УДК 629.7.05.

© Алферьев В.Л.
Alferyev V.

# О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАНЕВРИРУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ В СФЕРИЧЕСКИ-ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

# THE SOLUTION OF THE EQUATION OF MOTION OF MANEUVERING OBJECTS IN SPHERICALLY UNIFORM FIELD

***Аннотация.*** *Продолжено построение алгоритмов имитационного моделирования управляемого движения космических объектов. Определены недостающие граничные условия общего решения, сформулирована последовательность вычислений. Получены удобные для имитационного моделирования управляемого движения ряда космических объектов (КО) рекуррентные соотношения. Определены соответствующие краевые условия. Предоставлена последовательность практических вычислений.*

***Annotation.*** *Build-up of algorithms for simulation modeling of operated driving of space objects is prolonged. Missing boundary conditions of the common decision are determined, the sequence of scaling is formulated. Get comfortable for the simulation of the obtained number of space objects (KO) recurrences. Identify the appropriate boundary conditions. Provided the sequence of practical calculations.*

***Ключевые слова.*** *Общее свойство, импульсная вариация, линейное уравнение, вариационная задача.*

***Key words.*** *General properties, pulse variation, linear equation, variational problem.*

Статья является третьей из представляемой серии работ. Список сокращений и обозначений представлен в работе [1]. Там же даны полная постановка задачи и доказательство корректности методики. Общее решение уравнений управляемого движения в сферически-однородном поле выписано в работе [2].

## 1. Недостающие компоненты первого приближения решения однородного уравнения

В продолжение работы [2] вернемся к рассмотрению решения однородного уравнения (1). Нулевое приближение однородного уравнения по высоте сферического слоя имеет вид

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)} = \vec{\mathbf{F}}_0 \sin z + \vec{\mathbf{D}}_0 \cos z; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)} = \vec{\mathbf{F}}_0 \cos z - \vec{\mathbf{D}}_0 \sin z. \qquad (1)$$

При этом для данного приближение будут справедливы дифференциальные уравнения

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_0''^{(0)}(z) + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (24) [2] предоставляет возможность получения ($p$+1)-го приближения по высоте сферического слоя по известному $p$-му приближению, если только $p$>1. Для получения общей цепочки взаимосвязей между компонентами разных приближений осталось только определить недостающие компоненты первого приближения.

Уравнения (22) [2] для компонент первого приближения решения однородного уравнения (1)[2] запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n)}(z) = -\int_0^z x^n \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(x) \sin(z-x)\, dx; \\ &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n)}(z) = -\int_0^z x^n \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(x) \cos(z-x)\, dx. \end{aligned} \qquad (3)$$

Для получения соответствующих рекуррентных зависимостей подставим в подынтегральные выражения уравнений (3) вместо вектора $\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)$ его вторую производную в соответствии с уравнением (2). Производя несколько раз интегрирование по частям первого уравнения (3), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n+1)}(z) = \int_0^z x^{n+1} \vec{\boldsymbol{\rho}}_0''^{(0)}(x) \sin(z-x)\, dx = \\ &= \underbrace{\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)} x^{n+1} \sin(z-x)\Big|_0^z}_{=0} - \int_0^z \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(x)[x^{n+1}\sin(z-x)]'\, dx = \\ &= \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(x)[x^{n+1}\cos(z-x) - (n+1)x^n \sin(z-x)]\Big|_0^z + \\ &+ \int_0^z \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(x)[x^{n+1}\sin(z-x)]''\, dx = \\ &= z^{n+1}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) - (n+1)x^n \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(x)\sin(z-x)\Big|_0^z + \\ &+ n(n+1)\begin{cases} \int_0^z x^{n-1}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(x)\sin(z-x)\, dx, \ n \ge 1 \\ 0, \ n = 0 \end{cases} + \\ &+ 2(n+1)\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n)}(z) + \vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n+1)}(z). \end{aligned}$$

*Алферьев Виктор Леонидович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, МАК «Вымпел», тел. (495)543-36-76.*

*Alferyev Victor – Ph.D., senior researcher, JSC «Vympel», tel. (495)543-36-76.*

Сравнивая крайние выражения выписанной цепочки равенств и сокращая вектор $\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n+1)}(z)$, записываем

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n)}(z) = -\frac{z^{n+1}}{2(n+1)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) + \frac{1}{2}\begin{cases} n\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n-1)}(z),\ n \ge 1; \\ -\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(0)\sin z,\ n = 0. \end{cases}$$

Проделывая в точности аналогичные манипуляции со вторым интегралом системы уравнений (1.3), получим

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n)}(z) = \frac{z^{n+1}}{2(n+1)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) - \frac{z^n}{2}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) + $$
$$+\frac{1}{2}\begin{cases} -n\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n-1)}(z),\ n \ge 1; \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(0)\cos z,\ n = 0. \end{cases}$$

В итоге для каждого значения $n \ge 1$ получим рекуррентные уравнения для расчета компонент первого приближения по высоте сферического слоя решения однородного уравнения (1)[2]

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n)}(z) = \frac{z^{n+1}}{2(n+1)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) - \frac{z^n}{2}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) - \frac{n}{2}\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n-1)}(z); \\ &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n)}(z) = \frac{n}{2}\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n-1)}(z) - \frac{z^{n+1}}{2(n+1)}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) \end{aligned} \qquad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,0)}(z) = \frac{z\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) - \vec{\boldsymbol{\rho}}'(0)\sin z}{2}; \\ &\vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,0)}(z) = -\frac{z\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) + \vec{\boldsymbol{\rho}}(0)\sin z}{2}. \end{aligned} \qquad (5)$$

При написании первого уравнения системы граничных условий (5) учтены начальные условия, задаваемые уравнениями первой системы (6)[2].

Выразим из первой системы уравнений (6) [2] начальные условия на момент времени $z$=0 включения ДУ КО через векторы нулевого приближения по высоте сферического слоя решение однородного уравнения. В итоге напишем

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\rho}}(0) = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\cos z - \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)\sin z; \\ &\vec{\boldsymbol{\rho}}'(0) = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\sin z + \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)\cos z. \end{aligned}$$

Подставим выписанные равенств в уравнения (5) и тем самым перепишем граничные условия для системы рекуррентных уравнений (4) в виде

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,0)}(z) = \dfrac{2z - \sin 2z}{4}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) - \dfrac{1-\cos 2z}{4}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z); \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,0)}(z) = \dfrac{1-\cos 2z}{4}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) - \dfrac{2z + \sin 2z}{4}\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z). \end{cases} \qquad (6)$$

Разрешая рекуррентные соотношения (4) с краевыми условиями (6) по принятой схеме (26),(27)[2], непосредственно получаем

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n)}(z) = -\dfrac{z^{n+1}}{2}[\tilde{g}_{1,1}^{(n)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) + \\ +\tilde{g}_{2,1}^{(n)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)] + \dfrac{z^{n+1}}{2(n+1)}\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z); \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n)}(z) = -\dfrac{z^{n+1}}{2}[\tilde{g}_{1,1}^{(n)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) - \\ -\tilde{g}_{2,1}^{(n)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z)] - \dfrac{z^{n+1}}{2(n+1)}\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) \end{cases} \qquad (7)$$

или, что в соответствии с уравнениями (41)[2] то же самое

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\rho}}_1^{(0,n)}(z) = \dfrac{z^{n+2}}{n+1}\Big[\tilde{g}_{2,1}^{(n+1)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) - \\ \qquad -\tilde{g}_{1,1}^{(n+1)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\Big]; \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_1'^{(0,n)}(z) = \dfrac{z^{n+2}}{n+1}\Big[\tilde{g}_{1,1}^{(n+1)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z) + \\ \qquad +\tilde{g}_{2,1}^{(n+1)}(2z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z)\Big] - \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z). \end{cases}$$

Определение элементарных функций $\tilde{g}_{1,n}^{(m)}(x)$ и $\tilde{g}_{2,n}^{(m)}(x)$ дано в работе [2](37).

