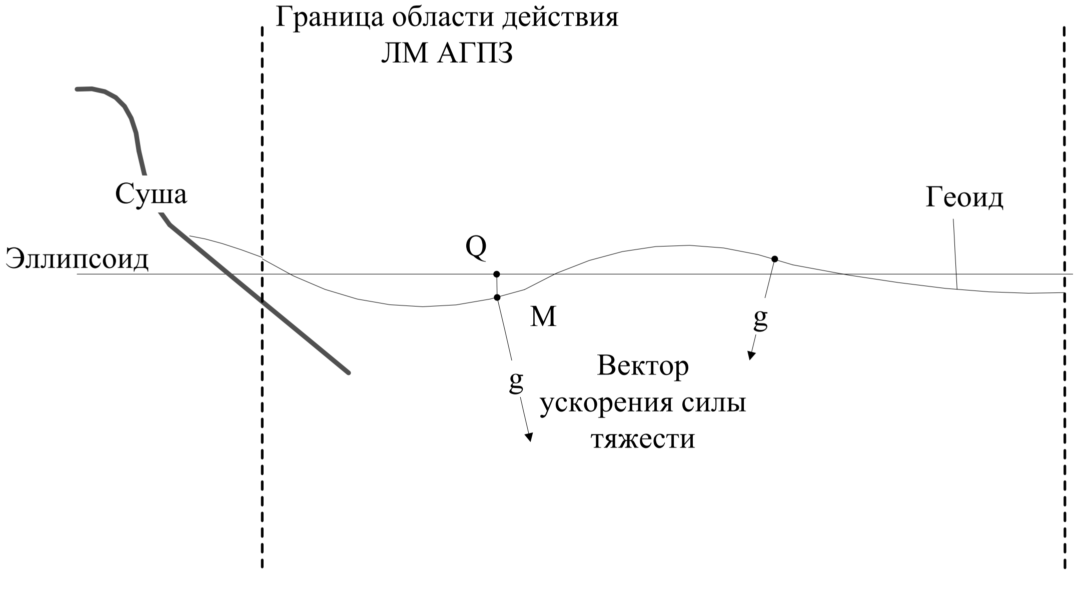
Производные от потенциала притяжения по нормали к геоиду определим в виде модуля и единичного вектора нормали. Модуль производных можно записать в следующем виде:

$$\left|\frac{\partial V_M}{\partial \vec{n}}\right| = \left|\frac{\partial W_M}{\partial \vec{n}} - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial(X_M^2 + Y_M^2)}{\partial \vec{n}}\right| =$$
$$= \left|\vec{g}_M - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial(X_M^2 + Y_M^2)}{\partial \vec{n}}\right|, \qquad (4)$$

где $\vec{g}_M$ – вектор ускорения силы тяжести в точке М;

$\vec{n}$ – вектор нормали к геоиду в точке М.

Поскольку векторы первого и второго членов направлены в противоположные стороны, модуль разности



Расчетная схема

можно заменить разностями модулей.

$$\left|\frac{\partial V_M}{\partial \vec{n}}\right| = \left|\vec{g}_M\right| - \left|\frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial(X_M^2 + Y_M^2)}{\partial \vec{n}}\right| =$$

$$= \gamma_Q + \Delta g_M - \frac{1}{2}\omega^2 \left|\frac{\partial(X_M^2 + Y_M^2)}{\partial \vec{n}}\right|, \qquad (5)$$

где Δg_M – смешанная АСТ в редукции свободного воздуха в точке М.

Для выполнения дифференцирования необходимо определить вектор нормали к геоиду. Наиболее удобно данный вектор представить отвесной линией, направленной в астрономический зенит. Астрономические координаты вычисляются по геодезическим координатам и поправкам на уклонение отвесной линии (УОЛ). Поправки определяются с использованием заданного геоида. Направляющие косинусы вектора нормали к геоиду вычисляются по известным формулам

$$\cos(\vec{n}, \vec{X}) = \cos\varphi\cos\lambda;$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{Y}) = \cos\varphi\sin\lambda;$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{Z}) = \sin\varphi;$$

$$\varphi = B + \xi;\ \ \lambda = L + \frac{\eta}{\cos B};$$

$$\xi = -\frac{1}{M}\frac{\partial\zeta}{\partial B},\ \ \eta = -\frac{1}{N\cos B}\frac{\partial\zeta}{\partial L}, \qquad (6)$$

где ξ, η – составляющие УОЛ в меридиане и первом вертикале;

φ, λ – астрономические координаты;

M, N – радиусы кривизны ОЗЭ в меридиане и первом вертикале.

