

© Захаров А.В., Кузнецов В.И.
Zakharov A., Kuznetsov V.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ АППАРАТУРЫ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ

ESTIMATING UNCERTAINTY OF MEASUREMENT SATELLITE NAVIGATION

Аннотация. Представлено обоснование способа определения погрешностей измерений АСН, основанного на использовании свойства состоятельности оценок параметров движения объекта, получаемых по измерениям АСН. Применение предложенного подхода становится возможным благодаря заложенной в организации СРНС структурной избыточности. Отличительной особенностью предложенного решения является его независимость от наличия или отсутствия эталонного измерителя.

Annotation. The substantiation of a way of definition of errors measurements equipments of satellite navigation (ESN), the property of a solvency of estimations of parameters of movement of the object based on use, received on is submitted to measurements ESN. Application of the offered approach to become possible due to the structural redundancy incorporated in organization satellite navigating systems (SNS). Distinctive feature of the offered decision is its independence of presence or absence of a reference measuring instrument.

Ключевые слова. Погрешность, состоятельность, избыточность, рабочее созвездие, оценка.

Key words. Error, solvency, redundancy, working constellation, estimation.

Оценка погрешностей траекторных измерений, полученных с использованием аппаратуры спутниковой навигации (АСН) по сигналам спутниковых навигационных систем (СРНС), является нетривиальной задачей, для решения которой в традиционной постановке требуется привлечение эталонного измерителя. Однако в настоящее время такого эталонного измерителя не существует, в связи с чем традиционный подход к оценке погрешностей не может быть реализован.

В то же время углубленный анализ принципов определения параметров движения наблюдаемого объекта по измерениям АСН позволяет обратить внимание на одно из важнейших свойств получаемых оценок параметров – состоятельность, которое может быть положено в основу предлагаемого в настоящей статье подхода.

Состоятельная оценка, как известно [1], есть сокращённый вариант термина «состоятельная последовательность оценок», применяемый к последовательности статистических оценок, сходящейся к оцениваемой величине. Согласно известному определению [2, 3] оценка $\hat{x}(k)$ называется состоятельной, если она схо-

дится по вероятности к значению оцениваемого параметра $x(k)$ при безграничном возрастании объёма выборки, т.е. статистика $\hat{x}(k)$ называется состоятельной только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{x}_n - x| > \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1)$$

Это, в частности, позволяет рассматривать ситуации, когда для определения параметров движения наблюдаемого объекта используются измерения АСН, полученные по сигналам навигационных космических аппаратов (НКА), составляющих различные рабочие созвездия. Более того, согласно выражению (1) увеличение количества НКА, составляющих рабочее созвездие, способствует уменьшению погрешностей получаемых параметров движения.

Здесь возникает, по крайней мере, два вопроса:

- каков характер сходимости рассматриваемой последовательности с позиции его формального представления?
- каким образом организовать сходящуюся последовательность оценок?

В отношении первого вопроса можно записать

Захаров Александр Владимирович – старший научный сотрудник ОАО «ВИКОР», тел. (495)543-36-76;

Кузнецов Валерий Иванович – доктор технических наук, старший научный сотрудник, начальник отдела информационных технологий ОАО «ВИКОР».

Zakharov Alexander - senior scientific researcher in «VICOR» Plc, tel. (495)543-36-76;

Kuznetsov Valeri – doctor of engineering sciences, senior scientific researcher, chief of IT department in «VICOR» Plc.

следующие соотношения для оценки среднего

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \\ \hat{x}_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \\ &= \frac{n}{n+1} \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1}; \end{aligned}$$

с учётом которых выражение для оценки отклонения текущего среднего при увеличении выборки принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_{n+1/n} &= \Delta \hat{x}_n - \Delta \hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n - \frac{n}{n+1} \hat{x}_n - \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} (\hat{x}_n - x_{n+1}), \end{aligned}$$

откуда следует, что скорость сходимости оценки отклонения текущего среднего пропорциональна величине $1/(n+1)$. Это означает, что кривая, описывающая асимптотически сходящуюся последовательность, может быть представлена формально в виде

$$x_n = A_0 + A_x \cdot \frac{1}{n}, \quad (2)$$

где A_0, A_x – суть постоянные коэффициенты; n – размер выборки.