Итак, получены недостающие соотношения (4), позволяющие находить решение однородного уравнения требуемой точности по высоте сферического слоя. Одновременно при практическом моделировании мы не встречались с ситуациями, в которых возникла бы необходимость учета приближения выше второго. Приведенный набор рекуррентных зависимостей удобен лишь для теоретических исследований свойств решения однородного уравнения (1) [2].

Для практического моделирования удобно использовать факт, что любое (по высоте сферического слоя) приближение решения однородного уравнения компланарно плоскости $(\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}, \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)})$, то есть существуют такие коэффициенты, что справедливы равенства

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(0,i_1,\ldots,i_p)}(z) = \kappa_{p,\text{rr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) + \\ \qquad + \kappa_{p,\text{rv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(0)}(z); \\ \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(0,i_1,\ldots,i_p)}(z) = \kappa_{p,\text{vr}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z) + \\ \qquad + \kappa_{p,\text{vv}}^{(i_1,\ldots,i_p)}(z)\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(0)}(z). \end{cases} \qquad (8)$$

Введённые коэффициенты позволяют отказаться от операций с векторами в процессе поиска всего набора требуемых приближений. С учетом результатов работы [2] (24), можем выписать дифференциальные зависимости между введёнными (8) коэффициентами для первого приближения искомого решения по высоте сферического слоя

$$\begin{cases} \kappa_{1,\text{rr}}'^{(n)} = \kappa_{1,\text{rv}}^{(n)} + \kappa_{1,\text{vr}}^{(n)}; \\ \kappa_{1,\text{rv}}'^{(n)} + \kappa_{1,\text{rr}}^{(n)} = \kappa_{1,\text{vv}}^{(n)}; \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa_{1,\text{vv}}'^{(n)} + \kappa_{1,\text{vr}}^{(n)} + \kappa_{1,\text{rv}}^{(n)} = 0; \\ \kappa_{1,\text{vr}}'^{(n)} + \kappa_{1,\text{rr}}^{(n)} + z^n = \kappa_{1,\text{vv}}^{(n)}, \end{cases} \qquad (9)$$

а также для коэффициентов любого $p$-го приближения, $p \ge 2$

$$\begin{cases} \kappa'^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}} = \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}} + \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vr}}; \\ \kappa'^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}} + \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}} = \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vv}}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \kappa'^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vv}} + \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vr}} + \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}} + z^{i_p}\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1})}_{p-1,\mathrm{rv}} = 0; \\ \kappa'^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vr}} + \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}} + z^{i_p}\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1})}_{p-1,\mathrm{vv}} = \kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vv}}. \end{cases} \tag{10}$$

Начальные условия для дифференциальных уравнений (10) равны нулю. Следствием уравнений (9) являются зависимости

$$\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}} + \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}} = 0; \quad \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} = \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}} + \frac{z^{n+1}}{n+1}, \tag{11}$$

а также дифференциальные равенства

$$\kappa'^{(n)}_{1,\mathrm{rr}} = 2\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} - \frac{z^{n+1}}{n+1}; \quad \kappa'^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} + 2\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}} = 0. \tag{12}$$

При этом дополнительно, как следствие уравнения (7), окажутся справедливы соотношения

$$\begin{cases} \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}} = -\dfrac{z^{n+1}}{2}\tilde{g}^{(n)}_{2,1}(2z); \\ \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} = \dfrac{z^{n+1}}{2}\left[\dfrac{1}{n+1} - \tilde{g}^{(n)}_{1,1}(2z)\right] = \dfrac{z^{n+2}\tilde{g}^{(n+1)}_{2,1}(2z)}{(n+1)}; \\ \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}} = \dfrac{z^{n+1}}{2}\tilde{g}^{(n)}_{2,1}(2z); \\ \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}} = -\dfrac{z^{n+1}}{2}\left[\dfrac{1}{n+1} + \tilde{g}^{(n)}_{1,1}(2z)\right] = \dfrac{z^{n+2}\tilde{g}^{(n+1)}_{2,1}(2z)}{(n+1)} - \dfrac{z^{n+1}}{(n+1)}. \end{cases} \tag{13}$$

Для расчета коэффициентов компонент первого приближения решения однородного уравнения (4.1) [2] по высоте сферического слоя уравнения (4) перепишутся в виде

$$\begin{cases} \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}} = -\dfrac{z^n}{2} - \dfrac{n}{2}\kappa^{(n-1)}_{1,\mathrm{vr}}; \\ \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}} = \dfrac{n}{2}\kappa^{(n-1)}_{1,\mathrm{rv}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} = \dfrac{z^{n+1}}{2(n+1)} - \dfrac{n}{2}\kappa^{(n-1)}_{1,\mathrm{vv}}; \\ \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}} = \dfrac{n}{2}\kappa^{(n-1)}_{1,\mathrm{rr}} - \dfrac{z^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases} \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{rr}} = -\frac{1-\cos 2z}{4}; \quad \kappa^{(0)}_{1,\mathrm{rv}} = \frac{2z - \sin 2z}{4};$$
$$\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vr}} = -\frac{2z + \sin 2z}{4}; \quad \kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vv}} = \frac{1-\cos 2z}{4}. \tag{15}$$

Векторные компоненты первого приближения решения однородного уравнения удовлетворят равенствам

$$\vec{\rho}^{(0,n)}_1(z) = \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}}(z)\cdot\vec{\rho}^{(0)}_0(z) + \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}(z)\cdot\vec{\rho}'^{(0)}_0(z);$$
$$\vec{\rho}'^{(0,n)}_1(z) = \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}}(z)\cdot\vec{\rho}^{(0)}_0(z) + \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}}(z)\cdot\vec{\rho}'^{(0)}_0(z). \tag{16}$$

При этом, в силу справедливости взаимосвязей (12), для расчета компонент первого приближения можно ограничиться использованием только двух коэффициентов, рассчитывая их посредством уравнений

$$\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}} = \frac{n}{2}\kappa^{(n-1)}_{1,\mathrm{rv}}; \quad \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} = \frac{z^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{n}{2}\kappa^{(n-1)}_{1,\mathrm{vv}}. \tag{17}$$

С использованием этих формул векторные компоненты первого приближения решения однородного уравнения удовлетворят равенствам

$$\vec{\rho}^{(0,n)}_1 = \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}\cdot\vec{\rho}'^{(0)}_0 - \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}}\cdot\vec{\rho}^{(0)}_0;$$
$$\vec{\rho}'^{(0,n)}_1 = \left(\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}} - \frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\cdot\vec{\rho}^{(0)}_0 + \kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}}\cdot\vec{\rho}'^{(0)}_0. \tag{18}$$

Одновременно векторные компоненты второго приближения уравнения (8) приобретут вид

$$\begin{cases} \vec{\rho}^{(0,n,p)}_2(z) = \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{rr}}(z)\cdot\vec{\rho}^{(0)}_0(z) + \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{rv}}(z)\cdot\vec{\rho}'^{(0)}_0(z); \\ \vec{\rho}'^{(0,n,p)}_2(z) = \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{vr}}(z)\cdot\vec{\rho}^{(0)}_0(z) + \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{vv}}(z)\cdot\vec{\rho}'^{(0)}_0(z). \end{cases} \tag{19}$$

