УДК 62-192: 519.248 + 629.7.017.1

© Лукин В. Л., Сухорученков Б. И.
Lukin V. , Sukhoruchenkov B.

СПОСОБ ОЦЕНИВАНИЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

METHOD OF EVALUATION OF FAULTLESSNESS OF DIFFICULT TECHNICAL SYSTEMS ON RESULTS TESTS OF ELEMENTS

Аннотация. *Излагается новый способ оценивания вероятности безотказной работы (ВБР) сложных технических систем (СТС) с элементами одноразового срабатывания и непрерывного функционирования по результатам испытаний элементов на надежность. Приводятся зависимости для определения эквивалентного числа испытаний и отказов СТС. Способ основан на построении плотности вероятности оценок ВБР по методу несмещенных оценок [3, 7].*

Annotation. *The new method of evaluation of probability of faultless work (ВБР) of the difficult technical systems (DTS) is expounded with the elements of non-permanent wearing-out and continuous functioning on results the reliability tests of elements. The dependences for determining the equivalent number of trials and failures DTS. A method is based on the construction of closeness of probability of estimations of ВБР on the method of the undisplaced estimations [3, 7].*

Ключевые слова. *Структурная схема надежности, элемент одноразового срабатывания, элемент непрерывного функционирования, вероятность безотказной работы, оценка, бета-распределение.*

Key words. *Flow diagram of reliability, element of non-permanent wearing-out, element of the continuous functioning, probability of faultless work, estimation, beta distribution.*

1. Постановка задачи

Рассматривается сложная техническая система (СТС), которая состоит из элементов одноразового срабатывания (ЭОС) и элементов непрерывного функционирования (ЭНФ). Для СТС заданы требования по безотказности в течение периода целевого функционирования. Для подтверждения этих требований проводятся автономные испытания (АИ) элементов и полномасштабные испытания СТС на надежность. В некоторых случаях проведение полномасштабных испытаний СТС невозможно, например, для ядерных боеприпасов, для уникальных ракетно-космических систем и др. В этом случае единственным способом достоверного контроля надежности СТС является оценивание показателей безотказности по результатам испытаний элементов на основе структурной схемы надежности (ССН). Решение этой задачи необходимо также для обоснования решения о переходе к полномасштабным испытаниям СТС.

Рассмотрим СТС, которая состоит из J_1 ЭОС и J_2 ЭНФ и имеет известную ССН. Предполагается, что проведены независимые АИ элементов и получены следующие результаты:

Лукин Владимир Леонидович – доктор технических наук, профессор, академик-секретарь секции "Инженерные проблемы стабильности и конверсии" Российской инженерной академии, тел. 8-(495)543-36-77;
Сухорученков Борис Иванович – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской инженерной академии, профессор кафедры ракетного вооружения Военной академии РВСН имени Петра Великого, тел. 8-(495)696-06-48.

Lukin Vladimir – doctor of engineerings sciences, professor, akademik-sekretar' sections the "Engineerings problems of stability and conversion" of the Russian engineering academy, tel. 8-(495)543-36-77;
Sukhoruchenkov Boris – doctor of engineerings sciences, professor, corresponding member of the Russian engineering academy, professor of department of rocket armament of the Military academy of RVSN of the name of Peter Great, tel. 8-(495)696-06-48.

• для каждого j-го ЭОС, $j = 1,...,J_1$, при испытаниях n_j образцов зафиксировано m_j случайных отказов;

• для каждого ν-го ЭНФ, $\nu = 1,...,J_2$, при испытаниях N_ν образцов в течение периодов $T_{\nu i}$ без замены отказавших образцов зафиксированы времена отказов некоторых образцов $t_{\nu i} < T_{\nu i}$, $i = 0, 1,..., m_\nu$, и безотказная работа других образцов в течение периодов $T_{\nu i}$, $i = m_\nu+1,..., N_\nu$.