Для ответа на второй вопрос необходимо рассмотреть те возможности, которые предоставляются непосредственно реализуемой системой измерений, когда:

- количество НКА в созвездии, необходимое для получения параметров движения, должно быть не менее четырёх;
- реально складывающееся созвездие радиовидимых НКА в каждый момент времени может превосходить минимально необходимое количество.

С учётом последнего может быть воспроизведена любая из возможных комбинаций НКА, составляющих рабочее созвездие, начиная с реально доступного их ко-

личества на текущий момент времени вплоть до минимально необходимого. Это позволяет определять параметры движения наблюдаемого объекта для каждой из таких комбинаций, причём получаемые при этом оценки носят случайный характер и обладают свойством состоятельности (1), рассмотренным выше. Так, например, при неограниченном увеличении количества НКА следует ожидать соответствующего уменьшения погрешностей определения параметров движения объекта.

Организация сходящейся последовательности сводится, таким образом, к определению оценок параметров движения объекта при всех возможных комбинациях НКА.

Например, пусть в некоторый момент времени имеются измерения, полученные по сигналам от 12 НКА. Это позволяет для текущего момента времени получить оценки параметров движения наблюдаемого объекта (координаты x, y, z и скорости V_x, V_y, V_z) для следующих комбинаций:

- при использовании измерений от 12 НКА – одна комбинация ($C_{12}^{12} = \frac{12!}{0! \cdot 12!} = 1$);
- при использовании измерений от 11 НКА – 12 комбинаций ($C_{12}^{11} = \frac{12 \cdot 11!}{1! \cdot 11!} = 12$);
- при использовании измерений от 10 НКА – 66 комбинаций ($C_{12}^{10} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2! \cdot 10!} = 66$);
- при использовании измерений от 4 НКА – 495 комбинаций ($C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 4!} = 495$).

Графические иллюстрации получаемых распределений оценок параметров движения представлены на рис. 1–3.

Предполагается, что в силу случайного характера траектории полёта наблюдаемого объекта возможна любая из представленных комбинаций НКА, входящих в состав рабочего созвездия, в том числе и такая, при кото-

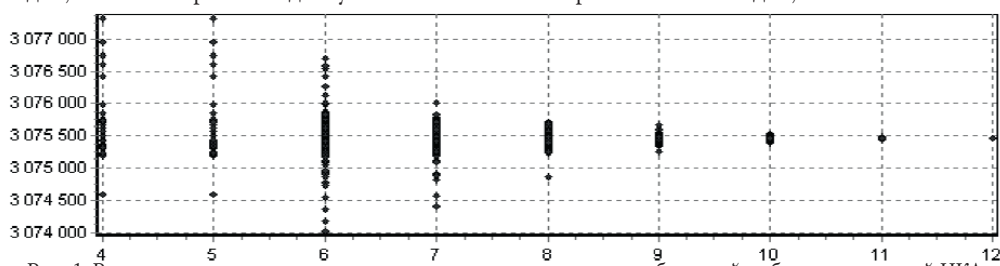


Рис. 1. Распределение оценок координаты x для различных комбинаций рабочих созвездий НКА

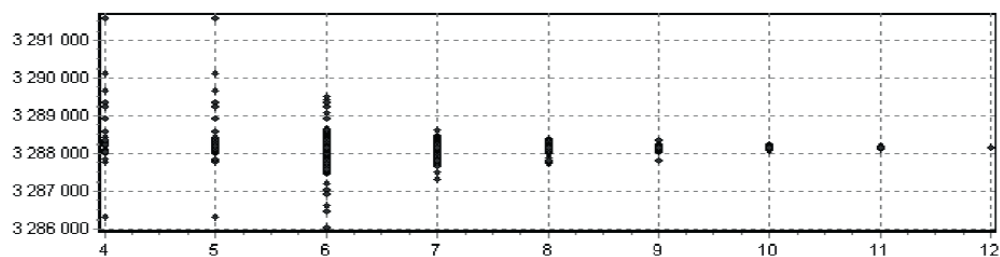


Рис. 2. Распределение оценок координаты y для различных комбинаций рабочих созвездий НКА