Для расчета коэффициентов (14) компонент второго приближения воспользуемся уравнениями (24) [2] с краевыми условиями (25) [2]. В соответствии с данными уравнениями набор коэффициентов компонент второго приближения удовлетворит рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{rr}} = -\dfrac{p}{2}\kappa^{(n,p-1)}_{2,\mathrm{vr}} - \dfrac{\kappa^{(n+p+1)}_{1,\mathrm{vr}} - z^{p+1}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}}}{2(p+1)} - \dfrac{z^p}{2}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}}; \\ \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{rv}} = -\dfrac{p}{2}\kappa^{(n,p-1)}_{2,\mathrm{vv}} - \dfrac{\kappa^{(n+p+1)}_{1,\mathrm{vv}} - z^{p+1}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}}}{2(p+1)} - \dfrac{z^p}{2}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{vr}} = \dfrac{p}{2}\kappa^{(n,p-1)}_{2,\mathrm{rr}} + \dfrac{\kappa^{(n+p+1)}_{1,\mathrm{rr}} - z^{p+1}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}}}{2(p+1)}; \\ \kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{vv}} = \dfrac{p}{2}\kappa^{(n,p-1)}_{2,\mathrm{rv}} + \dfrac{\kappa^{(n+p+1)}_{1,\mathrm{rv}} - z^{p+1}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}}{2(p+1)}, \end{cases} \tag{20}$$

для которых заданы граничные условия

$$\begin{cases} \kappa^{(n,0)}_{2,\mathrm{rr}}(z) = -\dfrac{\kappa^{(n+1)}_{1,\mathrm{vr}}(z) - z\cdot\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}}(z)}{2} - \dfrac{1}{2}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}}(z); \\ \kappa^{(n,0)}_{2,\mathrm{rv}}(z) = -\dfrac{\kappa^{(n+1)}_{1,\mathrm{vv}}(z) - z\cdot\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}}(z)}{2} - \dfrac{1}{2}\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}(z); \end{cases}$$
$$\begin{cases} \kappa^{(n,0)}_{2,\mathrm{vr}}(z) = \dfrac{\kappa^{(n+1)}_{1,\mathrm{rr}}(z) - z\cdot\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}}(z)}{2}; \\ \kappa^{(n,0)}_{2,\mathrm{vv}}(z) = \dfrac{\kappa^{(n+1)}_{1,\mathrm{rv}}(z) - z\cdot\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}(z)}{2}. \end{cases} \tag{21}$$

В общем случае для расчета коэффициентов компонент ($p$+1)-го приближения по высоте сферического слоя, $p\geq 1$, могут использоваться рекуррентные уравнения, являющиеся непосредственным следствием уравнений (24) [2] и (25) [2]

$$\begin{cases} \kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1})}_{p+1,\mathrm{rr}}(z) = -\dfrac{i_{p+1}}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1}-1)}_{p+1,\mathrm{vr}}(z) - \\ -\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+i_{p+1}+1)}_{p,\mathrm{vr}}(z) - z^{i_{p+1}+1}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vr}}(z)}{2(i_{p+1}+1)} - \dfrac{z^{i_{p+1}}}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}}(z); \\ \kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1})}_{p+1,\mathrm{rv}}(z) = -\dfrac{i_{p+1}}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1}-1)}_{p+1,\mathrm{vv}}(z) - \\ -\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+i_{p+1}+1)}_{p,\mathrm{vv}}(z) - z^{i_{p+1}+1}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vv}}(z)}{2(i_{p+1}+1)} - \dfrac{z^{i_{p+1}}}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}}(z) \end{cases} \tag{22}$$

и

$$
\begin{cases}
\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1})}_{p+1,\mathrm{vr}}(z)=\dfrac{i_{p+1}}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1}-1)}_{p+1,\mathrm{rr}}(z)+\\
+\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+i_{p+1}+1)}_{p,\mathrm{rr}}(z)-z^{i_{p+1}+1}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}}(z)}{2(i_{p+1}+1)};\\
\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1})}_{p+1,\mathrm{vv}}(z)=\dfrac{i_{p+1}}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p+1}-1)}_{p+1,\mathrm{rv}}(z)+\\
+\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+i_{p+1}+1)}_{p,\mathrm{rv}}(z)-z^{i_{p+1}+1}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}}(z)}{2(i_{p+1}+1)}
\end{cases}
\qquad (23)
$$

с граничными условиями

$$
\begin{cases}
\kappa^{(i_1,\ldots,i_p,0)}_{p+1,\mathrm{rr}}=-\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+1)}_{p,\mathrm{vr}}-z\cdot\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vr}}}{2}-\dfrac{1}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}};\\
\kappa^{(i_1,\ldots,i_p,0)}_{p+1,\mathrm{rv}}=-\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+1)}_{p,\mathrm{vv}}-z\cdot\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{vv}}}{2}-\dfrac{1}{2}\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}};
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\kappa^{(i_1,\ldots,i_p,0)}_{p+1,\mathrm{vr}}=\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+1)}_{p,\mathrm{rr}}-z\cdot\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rr}}}{2};\\
\kappa^{(i_1,\ldots,i_p,0)}_{p+1,\mathrm{vv}}=\dfrac{\kappa^{(i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+1)}_{p,\mathrm{rv}}-z\cdot\kappa^{(i_1,\ldots,i_p)}_{p,\mathrm{rv}}}{2}.
\end{cases}
\qquad (24)
$$

В итоге искомое решение однородного уравнения (1) [2] примет вид

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\rho}}^{(0)}=&\left[1+\sum_{n=1}\tilde{a}_n\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rr}}+\sum_{n,p=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{rr}}+\right.\\
&\left.+\sum_{n,p,k=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\tilde{a}_k\kappa^{(n,p,k)}_{3,\mathrm{rr}}+\ldots\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}^{(0)}_0+\\
&+\left[\sum_{n=1}\tilde{a}_n\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{rv}}+\sum_{n,p=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{rv}}+\right.\\
&\left.+\sum_{n,p,k=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\tilde{a}_k\kappa^{(n,p,k)}_{3,\mathrm{rv}}+\ldots\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}'^{(0)}_0;
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\rho}}'^{(0)}=&\left[\sum_{n=1}\tilde{a}_n\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vr}}+\sum_{n,p=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{vr}}+\right.\\
&\left.+\sum_{n,p,k=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\tilde{a}_k\kappa^{(n,p,k)}_{3,\mathrm{vr}}+\ldots\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}^{(0)}_0+\\
&+\left[1+\sum_{n=1}\tilde{a}_n\kappa^{(n)}_{1,\mathrm{vv}}+\sum_{n,p=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\kappa^{(n,p)}_{2,\mathrm{vv}}+\right.\\
&\left.+\sum_{n,p,k=1}\tilde{a}_n\tilde{a}_p\tilde{a}_k\kappa^{(n,p,k)}_{3,\mathrm{vv}}+\ldots\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\rho}}'^{(0)}_0.
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

Если в процессе практического моделирования учитываются приближения по высоте сферического слоя не выше второго, то нет смысла использовать рекуррентные уравнения типа (29) [2], в которых с целью экономии оперативной памяти ЭВМ производятся промежуточные суммирования. Более того, попытка использования уравнений (29) [2] в данном случае, как будет показано ниже, не приведет к экономии оперативной памяти, но одновременно несколько увеличит нагрузку на процессор компьютера.