Для СТС определен период целевого функционирования $\tau_{цф}$, при этом каждый ν-й ЭНФ должен работать в течение периода $\tau_{ф\nu} \le \tau_{цф}$.

Необходимо оценить вероятность безотказной работы (ВБР) СТС в течение периода $\tau_{цф}$ на основе полученных результатов испытаний элементов.

2. Принятые допущения

Для решения задачи примем следующие допущения.

Структурная схема надежности СТС имеет цепочки без резервирования (с последовательным соединением элементов) и цепочки с резервированием (с параллельным соединением элементов).

Безотказность j-х ЭОС характеризуется вероятностью безотказного срабатывания (ВБС) P_j, а безотказность ν-х ЭНФ – вероятностью безотказной работы (ВБР) P_ν в течение периода работы СТС. Для удобства ВБС и ВБР иногда будем называть ВБР без указания периода функционирования.

На основе ССН можно получить зависимость ВБР СТС в течение периода $\tau_{цф}$ от ВБР элементов P_j и P_ν в общем виде

$$P_{\text{С}} = \Phi(\{P_j\},\{P_{\text{N}}\}). \tag{1}$$

ЭНФ имеют постоянную интенсивность отказов (ИО) $\Lambda_\nu = \text{const}$, $\nu = 1,...,J_2$, так что ВБР ν-го ЭНФ в течение периода $\tau_{ф\nu}$ определяется по зависимости

$$P_\nu(\tau_{ф\nu}) = e^{-\Lambda_\nu \tau_{ф\nu}}. \tag{2}$$

Условия автономных испытаний элементов идентичны условиям полномасштабных испытаний СТС.

Оценки ВБР СТС, как и оценки ВБР элементов, имеют бета-распределение, что подтверждается в п. 9.3.

3. Классические методы оценивания ВБР СТС

Оценивание ВБР СТС производится на основе ССН, точечных оценок ВБР элементов $\{\bar{P}_j\},\{\bar{P}_\nu\}$ и их дисперсий $\{\sigma^2_{\bar{P}_j}\},\{\sigma^2_{\bar{P}_\nu}\}$, получаемых по результатам АИ. Для упрощения записей для всех элементов введем новые сквозные номера $j = 1,...,J = J_1 + J_2$. С учетом этого точечная оценка ВБР СТС и ее дисперсия определяются по зависимости (1) приближенно на основе метода линеаризации [2, 5]:

$$\bar{P}_{\text{С}} = \Phi(\{\bar{P}_j\}); \quad \sigma^2_{\bar{P}_{\text{С}}} = \sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\partial\Phi(\{P_j\})}{\partial P_j}\right)^2_{P_j=\bar{P}_j}\sigma^2_{\bar{P}_j}. \tag{3}$$

При последовательной ССН точечная оценка ВБР СТС и ее дисперсия определяются по формулам [2]

$$\bar{P}_{\text{С}} = \prod_{j=1}^{J}\bar{P}_j; \quad \sigma^2_{\bar{P}_{\text{С}}} = \bar{P}_{\text{С}}^2\sum_{j=1}^{J}\frac{\sigma^2_{\bar{P}_j}}{\bar{P}_j^2}. \tag{4}$$

При параллельной ССН ВБР СТС оценивается по зависимостям

$$\bar{P}_{\text{С}} = 1-\prod_{j=1}^{J}(1-\bar{P}_j); \quad \sigma^2_{\bar{P}_{\text{С}}} = (1-\bar{P}_{\text{С}})^2\sum_{j=1}^{J}\frac{\sigma^2_{\bar{P}_j}}{(1-\bar{P}_j)^2}. \tag{5}$$

Нижняя доверительная граница $P_{\text{СН}}$ для ВБР СТС при заданной доверительной вероятности γ оценивается на основе допущения о нормальном распределении оценок ВБР по приближенной зависимости [2]:

$$\bar{P}_{\text{СН}} = \bar{P}_{\text{С}} - u_\gamma\,\sigma_{\bar{P}_{\text{С}}}, \tag{6}$$

где u_γ – квантиль нормального распределения при значении γ.