Выполняя дифференцирование в (5) с учетом (6), получаем модуль производной от потенциала притяжения по нормали к геоиду

$$\left|\frac{\partial V_M}{\partial \vec{n}}\right| = \gamma_Q + \Delta g_M -$$

$$-\omega^2\left(X_M^2\cos^2\varphi_M\cos^2\lambda_M + Y_M^2\cos^2\varphi_M\sin^2\lambda_M\right)^{1/2}. \qquad (7)$$

Таким образом, исходные ВКГ и АСТ точно преобразованы в потенциал притяжения и его первые производные по нормали к геоиду. Были дополнительно использованы фундаментальные константы и параметры ОЗЭ. С учетом гладкости поверхности геоида [4] выполняются условия теоремы Ковалевской, следовательно, внешний потенциал притяжения может быть однозначно определен. Возмущающий потенциал может быть получен удалением из потенциала притяжения известного нормального гравитационного потенциала ОЗЭ.

Существование и единственность решения на граничной поверхности (область действия ЛМ АГПЗ) гарантирует теорема Келдыша–Лавреньтьева [6], которая утверждает, что потенциал Земли можно аппроксимировать (в равномерной метрике) гармоническими функциями, регулярными (непрерывны первые производные) вне произвольной сферы внутри Земли с любой наперед заданной точностью всюду вне и на поверхности Земли. Следствие доказано.

Рассматривая АСТ и ВКГ как функции пространства L_2 в области действия и основываясь на следствии, можно записать функционал, минимизация которого позволит определить параметры ЛМ АГПЗ, следующим образом

$$F(\varepsilon,\rho,\varphi,\lambda,\rho',N,\Omega) =$$

$$= \min[\left\|\Delta g - \Delta g^M\right\|_{L_2} + \left\|\zeta - \zeta^M\right\|_{L_2}] =$$

$$= \min_{\substack{\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0 \\ \rho^0 \le \rho'}}[\iint_\Omega \left(\Delta g - \Delta g^M(\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0,N)\right)^2 d\omega +$$

$$+\iint_\Omega \left(\zeta - \zeta^M(\varepsilon^0,\rho^0,\varphi^0,\lambda^0,N)\right)^2 d\omega], \qquad (8)$$

где Δg – исходные смешанные АСТ;

ζ – исходные ВКГ;

Δg^M – АСТ, вычисленные по ЛМ АГПЗ;

ζ^M – ВКГ, вычисленные по ЛМ АГПЗ;

ρ' – максимальный радиус шара, лежащего целиком внутри Земли;

$d\omega$ – элементарный участок области действия ЛМ АГПЗ.

На возможность точного представления внешнего потенциала Земли системой ТМ указано в работах [5, 7], поэтому при выполнении всех условий следствия и $N\to\infty$ значение функционала приближается к нулю, а уточненная ЛМ АГПЗ в пределе будет точно представлять внешний возмущающий потенциал Земли. Из единственности полученного решения следует, что при использовании функционала (8) отпадает необходимость в привлечении дополнительных условий за выбор нормального потенциала, поскольку в данном случае эти условия выполня-ются автоматически. Отметим, что функционал целесообразно применять для определения параметров региональных и локальных подсистем, поскольку планетарная подсистема представляет геопотенциал в целом и создается как глобальная модель АГПЗ.

Следует отметить, что задача определения внешнего геопотенциала по исходным данным в ограниченной области является некорректной [5]. Это снижает ее практическую ценность, поскольку неизбежные погрешности и дискретность исходных данных могут привести к значительным ошибкам решения. Вместе с тем некорректность задачи связана с большими и частыми изменениями по пространству ожидаемого решения, что, исходя из физических соображений, на практике не выполняется. Учитывая, что ЛМ АГПЗ представляют особенности геопотенциала в области действия с ограниченной детальностью, у нас имеются все основания выполнить определенное сглаживание или регуляризацию решения. Степень регуляризации и согласования определяемых параметров модели с исходными данными будет характеризовать оптимальность методики.

Таким образом, в статье показано, что для корректного создания ЛМ АГПЗ для морских акваторий достаточно иметь исходные данные в виде ВКГ и АСТ в области действия модели. Практический результат будет зависеть от качества исходных данных и методики минимизации предложенного функционала (8).

Литература
1. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.02). – М.: ВТУ ГШ, 2006. – 56 с.
2. Мориц Г. Современная физическая геодезия. – М.: Недра, 1983. – 393 с.
3. Heiskanen W.A., Moritz H. Physical geodesy. – San Francisco, 1967.
4. Шимберев Б.П. Теория фигуры Земли. – М.: Недра, 1975. – 432 с.
5. Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 270 с.
6. Bjerhammar A. Discrete approaches to the solution of boundary value problem in physical geodesy // Boll. Sci. Affini. – 1975. – 34., P. 185-240.
7. Бровар В.В. Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии. – М.: Недра, 1983. – 112 с.

Материал поступил в редакцию 12. 04. 2010 г.