Приведем *пример экономного алгоритма* расчета коэффициентов для компонент первого и второго приближений по высоте сферического слоя решения однородного уравнения без использования возможностей, предоставляемых уравнением (29) [2]. Вычисления с использованием подобного алгоритма производятся всякий раз при задании нового времени $z$ активного движения КО.

## 2. Вычисление коэффициентов $\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{rv}}$, $\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{vr}}$ и $\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{vv}}$, $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{rr}}$, $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{rv}}$, $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{vr}}$ и $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{vv}}$

Пусть $n$, $1\geq n\geq 5$, обозначает количество используемых членов разложения в (9)[1], то есть положим $1/\rho^3\approx 1+\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i z^i$. Размещаем в памяти массивы $\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{rv}}$, $\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{vr}}$ и $\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{vv}}$ длиной $n$+1 по значению индекса $m$, а также двухмерные массивы $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{rr}}$, $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{rv}}$, $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{vr}}$ и $\kappa^{(m,p)}_{2,\mathrm{vv}}$ длиной $n$+1 каждый по значениям индексов $m$ и $p$. Итого не более 162 чисел (если принято решение использовать второе приближение по высоте сферического слоя решения однородного уравнения).

1. Предварительно обнуляя выделенные массивы, вычисляем граничные условия (15)

$$
\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{rv}}=\frac{2z-\sin 2z}{4};\quad \kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vr}}=-\frac{2z+\sin 2z}{4};
$$

$$
\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vv}}=\frac{1-\cos 2z}{4}.
$$

2. Определяемся по количеству используемых приближений. Если дополнительно к нулевому приближению используется только первое приближение, то полагаем $n_f=n$, иначе $n_f=2n+1$.

3. Для всех $m$ от единицы до $n_f$ в соответствии с уравнениями (14) вычисляем компоненты первого приближения

$$
\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{vv}}=\frac{m}{2}\kappa^{(m-1)}_{1,\mathrm{rv}};\quad \kappa^{(m)}_{1,\mathrm{rv}}=\frac{z^{m+1}}{2(m+1)}-\frac{m}{2}\kappa^{(m-1)}_{1,\mathrm{vv}};
$$

$$
\kappa^{(m)}_{1,\mathrm{vr}}=-\frac{m}{2}\kappa^{(m-1)}_{1,\mathrm{vv}}-\frac{z^{m+1}}{2(m+1)}.
$$

4. Если дополнительно к нулевому приближению используется только первое приближение, то дальнейшие вычисления опускаем (*как правило, первого приближения достаточно*).

5. Вычисляем граничные условия уравнений (21)

$$
\begin{cases}
\kappa^{(0,0)}_{2,\mathrm{rr}}(z)=\dfrac{z\cdot\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vr}}(z)-\kappa^{(1)}_{1,\mathrm{vr}}(z)+\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vv}}(z)}{2};\\
\kappa^{(0,0)}_{2,\mathrm{rv}}(z)=\dfrac{z\cdot\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vv}}(z)-\kappa^{(1)}_{1,\mathrm{vv}}(z)-\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{rv}}(z)}{2};\\
\kappa^{(0,0)}_{2,\mathrm{vr}}(z)=\dfrac{z\cdot\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{vv}}(z)-\kappa^{(1)}_{1,\mathrm{vv}}(z)}{2};\\
\kappa^{(0,0)}_{2,\mathrm{vv}}(z)=\dfrac{\kappa^{(1)}_{1,\mathrm{rv}}(z)-z\cdot\kappa^{(0)}_{1,\mathrm{rv}}(z)}{2}.
\end{cases}
$$

6. Для всех $m$ от единицы до $n$ в соответствии с

уравнениями (21) вычисляем

• граничные компоненты второго приближения

$$\begin{cases} \kappa_{2,\text{rr}}^{(m,0)}(z) = \dfrac{z\cdot\kappa_{1,\text{vr}}^{(m)}(z) - \kappa_{1,\text{vr}}^{(m+1)}(z) + \kappa_{1,\text{vv}}^{(m)}(z)}{2}; \\ \kappa_{2,\text{rv}}^{(m,0)}(z) = \dfrac{z\cdot\kappa_{1,\text{vv}}^{(m)}(z) - \kappa_{1,\text{vv}}^{(m+1)}(z) - \kappa_{1,\text{rv}}^{(m)}(z)}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa_{2,\text{vr}}^{(m,0)}(z) = \dfrac{z\cdot\kappa_{1,\text{vv}}^{(m)}(z) - \kappa_{1,\text{vv}}^{(m+1)}(z)}{2}; \\ \kappa_{2,\text{vv}}^{(m,0)}(z) = \dfrac{\kappa_{1,\text{rv}}^{(m+1)}(z) - z\cdot\kappa_{1,\text{rv}}^{(m)}(z)}{2}, \end{cases}$$

• для всех $p$ от единицы до $n$ в соответствии с уравнениями (1.20) вычисляем полный набор компонент второго приближения

$$\begin{cases} \kappa_{2,\text{rr}}^{(n,p)} = -\dfrac{p}{2}\kappa_{2,\text{vr}}^{(n,p-1)} - \dfrac{\kappa_{1,\text{vr}}^{(n+p+1)} - z^{p+1}\kappa_{1,\text{vr}}^{(n)}}{2(p+1)} - \dfrac{z^p}{2}\kappa_{1,\text{rr}}^{(n)}; \\ \kappa_{2,\text{rv}}^{(n,p)} = -\dfrac{p}{2}\kappa_{2,\text{vv}}^{(n,p-1)} - \dfrac{\kappa_{1,\text{vv}}^{(n+p+1)} - z^{p+1}\kappa_{1,\text{vv}}^{(n)}}{2(p+1)} - \dfrac{z^p}{2}\kappa_{1,\text{rv}}^{(n)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa_{2,\text{vr}}^{(n,p)} = \dfrac{p}{2}\kappa_{2,\text{rr}}^{(n,p-1)} - \dfrac{\kappa_{1,\text{vv}}^{(n+p+1)} - z^{p+1}\kappa_{1,\text{vv}}^{(n)}}{2(p+1)}; \\ \kappa_{2,\text{vv}}^{(n,p)} = \dfrac{p}{2}\kappa_{2,\text{rv}}^{(n,p-1)} + \dfrac{\kappa_{1,\text{rv}}^{(n+p+1)} - z^{p+1}\kappa_{1,\text{rv}}^{(n)}}{2(p+1)}. \end{cases}$$

При использовании приведенного алгоритма в уравнениях типа (1.25) вместо компонент $\kappa_{1,\text{rr}}^{(n)}$ используются компоненты $\kappa_{1,\text{vv}}^{(n)}$ в соответствии с уравнением $\kappa_{1,\text{rr}}^{(n)} = -\kappa_{1,\text{vv}}^{(n)}$.

### 3. Недостающие компоненты первого приближения решения неоднородного уравнения

В продолжение работ [1,2] вернемся к рассмотрению решения неоднородного уравнения (1)[2]. Нулевое приближение неоднородного уравнения по высоте сферического слоя определено второй системой уравнений (6) [2]

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(1)}(z) = \tilde{u}\vec{\boldsymbol{\delta}}\cdot\Pi(a,z);\quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(1)}(z) = \tilde{u}\vec{\boldsymbol{\delta}}\cdot\Pi'(a,z). \quad (27)$$

При этом функция $\Pi(a,z)$ удовлетворит дифференциальным уравнениям (9) [2]

$$\Pi''(a,z) + \Pi(a,z) = \frac{1}{a-z} \quad (28)$$

с начальными условиями (10)[2] $\Pi(a,0)=0,\quad \Pi'(a,0)=0$.