В работе [5] приводятся и другие зависимости для оценивания ВБР СТС по результатам испытаний элементов. Для этого необходимо иметь оценки ВБР элементов, методы определения которых рассматриваются далее.

4. Оценивание вероятности безотказного срабатывания ЭОС

4.1. Классические методы оценивания ВБС

Для точечного оценивания ВБС ЭОС используется классический метод максимального правдоподобия (ММП) [1, 2, 6]. Для упрощения зависимостей рассмотрим ЭОС без указания его номера. Точечные оценки ВБС P и несмещенные оценки их дисперсий при результатах испытаний, приведенных в п. 1, в соответствии с ММП определяются по зависимостям:

$$\bar{P} = \frac{n-m}{n}; \quad \sigma^2_{\bar{P}} = \frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n-1}. \tag{7}$$

Интервальное оценивание ММП не предусматривает. Такие оценки ВБР определяются на основе биномиального или нормального распределения [2, 5].

Заметим, что по зависимостям (7) получаются смещенные оценки ВБС [3], а при безотказных испытаниях (при $m = 0$) – некорректные оценки ВБС $\bar{P} = 1, \quad \sigma_{\bar{P}} = 0$.

4.2. Оценивание ВБС по методу несмещенных оценок

Рассмотрим ЭОС без указания его номера. Как показано в работах [3, 7], наиболее точные оценки показателей безотказности по результатам испытаний получаются по методу несмещенных оценок (МНО). Для этого по результатам испытаний ЭОС n и m строится плотность вероятности (ПВ) $f(p)$ возможных оценок ВБС P по зависимости [3, 7]

$$f(p)=(n+1)\,C_n^m\, p^{(n-m)}\,(1-p)^m,\quad m=0,1,\ldots,n,\qquad (8)$$

где C_n^m – число сочетаний из n по m.

ПВ (8) является частным случаем бета-распределения и ее можно представить в виде

$$f(p)=\left[\mathrm{B}(\alpha,\beta)\right]^{-1} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1},\quad \alpha>1,\ \beta\geq 1,\qquad (9)$$

где $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ – бета-функция; α, β – параметры бета-распределения

$$\alpha=n-m+1,\ \beta=m+1.\qquad (10)$$

На основе ПВ (8) или (9) можно определить несмещенные точечные и интервальные оценки ВБС элементов. Точечные оценки ВБС и их дисперсии вычисляются как первые и вторые центральные моменты распределения по зависимостям [3, 7]:

$$\overline{P}=\int_0^1 p\,f(p)\,dp=\frac{n+1-m}{n+2}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta};\qquad (11)$$

$$\sigma_{\overline{P}}^2=\int_0^1 (p-\overline{P})^2 f(p)\,dp=\frac{(m+1)(n+1-m)}{(n+2)^2(n+3)}=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.\qquad (12)$$

Оценка нижней доверительной границы для ВБР P_H при заданной доверительной вероятности γ определяется из соотношения

$$\int_0^{\overline{P}_\text{Н}} f(p)\,dp=1-\gamma.\qquad (13)$$

При безотказных испытаниях (при m=0) на основе (13) получается конечная зависимость для оценки значения P_H

$$\overline{P}_\text{Н}=(1-\gamma)^{1/(n+1)}=(1-\gamma)^{1/\alpha}.\qquad (14)$$

Заметим, что зависимости для оценок ВБС (11)–(14) отличаются от классических [1, 2, 5] и имеют более высокую точность.