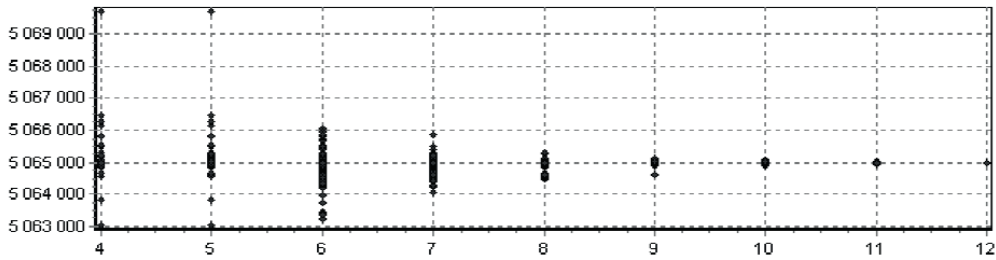


Рис. 3. Распределение оценок координаты z для различных комбинаций рабочих созвездий НКА

рой определение параметров движения объекта становится невозможным.

Уменьшение влияния случайных факторов достигается путём осреднения оценок в группах комбинаций, распределённых по количеству привлекаемых НКА (от 4 до 12 в рассматриваемом примере). Кривая, полученная в результате осреднения оценок параметров движения на текущий момент времени в группах комбинаций может рассматриваться в качестве экспериментальной кривой, описывающей сходящуюся последовательность оценок в соответствии с (1), (2).

Дальнейшие рассуждения затрагивают вопросы аппроксимации, получаемых асимптотически сходящихся последовательностей, моделью (2) и определения интересующих погрешностей оценок параметров движения наблюдаемого объекта.

Для рассматриваемого примера результирующие оценки погрешностей определения параметров движения объекта на текущий момент времени иллюстрируются графически (см. рис. 4–6).

На рисунках показаны:

- экспериментальная асимптотически сходящаяся последовательность оценок в зависимости от количества используемых НКА;

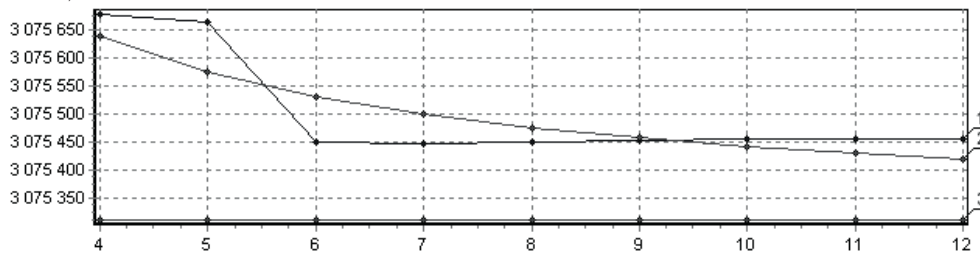


Рис. 4. Оценка погрешностей определения координаты x движения объекта на текущий момент времени: 1 – оценки среднего; 2 – аппроксимирующая кривая; 3 – линия предельного значения

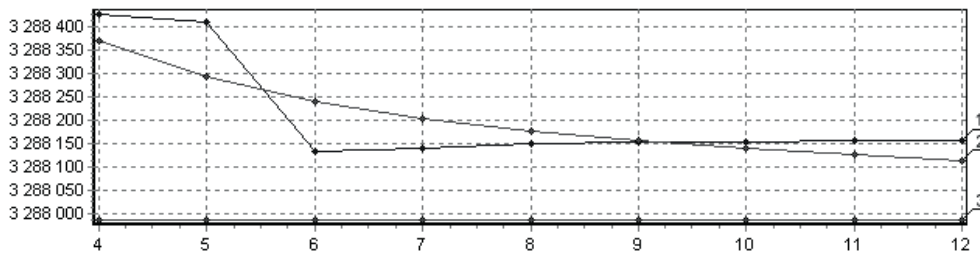


Рис. 5. Оценка погрешностей определения координаты y движения объекта на текущий момент времени: 1 – оценки среднего; 2 – аппроксимирующая кривая; 3 – линия предельного значения

- аппроксимирующая кривая асимптотически сходящейся последовательности;
- линия предельного значения оценки параметра движения.