Функция $\Pi(a,z)$ вместе со своей производной $\Pi'(a,z)$ характеризует энергетические затраты ДУ на совершение маневра, и вдоль интегральных кривых уравнения (3) [2] определяется уравнениями (6) [2]. Для удобства программной реализации введём обозначения

$$F_\Pi^{(1)}(a,z) = \int_0^z \frac{\cos x}{a-x}dx;\quad F_\Pi^{(2)}(a,z) = \int_0^z \frac{\sin x}{a-x}dx \quad (29)$$

и выразим функции $\Pi(a,z)$ и $\Pi'(a,z)$ посредством введённых обозначений. Окажутся справедливы равенства

$$\begin{cases} F_\Pi^{(1)}(a,z) = [\text{Ci}(a) - \text{Ci}(a-z)]\cos a + \\ \qquad + [\text{Si}(a) - \text{Si}(a-z)]\sin a; \\ F_\Pi^{(2)}(a,z) = [\text{Ci}(a) - \text{Ci}(a-z)]\sin a - \\ \qquad - [\text{Si}(a) - \text{Si}(a-z)]\cos a. \end{cases} \quad (30)$$

Функции $\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x}dx$ и $\text{Ci}(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ являются интегральными синусом и косинусом от аргумента $z$. Так что уравнения (8)[2], определяющие функцию $\Pi(a,z)$ и ее производную $\Pi'(a,z)$, перепишутся в виде

$$\begin{cases} \Pi(a,z) = [\text{Si}(a) - \text{Si}(a-z)]\cos(a-z) - \\ \qquad - [\text{Ci}(a) - \text{Ci}(a-z)]\sin(a-z); \\ \Pi'(a,z) = [\text{Ci}(a) - \text{Ci}(a-z)]\cos(a-z) + \\ \qquad + [\text{Si}(a) - \text{Si}(a-z)]\sin(a-z). \end{cases}$$

В силу определения интегральных синуса и косинуса справедливы разложения

$$\text{Si}(a) - \text{Si}(a-z) = \sum_{m=1}\frac{a^m - (a-z)^m}{m\cdot m!}\sin\frac{m\pi}{2};$$

$$\text{Ci}(a) - \text{Ci}(a-z) = \ln\frac{a}{a-z} + \sum_{m=1}\frac{a^m - (a-z)^m}{m\cdot m!}\cos\frac{m\pi}{2}.$$

Подстановка этих разложений в уравнения (30) позволяет их переписать в виде

$$\begin{aligned} F_\Pi^{(1)}(a,z) &= -\sum_{p=1}\frac{\Delta_1^{(p-1)}(a)\cdot y^p}{p} + \cos a\ln\frac{1}{1-y}; \\ F_\Pi^{(2)}(a,z) &= -\sum_{p=1}\frac{\Delta_2^{(p-1)}(a)\cdot y^p}{p} + \sin a\ln\frac{1}{1-y}, \end{aligned} \quad (31)$$

где остатки гармонических рядов $\Delta_1^{(n)}(z)$ и $\Delta_2^{(n)}(z)$ определены уравнениями (48)[2]. Поэтому на основании (8)[2] и определения (29) окажутся справедливы взаимосвязи

$$\begin{aligned} \Pi(a,z) &= F_\Pi^{(1)}(a,z)\sin z - F_\Pi^{(2)}(a,z)\cos z; \\ \Pi'(a,z) &= F_\Pi^{(1)}(a,z)\cos z + F_\Pi^{(2)}(a,z)\sin z \end{aligned} \quad (32)$$

или, что то же самое,

$$\Pi(a,z) = \int_0^z \frac{\sin(z-x)}{a-x}dx;\quad \Pi'(a,z) = \int_0^z \frac{\cos(z-x)}{a-x}dx. \quad (33)$$

Так что с учетом разложения (30) имеем возможность представить функцию $\Pi(a,z)$ и ее производную $\Pi'(a,z)$ посредством быстросходящихся рядов

$$\begin{cases} \Pi(a,z) = \cos z\sum_{p=1}\dfrac{\Delta_2^{(p-1)}(a)y^p}{p} - \sin z\sum_{p=1}\dfrac{\Delta_1^{(p-1)}(a)y^p}{p} - \\ \qquad - \sin(a-z)\ln\dfrac{1}{1-y}; \\ \Pi'(a,z) = \cos(a-z)\ln\dfrac{1}{1-y} - \cos z\sum_{p=1}\dfrac{\Delta_1^{(p-1)}(a)y^p}{p} - \\ \qquad - \sin z\sum_{p=1}\dfrac{\Delta_2^{(p-1)}(a)y^p}{p}, \end{cases} \quad (34)$$

которые будем рекомендовать к использованию в процессе практического моделирования. Положительная переменная $y$ при этом всегда меньше единицы и определена равенством

$$y = z/a. \tag{35}$$

Структура частного решения неоднородного уравнения (1)[2] такова, что все составляющие этого решения в представлении любой степени точности по высоте сферического слоя направлены вдоль вектора тяги ДУ КО. Поэтому существует набор скалярных функций $\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}$ и такой, что будут справедливы равенства

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_p^{(1,i_1,\dots,i_p)}(z) = \tilde{u}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\delta}}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_p'^{(1,i_1,\dots,i_p)}(z) = \tilde{u}\chi_p'^{(i_1,\dots,i_p)}\vec{\boldsymbol{\delta}}. \tag{36}$$

Действительно, для нулевого приближения частного решения неоднородного уравнения по высоте сферического слоя справедливость равенства (36) определена второй системой уравнений (4)[2]. Если предположить справедливость уравнений (36) для всех приближений, включая $p$-е, то справедливость представления (36) для $(p+1)$-го приближения гарантируются уравнениями (22)[2]. При этом сами уравнения (22)[2] с учетом равенств (36) примут вид

$$\begin{aligned} &\chi_{p+1}^{(i_1,\dots,i_{p+1})}(z) = -\int_0^z x^{i_{p+1}}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}(x)\sin(z-x)\,dx;\\ &\chi_{p+1}'^{(i_1,\dots,i_{p+1})}(z) = -\int_0^z x^{i_{p+1}}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}(x)\cos(z-x)\,dx. \end{aligned} \tag{37}$$

Нулевое приближение решения (27) по высоте сферического слоя с учетом обозначения (36) перепишется следующим образом:

$$\chi_0(z) = \Pi(a,z); \quad \chi_0'(z) = \Pi'(a,z); \tag{38}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_0^{(1)}(z) = \tilde{u}\chi_0(z)\cdot\vec{\boldsymbol{\delta}}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}_0'^{(1)}(z) = \tilde{u}\chi_0'(z)\cdot\vec{\boldsymbol{\delta}}. \tag{39}$$

Дифференциальное уравнение (20)[2] для введенных скалярных коэффициентов (36) перепишется в виде

$$\chi_{p+1}''^{(i_1,\dots,i_{p+1})} + \chi_{p+1}^{(i_1,\dots,i_{p+1})} + z^{i_{p+1}}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)} = 0. \tag{40}$$

Нахождение рекуррентных уравнений, определяющих коэффициенты для компонент первого приближения решения неоднородного уравнения по высоте сферического слоя, производится посредством уравнений (37), которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\chi_1^{(n)} = -\int_0^z x^n\Pi(a,x)\sin(z-x)\,dz;\\ &\chi_1'^{(n)} = -\int_0^z x^n\Pi(a,x)\cos(z-x)\,dz. \end{aligned} \tag{41}$$