5. Оценивание вероятности безотказной работы ЭНФ

5.1. *Классические методы оценивания ВБР ЭНФ*

Рассмотрим ЭНФ без указания его номера. ВБР ЭНФ в течение заданного периода τ при постоянной ИО Λ определяется по зависимости (2). Если ИО неизвестна, она оценивается на основе методов, изложенных в ГОСТ [4]. При результатах испытаний ЭНФ, приведенных в п. 1, точечная оценка ИО определяется по зависимости

$$\overline{\Lambda}=m/S,\qquad (15)$$

где S – суммарное время работы образцов

$$S=\sum_{i=1}^{m} t_i+\sum_{i=m+1}^{N} T_i.\qquad (16)$$

Оценивание дисперсий точечных оценок ИО ГОСТ [4] не предусматривает. Если использовать ММП [2], то зависимость для точечных оценок ИО совпадает с (15), а для дисперсии оценок получается следующая формула:

$$\sigma_{\overline{\Lambda}}^2=m/S^2.\qquad (17)$$

Заметим, что при безотказных испытаниях (при m=0) по зависимостям (15) и (17) получается некорректная оценка ИО $\overline{\Lambda}=0,\sigma_{\overline{\Lambda}}^2=0$.

Оценка ВБР ЭНФ в течение периода τ и ее дисперсия определяется по зависимости (2) при оценках ИО (15) и (17) на основе метода линеаризации

$$\overline{P}=\mathrm{e}^{-\overline{\Lambda}\tau};\quad \sigma_{\overline{P}}^2=\overline{P}^2\,\tau^2\,\sigma_{\overline{\Lambda}}^2.\qquad (18)$$

5.2. *Оценивание ВБР ЭНФ по методу несмещенных оценок*

Для корректного оценивания ВБР ЭНФ необходимо оценить ИО Λ. Наиболее точные оценки ИО получаются по МНО [3, 8]. В соответствии с МНО сначала строится ПВ оценок ИО Λ. При полученных результатах испытаний t_i, $i=1,\ldots,m$, и T_i, $i=m+1,\ldots,N$, (см. п. 1) ПВ возможных оценок ИО λ определяется по зависимости [3, 7]:

$$f_\Lambda(\lambda)=\frac{S^{m+1}}{m!}\lambda^m\exp(-\lambda S),\qquad (19)$$

где S определяется по формуле (16).

Возможная оценка ВБР ЭНФ в течение заданного периода τ определяется по зависимости (2) при оценке ИО λ

$$p=\varphi(\lambda)=\exp(-\lambda\tau).\qquad (20)$$

Для корректного оценивания ВБР ЭНФ построим ПВ оценок ВБР как функции от случайного аргумента по методике [6]. Для этого найдем обратную зависимость λ от p на основе (20)

$$\lambda=\psi(p)=-\tau^{-1}\ln p.\qquad (21)$$

Если ПВ $f_\Lambda(\lambda)$ оценок ИО λ известна и равна (19), то ПВ $f_p(p)$ оценок ВБР p определяется по зависимости [6]

$$f_\text{P}(p)=f_\Lambda[\psi(p)]\left|\frac{\partial\psi(p)}{\partial p}\right|.\qquad (22)$$

На основе (22) с учетом (19) и (21) получается следующая зависимость для ПВ оценок ВБР ЭНФ в течение периода τ

$$f_\text{P}(p)=\frac{S^{m+1}}{p\,\tau\,m!}\left[-\tau^{-1}\ln p\right]^m\ \exp\left[S\,\tau^{-1}\ln p\right].\qquad (23)$$

Эту зависимость после преобразований, опуская индекс у ПВ, можно представить в более простом виде – в виде бета-распределения:

$$f(p)=\left[\mathrm{B}(\alpha,\beta)\right]^{-1}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1},\qquad (24)$$

где параметры распределения определяются по зависимостям

$$\alpha = S \cdot \tau^{-1} - m + 1; \quad \beta = m + 1. \tag{25}$$

Совпадение зависимостей (23) и (24) с учетом (25) можно проверить прямыми вычислениями. Сравнение (25) с (10) показывает, что испытания ЭНФ на надежность эквивалентно испытаниям ЭОС при том же числе отказов и числе испытаний

$$n_{\text{энфэкв}} = S\,\tau^{-1}. \tag{26}$$

Точечная и интервальная оценки ВБР ЭНФ в течение периода τ определяются на основе ПВ (24), как и для ЭОС, по зависимостям (11)-(14) при параметрах распределения (25).