Линия предельной оценки определяется при бесконечном увеличении количества навигационных спутников в соответствии с моделью (2)

$$x_{\infty} = A_{x_0} + A_x \cdot \frac{1}{n} = A_{x_0}, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

В общем случае можно записать выражения для МНК-оценок коэффициентов (A_{x_0}, A_x) , (B_{y_0}, B_y) , (C_{z_0}, C_z) и $(A_{V_x}, A_{V_y}, A_{V_z})$, $(B_{V_x}, B_{V_y}, B_{V_z})$, $(C_{V_x}, C_{V_y}, C_{V_z})$ аппроксимирующих кривых для параметров движения наблюдаемого объекта:

$$\begin{pmatrix} A_{x_0} & B_{y_0} & C_{z_0} \\ A_x & B_y & C_z \end{pmatrix} = (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot (\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z});$$

$$\begin{pmatrix} A_{V_x} & B_{V_x} & C_{V_x} \\ A_{V_y} & B_{V_y} & C_{V_y} \\ A_{V_z} & B_{V_z} & C_{V_z} \end{pmatrix} = (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot (\mathbf{V}_x \ \mathbf{V}_y \ \mathbf{V}_z),$$

где $(\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z})$ и $(\mathbf{V}_x \ \mathbf{V}_y \ \mathbf{V}_z)$ – векторы средних значений координат и скоростей по группам комбинаций рабочих созвездий;

\mathbf{W} – матрица функций влияния вида

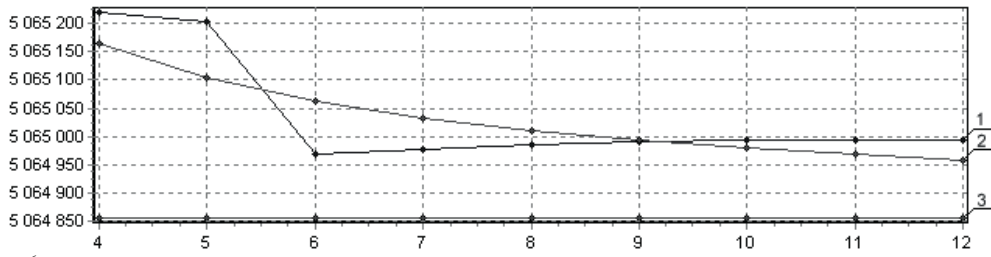


Рис. 6. Оценка погрешностей определения координаты z движения объекта на текущий момент времени: 1 – оценки среднего; 2 – аппроксимирующая кривая; 3 – линия предельного значения

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/n_1 & 1/n_2 & \dots & 1/n_m \end{pmatrix},$$

где n_j – количество НКА в j -м рабочем созвездии.

Оценки систематических погрешностей определения параметров траектории для каждой из комбинаций рабочих созвездий НКА в зависимости от количества входящих в них спутников будут определяться следующими соотношениями:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} A_{x_0} + A_x/n \\ B_{y_0} + B_y/n \\ C_{z_0} + C_z/n \\ A_{V_0} + A_{V_x}/n \\ B_{V_0} + B_{V_y}/n \\ C_{V_0} + C_{V_z}/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{x_0} \\ B_{y_0} \\ C_{z_0} \\ A_{V_0} \\ B_{V_0} \\ C_{V_0} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} A_x \\ B_y \\ C_z \\ A_{V_x} \\ B_{V_y} \\ C_{V_z} \end{pmatrix}.$$

Полученные таким образом оценки погрешностей определения параметров движения наблюдаемого объекта позволяют перейти к погрешностям траекторных измерений при использовании соответствующих матриц частных производных.

Непосредственно измеряемыми параметрами в АСН являются псевдодальности PR_i и псевдоскорости PV_i , полученные относительно каждого из радиовидимых НКА.