В приводимой ниже цепочке равенств, получаемой посредством многошагового интегрирования по частям первого уравнения системы (41), используются соотношения (33) и (41), уравнения (9)[2] и (10) [2], а также интегралы (43) [2]

$$\begin{aligned} &\chi_1^{(n+1)} = -\int_0^z x^{n+1}\Pi(a,x)\sin(z-x)\,dz =\\ &= \int_0^z\left[\sum_{k=0}^n a^k x^{n-k} - \frac{a^{n+1}}{a-x}\right]\sin(z-x)\,dx + \int_0^z x^{n+1}\Pi''(a,x)\sin(z-x)\,dz =\\ &= \sum_{k=0}^n a^k\int_0^z x^{n-k}\sin(z-x)\,dx - a^{n+1}\Pi(a,z) + \underbrace{x^{n+1}\Pi'(a,z)\sin(z-x)\Big|_0^z}_{\equiv 0} -\\ &-\int_0^z \Pi'(a,x)[x^{n+1}\sin(z-x)]'\,dx =\\ &= a^{n+1}\sum_{k=0}^n y^{k+1}\tilde{g}_{2,1}^{(k)} - a^{n+1}\Pi(a,z) - \Pi(a,x)[x^{n+1}\sin(z-x)]'\Big|_0^z +\\ &+\int_0^z \Pi(a,x)[x^{n+1}\sin(z-x)]''\,dx =\\ &= a^{n+1}\sum_{k=0}^n y^{k+1}\tilde{g}_{2,1}^{(k)} - (a^{n+1}-z^{n+1})\Pi(a,z) +\\ &+\underbrace{n(n+1)\int_0^z x^{n-1}\Pi(a,x)\sin(z-x)\,dx}_{\equiv 0 \text{ при } n=0} + 2(n+1)\chi_1'^{(n)} + \chi_1^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Сокращая в крайних выражениях этой цепочки величину $\chi_1^{(n+1)}$, получим рекуррентное уравнение для определения коэффициентов $\chi_1^{(n)}$ и соответствующих начальных условий. Проделывая те же манипуляции с выражением $\chi_1'^{(n)} = -\int_0^z x^n\Pi(a,x)\cos(z-x)\,dz$, получим аналогичные рекуррентные уравнения для нахождения величин $\chi_1'^{(n)}$. В результате выпишем искомые рекуррентные соотношения[1]

$$\begin{cases} \chi_1^{(n)} = -\dfrac{n}{2}\chi_1'^{(n-1)} + \dfrac{z^{n+1}}{2(n+1)}\Pi'(a,z) - \dfrac{z^n}{2}\Pi(a,z) - \mathrm{J}'^{(n)}(a,z);\\ \chi_1'^{(n)} = \dfrac{n}{2}\chi_1^{(n-1)} - \dfrac{z^{n+1}}{2(n+1)}\Pi(a,z) + \mathrm{J}^{(n)}(a,z), \end{cases} \tag{42}$$

для которых будут справедливы граничные условия

$$\begin{aligned} &\chi_1^{(0)} = \frac{z}{2}\Pi'(a,z) - \frac{1}{2}\Pi(a,z) - \mathrm{J}'^{(0)}(a,z);\\ &\chi_1'^{(0)} = -\frac{z}{2}\Pi(a,z) + \mathrm{J}^{(0)}(a,z), \end{aligned} \tag{43}$$

где функции $\mathrm{J}^{(n)}$ и $\mathrm{J}'^{(n)}$ для любого $n \geq 0$ удовлетворяют равенствам

---

[1]Решение рекуррентной системы уравнений (42) с краевыми условиями (43) может быть получено по стандартной схеме (26) –(27) [2]. После некоторых преобразований напишем

$$\begin{cases} \chi_1^{(n)} = -\dfrac{n!}{2^{n+1}}\cos\dfrac{n\pi}{2}\Pi(a,z) - \dfrac{n!}{2^{n+2}}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2z)^k}{k!}\left[\Pi(a,z)\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2} + \Pi'(a,z)\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2}\right] - \dfrac{n!}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^k}{k!}\left[\mathrm{J}^{(k)}(a,z)\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2} + \mathrm{J}'^{(k)}(a,z)\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2}\right];\\ \chi_1'^{(n)} = -\left(\dfrac{n!}{2^{n+1}}\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right)\Pi(a,z) + \dfrac{n!}{2^{n+2}}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2z)^k}{k!}\left[\Pi'(a,z)\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2} - \Pi(a,z)\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2}\right] + \dfrac{n!}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^k}{k!}\left[\mathrm{J}^{(k)}(a,z)\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2} - \mathrm{J}'^{(k)}(a,z)\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2}\right] \end{cases}$$

или без использования функций $\mathrm{J}^{(n)}(a,z)$,

$$\begin{cases} \chi_1^{(n)} = -\dfrac{n!}{2^{n+1}}\cos\dfrac{n\pi}{2}\Pi(a,z) + \dfrac{n!}{2^{n+2}}[\Pi'(a,z)\hat{\Psi}_1(a,z) - \Pi(a,z)\hat{\Psi}_2(a,z)] + \dfrac{n!}{2^{n+2}}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2a)^k}{k!}\left[\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\tilde{g}_{2,1}^{(i)}(z)y^{i+1} - \sin\dfrac{(n-k)\pi}{2}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\tilde{g}_{1,1}^{(i)}(z)y^{i+1}\right];\\ \chi_1'^{(n)} = -\left(\dfrac{n!}{2^{n+1}}\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right)\Pi(a,z) - \dfrac{n!}{2^{n+2}}[\Pi(a,z)\hat{\Psi}_2(a,z) + \Pi'(a,z)\hat{\Psi}_1(a,z)] + \dfrac{n!}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2a)^k}{k!}\left[\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\tilde{g}_{1,1}^{(i)}(z)y^{i+1} + \sin\dfrac{(n-k)\pi}{2}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\tilde{g}_{2,1}^{(i)}(z)y^{i+1}\right], \end{cases}$$

где через $\hat{\Psi}_1(a,z)$ и $\hat{\Psi}_2(a,z)$ обозначены суммы $\hat{\Psi}_1(a,z) = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2a)^k - (2z)^k}{k!}\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2}$, $\quad \hat{\Psi}_2(a,z) = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(2a)^k + (2z)^k}{k!}\cos\dfrac{(n-k)\pi}{2}$.

$$\mathrm{J}^{(n)} = \frac{a^{n+1}}{2(n+1)}\left[\Pi(a,z) - \sum_{k=0}^{n}\tilde{g}_{2,1}^{(k)}(z)y^{k+1}\right];$$
$$\mathrm{J}'^{(n)} = \frac{a^{n+1}}{2(n+1)}\left[\Pi'(a,z) - \sum_{k=0}^{n}\tilde{g}_{1,1}^{(k)}(z)y^{k+1}\right]. \qquad (44)$$

Определение функций $\tilde{g}_{1,1}^{(k)}(z)$ и $\tilde{g}_{2,1}^{(k)}(z)$ дано в работе [2] (37), а величина $y$ известна из определения (35).