6. Оценивание ВБР технической системы с двумя элементами

Для корректного оценивания ВБР СТС необходимо построить ПВ оценок ВБР СТС как функции (1) от оценок ВБР элементов, определяемой на основе ССН. Известны аналитические методы определения ПВ функции от случайных аргументов [6], однако ввиду сложности зависимости (1) их не удается применить. ПВ оценок ВБР СТС можно построить численным методом, изложенным в работах [3, 7], на основе ПВ оценок ВБР элементов (8), (9) или (24) с учетом зависимости (1). Наиболее просто построение ПВ оценок ВБР производится для технических систем (ТС) с двумя элементами (при $J = 2$). Для этого задаются отрезки возможных значений ВБР 1-го и 2-го элементов: $P_1 \in [P_{1М}; 1]$, $P_2 \in [P_{2М}; 1]$. Отрезки разбиваются на R_1 и R_2 малых отрезков с центрами p_{1r}, $r = 1,..., R_1$, и p_{1k}, $k = 1,..., R_2$

$$\begin{aligned} p_{1r} &= P_{1М} + 0{,}5h_1 + h_1(r-1);\ \ h_1 = (1 - P_{1М})/R_1; \\ p_{2r} &= P_{2М} + 0{,}5h_2 + h_2(k-1);\ \ h_1 = (1 - P_{2М})/R_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Для каждого возможного сочетания значений p_{1r} и p_{2k} определяется вероятность попадания неизвестного значения ВБР элементов на локальные отрезки $\delta_{1r} = p_{1r} \pm 0{,}5h_1$ и $\delta_{2k} = p_{2k} \pm 0{,}5h_2$ с учетом ПВ оценок ВБР элементов $f_1(p_1)$ и $f_2(p_2)$:

$$\begin{aligned} B_{1r} &= \text{Вер}(P_1 \in \delta_{1r}) \approx f_1(p_{1r})\,h_1; \\ B_{2k} &= \text{Вер}(P_2 \in \delta_{2k}) \approx f_2(p_{2k})\,h_2. \end{aligned} \tag{28}$$

Путем перебора номеров r и k формируется матрица **P** возможных оценок ВБР ТС $p_c = \Phi(p_{1r}, p_{2k})$, которые определяются по соответствующей зависимости (1) при $J = 2$. Формируется также матрица **B** вероятностей нахождения ВБР ТС в локальных областях $\delta_{rk} = \delta_{1r} \times \delta_{2k}$:

$$\mathbf{P} = \{p_{crk}\} = \{\Phi(p_{1r}, p_{2k})\}; \ \ \mathbf{B} = \{B_{rk}\} = \{B_{1r} \times B_{2k}\}. \tag{29}$$

Диапазон возможных значений ВБР ТС $P_c - [P_{CM}; 1]$ разбивается на Q малых отрезков размером h с центрами $p_{cq} = P_{CH} + 0{,}5h + h(q-1)$, $q = 1,..., Q$, $h = (1 - P_{CM})/Q$. Для каждого номера q из матрицы **B** выбираются все значения вероятностей B_{rk}, которые попадают на отрезок $[p_{cq} - 0{,}5h; p_{cq} + 0{,}5h]$, и им присваивается номер B_{qrk}. Вычисляются вероятности попадания ВБР системы на локальные отрезки $p_{cq} \pm 0{,}5h$, а также плотность вероятности и функция распределения (ФР) оценок ВБР системы в дискретных точках

$$\begin{aligned} &B_q = \sum_{r=1}^{R_1}\sum_{k=1}^{R_2} B_{qrk}; \quad f_q(p_{\text{c}q}) = B_q / h; \\ &F_q(p_{\text{c}q}) = \sum_{q=1}^{q} B_q, \ \ \text{q} = 1,\ldots, \text{Q}. \end{aligned} \tag{30}$$