Навигационные функции, связывающие псевдодальности и псевдоскорости с параметрами движения наблюдаемого объекта, а также с известными навигационными параметрами i -го НКА, имеют вид

$$PR_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + \delta D_{CPHC};$$

$$PV_i = \frac{(x_i - x)(V_{xi} - V_x) + (y_i - y)(V_{yi} - V_y)}{B} + \frac{(z_i - z)(V_{zi} - V_z)}{B} + \delta \dot{D}_{CPHC};$$

где $B = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$;

x, y, z и V_x, V_y, V_z – соответственно координаты и составляющие вектора скорости наблюдаемого объекта;

$\delta D_{CPHC}, \delta \dot{D}_{CPHC}$ – поправки обусловленные рассинхронизацией опорных генераторов частоты АСН и НКА; x_i, y_i, z_i и V_{xi}, V_{yi}, V_{zi} – соответственно координаты и составляющие вектора скорости i -го НКА.

Для соответствующих частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} PR_i = -\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})}{D_i}; \quad \frac{\partial}{\partial \delta D_{CPHC}} PR_i = 1;$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} PV_i = \frac{-(\mathbf{V}_{xi} - \mathbf{V}_x) - \dot{D}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} D_i}{D_i};$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}_x} PV_i = \frac{-\frac{\tau_{V_x}}{2} \cdot (\mathbf{V}_{xi} - \mathbf{V}_x) - (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) - \dot{D}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}_x} D_i}{D_i};$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta \dot{D}_{CPHC}} PV_i = 1,$$

где $D_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$;

$$\dot{D}_i = \frac{(x_i - x)(V_{xi} - V_x) + (y_i - y)(V_{yi} - V_y)}{D_i} + \frac{(z_i - z)(V_{zi} - V_z)}{D_i};$$

$$\mathbf{x} = [x, y, z]^T; \quad \mathbf{V}_x = [V_x, V_y, V_z]^T;$$

$$\mathbf{x}_i = [x_i, y_i, z_i]^T; \quad \mathbf{V}_{xi} = [V_{xi}, V_{yi}, V_{zi}]^T,$$

связывающих вариации систематических отклонений оценок параметров траектории объекта наблюдения (на текущий момент времени и заданного количества НКА) от их предельных значений, можно записать

$$\Delta PR_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} D_i \quad \frac{\partial}{\partial y} D_i \quad \frac{\partial}{\partial z} D_i \right) \cdot (\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z)^T;$$

$$\Delta PV_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} \dot{D}_i \quad \frac{\partial}{\partial y} \dot{D}_i \quad \frac{\partial}{\partial z} \dot{D}_i \quad \frac{\partial}{\partial V_x} \dot{D}_i \quad \frac{\partial}{\partial V_y} \dot{D}_i \quad \frac{\partial}{\partial V_z} \dot{D}_i \right) \times$$

$$\times (\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad \Delta V_x \quad \Delta V_y \quad \Delta V_z)^T,$$

что позволяет перейти к оценке погрешностей измерений аппаратуры спутниковой навигации.

Аналогичным образом могут быть аппроксимированы выборочные оценки дисперсий, характеризующих размах коридора локализации оценок параметров траектории движения объекта наблюдения. Это позво-

ляет получить оценки систематических и случайных погрешностей определения параметров движения объекта наблюдения и погрешностей измерений АСН для каждого рабочего созвездия НКА.

Отличительной особенностью предложенного

подхода является его независимость от наличия или отсутствия эталонного измерителя, что становится возможным исходя из заложенной в организации СРНС структурной избыточности навигационных спутников.

Литература:

1. *Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М.Виноградов, т.5. – М.: «Советская энциклопедия», 1984, - 1248 с., ил.*
2. *Орлов А.И. Математика случая: Вероятность и статистика – основные факты. Учебное пособие. –М.: МЗ-Пресс, 2004. – 110 с.*
3. *Корн Г., Корн М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1982. – 831 с.*

Материал поступил в редакцию 29. 11. 2012 г.