В соответствии с (40) и (38) компоненты первого приближения удовлетворяют уравнению

$$\chi_1''^{(n)} + \chi_1^{(n)} + z^n\Pi(a,z) = 0. \qquad (45)$$

Доказательство второго уравнения (44), а именно, что

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\tilde{g}_{2,1}^{(k)}(z)y^{k+1}\right]' = \sum_{k=0}^{n}\tilde{g}_{1,1}^{(k)}(z)y^{k+1} \quad \left[\sum_{k=0}^{n}\tilde{g}_{1,1}^{(k)}(z)y^{k+1}\right]' =$$
$$= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}y^k - \sum_{k=0}^{n}\tilde{g}_{2,1}^{(k)}y^{k+1} \qquad (46)$$

производится посредством прямого дифференцирования функции $\mathrm{J}^{(n)}$ с использованием частного вида производных (50) [2]

$$\tilde{g}_{1,1}'^{(n)}(z) = \tilde{g}_{2,1}^{(n+1)}(z) - \tilde{g}_{2,1}^{(n)}(z); \quad \tilde{g}_{2,1}'^{(n)}(z) = \tilde{g}_{1,1}^{(n)}(z) - \tilde{g}_{1,1}^{(n+1)}(z)$$

и частного вида уравнений (41)[2]

$$z\tilde{g}_{1,1}^{(n+1)}(z) = (n+1)\tilde{g}_{2,1}^{(n)}(z); \quad z\tilde{g}_{2,1}^{(n+1)}(z) = 1-(n+1)\tilde{g}_{1,1}^{(n)}(z).$$

Последующее дифференцирование $\mathrm{J}'^{(n)}$, то есть второго уравнения (44), с учётом свойств (9)[2] функции $\Pi(a,z)$ позволяет получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\mathrm{J}^{(n)}(a,z)$

$$\mathrm{J}''^{(n)} + \mathrm{J}^{(n)} = \frac{a^{n+1}}{2(n+1)}\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}y^k\right). \qquad (47)$$

Поиск коэффициентов (36) для любого другого, более высокого порядка приближения по высоте сферического слоя, может производиться с использованием рекуррентных уравнений (24) [2]

$$\begin{cases} \chi_{p+1}^{(i_1,\dots,i_{p+1})} = -\dfrac{i_{p+1}}{2}\chi_{p+1}'^{(i_1,\dots,i_p,i_{p+1}-1)} - \\ -\dfrac{\chi_p'^{(i_1,\dots,i_{p-1},i_p+i_{p+1}+1)} - z^{i_{p+1}+1}\chi_p'^{(i_1,\dots,i_p)}}{2(i_{p+1}+1)} - \dfrac{z^{i_{p+1}}}{2}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}; \\ \chi_{p+1}'^{(i_1,\dots,i_{p+1})} = \dfrac{i_{p+1}}{2}\chi_{p+1}^{(i_1,\dots,i_p,i_{p+1}-1)} + \dfrac{\chi_p^{(i_1,\dots,i_{p-1},i_p+i_{p+1}+1)} - z^{i_{p+1}+1}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}}{2(i_{p+1}+1)} \end{cases} \qquad (48)$$

с граничными условиями (25) [2]

$$\chi_{p+1}^{(i_1,\dots,i_p,0)} = -\frac{\chi_p'^{(i_1,\dots,i_{p-1},i_p+1)} - z\cdot\chi_p'^{(i_1,\dots,i_p)}}{2} - \frac{1}{2}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)};$$
$$\chi_{p+1}'^{(i_1,\dots,i_p,0)} = \frac{\chi_p^{(i_1,\dots,i_{p-1},i_p+1)} - z\cdot\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)}}{2}. \qquad (49)$$

В частности, для расчета второго приближения по высоте сферического слоя возможно использование уравнений (48) и (49) в следующей записи:

$$\begin{cases} \chi_2^{(n,p)} = -\dfrac{p}{2}\chi_2'^{(n,p-1)} - \dfrac{\chi_1'^{(n+p+1)} - z^{p+1}\chi_1'^{(n)}}{2(p+1)} - \dfrac{z^p}{2}\chi_1^{(n)}; \\ \chi_2'^{(n,p)} = \dfrac{p}{2}\chi_2^{(n,p-1)} + \dfrac{\chi_1^{(n+p+1)} - z^{p+1}\chi_1^{(n)}}{2(p+1)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_2^{(n,0)} = -\dfrac{\chi_1'^{(n+1)} - z\cdot\chi_1'^{(n)}}{2} - \dfrac{1}{2}\chi_1^{(n)}; \\ \chi_2'^{(n,0)} = \dfrac{\chi_1^{(n+1)} - z\cdot\chi_1^{(n)}}{2}. \end{cases} \qquad (50)$$

При проведении машинного моделирования рекуррентное вычисление функций $\tilde{g}_{1,1}^{(n)}(z)$ и $\tilde{g}_{1,2}^{(n)}(z)$ удобно производить с использованием уравнений (41)[2] в виде

$$z^{n+1}\tilde{g}_{1,1}^{(n)}(z) = n\cdot z^n\tilde{g}_{2,1}^{(n-1)}(z);$$
$$z^{n+1}\tilde{g}_{2,1}^{(n)}(z) = z^n - n\cdot z^n\tilde{g}_{1,1}^{(n-1)}(z). \qquad (51)$$

Одновременно для расчета функций $\mathrm{J}_1^{(n)}$ и $\mathrm{J}_2^{(n)}$ возможно использование рекуррентных уравнений, являющихся прямым следствием соотношений (44)

$$\mathrm{J}^{(n)} = \frac{an}{n+1}\mathrm{J}^{(n-1)} - \frac{z^{n+1}\tilde{g}_{2,1}^{(n)}(z)}{2(n+1)};$$
$$\mathrm{J}'^{(n)} = \frac{an}{n+1}\mathrm{J}'^{(n)} - \frac{z^{n+1}\tilde{g}_{1,1}^{(n)}(z)}{2(n+1)}. \qquad (52)$$

Граничные условия, которые можно использовать в практических расчетах компонент первого приближения, определяются уравнениями (43), а также равенствами

$$\begin{cases} z\tilde{g}_{1,1}^{(0)}(z) = \sin z; \quad z\tilde{g}_{2,1}^{(0)}(z) = 1-\cos z; \\ \mathrm{J}^{(0)}(a,z) = \dfrac{a}{2}\Pi(a,z) - \dfrac{1}{2}z\tilde{g}_{2,1}^{(0)}(z); \\ \mathrm{J}'^{(0)}(a,z) = \dfrac{a}{2}\Pi'(a,z) - \dfrac{1}{2}z\tilde{g}_{1,1}^{(0)}(z). \end{cases} \qquad (53)$$

Граничные условия для расчета последующих приближений полностью определяются второй системой уравнений (30). После расчета компонент всех требуемых приближений решение неоднородного уравнения (1)[2] представимо в виде

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}^{(1)}(z) = \tilde{u}\chi(a,z)\cdot\vec{\boldsymbol{\delta}}; \quad \vec{\boldsymbol{\rho}}'^{(1)}(z) = \tilde{u}\chi'(a,z)\cdot\vec{\boldsymbol{\delta}}, \qquad (54)$$

в котором функции $\chi(a,z)$ и их производные удовлетворяют уравнениям

$$\chi(a,z) = \Pi(a,z) + \sum_{p=1}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1},\dots,\tilde{a}_{i_p}\chi_p^{(i_1,\dots,i_p)};$$
$$\chi'(a,z) = \Pi'(a,z) + \sum_{p=1}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}\tilde{a}_{i_1},\dots,\tilde{a}_{i_p}\chi_p'^{(i_1,\dots,i_p)}. \qquad (55)$$

Приведем типовой пример алгоритма расчета компонент первого и второго приближений решения неоднородного уравнения по высоте сферического слоя.