На основе значений ПВ $f_q(p_{cq})$ и ФР $F_q(p_{cq})$ можно определить точечную оценку ВБР ТС $\overline{P}_{\text{С}}$, ее дисперсию $\sigma^2_{\overline{P}_{\text{С}}}$ и нижнюю доверительную границу для ВБР $\overline{P}_{\text{СН}}$ при заданной доверительной вероятности γ по зависимостям:

$$\begin{aligned} &\overline{P}_{\text{С}} = \sum_{q=1}^{Q} p_{\text{c}q}\,B_q; \quad \sigma^2_{\overline{P}_{\text{С}}} = \sum_{q=1}^{Q}(p_{\text{c}q} - \overline{P}_{\text{С}})^2\,B_q; \\ &F_q(\overline{P}_{\text{СН}}) = 1 - \gamma. \end{aligned} \tag{31}$$

Непрерывная ПВ $f(p_c)$ или ФР $F(p_c)$ оценок ВБР ТС восстанавливается по значениям $f_q(p_{cq})$ или $F_q(p_{cq})$ на основе методов интерполяции и экстраполяции.

Зависимости (28)–(31) являются приближенными. Точность вычислений возрастает с увеличением числа отрезков R_1, R_2 *и* Q, которое ограничено только возможностями по оперативности вычислений на ЭВМ. Достаточная для практики точность вычислений достигается при значениях R_1, R_2 *и* Q в пределах 100–500. Для обеспечения точности и оперативности вычислений значения $P_{1М}$, $P_{2М}$, $P_{СМ}$ целесообразно выбирать ближе к 1, чтобы учитывать только возможные практически значимые ВБР $P > 0$.

7. Оценивание ВБР сложных технических систем

Оценивание ВБР СТС с числом элементов $J > 2$ можно произвести на основе методики п. 6. Для оценивания ВБР элементы СТС объединяются попарно в μ-е подгруппы, $\mu = 1,...,M$, по 2 соседних элемента в соответствии со ССН. При этом подгруппы имеют частные ССН с последовательным или параллельным соединением элементов. В последней подгруппе может оказаться всего один элемент. Для каждой подгруппы по методике п. 6 строится ПВ оценок ВБР $f_{\mu q}(p_q)$ в дискретных точках q=1,..., Q. Эти значения можно документировать и использовать для оценивания ВБР подгруппы и СТС. Для сокращения объема данных Q о ПВ $f_{\mu q}(p_q)$ ее можно аппроксимировать бета-распределением. Для аппроксимации используем метод наименьших квадратов, показателем качества которого является сумма квадратов уклонений значений $f_{\mu q}(p_q)$ от ПВ бета-распределения оценок ВБР

$$S(\alpha,\beta)=\sum_{q=1}^{Q}\left[f_{\mu q}(p_q)-f_{\text{БР}}(\alpha,\beta,p_q)\right]^2, \qquad (32)$$

где $f_{\text{БР}}(\alpha,\ \beta,\ p_q)$ – ПВ бета-распределения (9) в дискретных точках p_q.

Оценки $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ параметров бета-распределения μ-й подгруппы определяются из условия минимума показателя (32):

$$S(\bar{\alpha},\ \bar{\beta})=\min. \qquad (33)$$

Если число элементов $J > 3$, то из подгрупп формируются группы по две соседние подгруппы элементов в соответствии со ССН СТС. По методике п. 6 строятся ПВ оценок ВБР этих групп элементов при полученных оценках параметров бета-распределения (33). По изложенной выше методике оцениваются параметры бета-распределения оценок ВБР групп. Аналогичным образом наращиваются группы элементов и производится оценивание их ВБР, пока не останется одна группа, объединяющая все элементы СТС. В результате получаются ПВ оценок ВБР СТС в дискретных точках $f_{Cq}(p_{cq})$ и оценивается ВБР СТС по зависимостям (31). Можно также найти оценки $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ параметров бета-распределения оценок ВБР СТС по зависимостям (32)–(33). По этим оценкам строится ПВ оценок ВБР СТС $\bar{f}(p)$ в классе бета-распределения и определяются точечная оценка ВБР СТС P_C, ее дисперсия и нижняя доверительная граница для ВБР P_{CH} при заданной доверительной вероятности γ по зависимостям