### 4. Вычисление функций $\Pi(a,z)$ и $\Pi'(a,z)$

Если в библиотеке программиста отсутствуют готовые процедуры расчета интегральных синусов и косинусов, то расчёт функций $\Pi(a,z)$ и $\Pi'(a,z)$ может производиться посредством прямого суммирования рядов (34) с использованием соответствующих рекуррентных уравнений, являющихся следствием определения (48)[2].

1. Находим граничные условия

$$\Delta_1^{(0)}(a) = \cos a - 1; \quad \Delta_2^{(0)}(a) = \sin a,$$

считаем $y = z/a$ и начальные приближения для функций $\Pi(a,z)$ и $\Pi'(a,z)$

$$\Pi(a,z)^{(0)} = y[\Delta_2^{(0)}(a)\cos z - \Delta_1^{(0)}(a)\sin z] - \sin(a-z)\ln\frac{1}{1-y};$$

$$\Pi'(a,z)^{(0)} = \cos(a-z)\ln\frac{1}{1-y} - y[\Delta_1^{(0)}(a)\cos z + \Delta_2^{(0)}(a)\sin z].$$

2. Последовательно вычисляем

$$\Delta_1^{(k)}(a) = \Delta_1^{(k-1)}(a) - \frac{a^k}{k!}\cos\frac{k\pi}{2};$$

$$\Delta_2^{(k)}(a) = \Delta_2^{(k-1)}(a) - \frac{a^k}{k!}\sin\frac{k\pi}{2};$$

$$D_1 = \frac{y^{k+1}}{k+1}[\Delta_2^{(k)}(a)\cos z - \Delta_1^{(k)}(a)\sin z];$$

$$D_2 = \frac{y^{n+1}}{n+1}[\Delta_1^{(k)}(a)\cos z + \Delta_2^{(k)}(a)\sin z].$$

Включая очередное приближение для функций $\Pi(a,z)$ и $\Pi'(a,z)$

$$\Pi(a,z)^{(k)} = \Pi(a,z)^{(k-1)} + D_1;$$

$$\Pi'(a,z)^{(k)} = \Pi'(a,z)^{(k-1)} - D_2.$$

3. Вычисления производятся до тех пор, пока есть смысл учитывать величину $|D_1| + |D_2|$.

## 5. Вычисление функций $\chi_1^{(m)}$, $\chi_1'^{(m)}$, $\chi_2^{(m,p)}$ и $\chi_2'^{(m,p)}$

Пусть, как и ранее, величина $n$, $1 \le n \le 5$, обозначает количество членов разложения в представлении (9)[1]. Размещаем в памяти массивы $\chi_1^{(m)}$ и $\chi_1'^{(m)}$ длиной $n$+1 по значению индекса $m$, а также двухмерные массивы $\chi_2^{(m,p)}$ и $\chi_2'^{(m,p)}$ длиной $n$+1 по каждому измерению. Итого не более 84 чисел.

1. Предварительно обнуляя выделенные массивы, вычисляем граничные условия (43)

$$\mathrm{J}^{(0)} = \frac{1}{2}[a\Pi(a,z) - z\tilde{g}_{2,1}^{(0)}(z)]; \quad \mathrm{J}'^{(0)} = \frac{1}{2}[a\Pi'(a,z) - z\tilde{g}_{1,1}^{(0)}(z)];$$

$$\chi_1^{(0)} = \frac{z}{2}\Pi'(a,z) - \frac{1}{2}\Pi(a,z) - \mathrm{J}'^{(0)}(a,z);$$

$$\chi_1'^{(0)} = -\frac{z}{2}\Pi(a,z) + \mathrm{J}^{(0)}(a,z).$$

2. Определяемся по количеству используемых приближений по высоте сферического слоя. Если дополнительно к нулевому приближению используется только первое приближение, то полагаем $n_f = n$, иначе $n_f = 2n+1$.

3. Для всех $m$ от единицы до $n_f$ в соответствии с уравнениями (36), (43), (51) и (52) вычисляем компоненты первого приближения

$$z^{m+1}\tilde{g}_{1,1}^{(m)}(z) = m\cdot[z^m\tilde{g}_{2,1}^{(m-1)}(z)];$$

$$z^{m+1}\tilde{g}_{2,1}^{(m)}(z) = z^m - m\cdot[z^m\tilde{g}_{1,1}^{(m-1)}(z)];$$

$$\mathrm{J}^{(m)} = \frac{am}{m+1}\mathrm{J}^{(m-1)} - \frac{1}{2(m+1)}[z^{m+1}\tilde{g}_{2,1}^{(m)}(z)];$$

$$\mathrm{J}'^{(m)} = \frac{am}{m+1}\mathrm{J}'^{(m)} - \frac{1}{2(m+1)}[z^{m+1}\tilde{g}_{1,1}^{(m)}(z)];$$

$$\chi_1^{(m)} = -\frac{m}{2}\chi_1'^{(m-1)} + \frac{z^{m+1}}{2(m+1)}\Pi'(a,z) - \frac{z^m}{2}\Pi(a,z) - \mathrm{J}'^{(m)}(a,z);$$

$$\chi_1'^{(m)} = \frac{m}{2}\chi_1^{(m-1)} - \frac{z^{m+1}}{2(m+1)}\Pi(a,z) + \mathrm{J}^{(m)}(a,z).$$

4. Если дополнительно к нулевому приближению используется только первое приближение, то дальнейшие вычисления не производятся (*как правило, первого приближения достаточно*).

5. Вычисляем граничные условия для уравнений (50)

$$\chi_2^{(0,0)} = -\frac{\chi_1'^{(1)} - z\cdot\chi_1'^{(0)}}{2} - \frac{1}{2}\chi_1^{(0)}; \quad \chi_2'^{(0,0)} = \frac{\chi_1^{(1)} - z\cdot\chi_1^{(0)}}{2}.$$

6. Для всех $m$ от единицы до $n$ в соответствии с уравнениями (50) вычисляем:

• граничные компоненты второго приближения

$$\chi_2^{(m,0)} = -\frac{\chi_1'^{(m+1)} - z\cdot\chi_1'^{(m)}}{2} - \frac{1}{2}\chi_1^{(m)}; \quad \chi_2'^{(m,0)} = \frac{\chi_1^{(m+1)} - z\cdot\chi_1^{(m)}}{2}.$$

• для всех $p$ от единицы до $n$ в соответствии с уравнениями (50) вычисляем полный набор компонент второго приближения

$$\chi_2^{(m,p)} = -\frac{p}{2}\chi_2'^{(m,p-1)} - \frac{\chi_1'^{(m+p+1)} - z^{p+1}\chi_1'^{(m)}}{2(p+1)} - \frac{z^p}{2}\chi_1^{(m)};$$

$$\chi_2'^{(m,p)} = \frac{p}{2}\chi_2^{(m,p-1)} + \frac{\chi_1^{(m+p+1)} - z^{p+1}\chi_1^{(m)}}{2(p+1)}.$$

Таким образом, получены рекуррентные соотношения, необходимые в процессе имитационного моделирования управляемого движения рассматриваемых типов КО, определены краевые условия и предоставлена последовательность практических вычислений.

*Литература:*

*1 Алферьев В.Л. Использование сферически-однородного поля для моделирования управляемого движения космических объектов. Постановка задачи. // Двойные технологии, № 4, 2012, С. 2-9.*

*2. Алферьев В.Л. Свойства траекторий управляемого движения в сферически-однородном поле. // Двойные технологии, № 1, 2013, С. 2-7.*

Материал поступил в редакцию 29. 11. 2012 г.