$$\bar{f}(p)=\left[\mathrm{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})\right]^{-1}p^{\bar{\alpha}-1}(1-p)^{\bar{\beta}-1}; \qquad (34)$$

$$\bar{P}_{\text{C}}=\int_0^1 p\,\bar{f}(p)\,dp=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}; \qquad (35)$$

$$\sigma_{\bar{P}}^2=\int_0^1(p-\bar{P}_{\text{C}})^2\,\bar{f}(p)\,dp=\frac{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}}{(\bar{\alpha}+\bar{\beta})^2(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+1)}; \qquad (36)$$

$$\int_0^{\bar{P}_{\text{CH}}}\bar{f}(p)\,dp=1-\gamma. \qquad (37)$$

Оценка величины P_{CH} определяется из соотношения (37) численным способом.

Заметим, что ПВ оценок ВБР и оценки ВБР СТС не зависят от способа разбиения ССН СТС на подгруппы и их последовательности.

8. Определение эквивалентного числа испытаний и отказов СТС по результатам испытаний элементов

Обычно после АИ элементов проводятся полномасштабные испытания СТС, объем которых ограничен экономическими и временными возможностями. Для повышения точности оценивания ВБР СТС производится объединение информации о надежности СТС, полученной на различных этапах испытаний [5]. Для этого может использоваться ПВ оценок ВБР СТС, построенная по методике п. 7. При решении ряда задач объединение информации о надежности СТС по результатам АИ элементов и полномасштабных испытаний СТС производится на основе эквивалентного числа испытаний и отказов СТС, по информативности равнозначных совокупности АИ элементов (далее – эквивалентное число испытаний и отказов). В настоящее время такое число определяется приближенными методами на основе ССН СТС [5]. Точное значение эквивалентного числа испытаний и отказов вычисляется на основе ПВ оценок ВБР СТС, построенной по методике п. 7, и оценок параметров бета-распределения оценок ВБР с учетом (10):

$$m_{\text{экв}}=[\bar{\beta}-1]_{\text{ЦЧ}};\ \ n_{\text{экв}}=[\bar{\alpha}+\bar{\beta}-2]_{\text{ЦЧ}}, \qquad (38)$$

где ЦЧ – оператор выделения ближайшего целого числа.

Заметим, что ПВ оценок ВБР (30), (34), оценки бета-распределения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ и эквивалентное число испытаний и отказов (38) равноценны по информативности о надежности СТС, так как связаны функциональными зависимостями.

9. Проверка работоспособности способа оценивания ВБР СТС

9.1. Условия решаемой задачи

Для проверки работоспособности и точности изложенного способа рассмотрим решение следующей задачи. СТС предназначена для целевого функционирования в течение периода $\tau_{\text{цф}}$=2. Она состоит из 5 элементов и имеет ССН, показанную на рис. 1. Элементы 1 и 3 относятся к ЭОС, остальные элементы являются ЭНФ и имеют постоянную ИО. Показатели надежности элементов неизвестны.

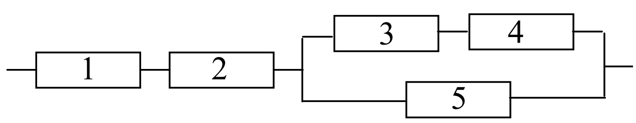

Рис. 1. Структурная схема надежности СТС

Проведены автономные испытания элементов на надежность. Результаты испытаний приведены в табл. 1.

Необходимо оценить ВБР СТС в течение периода $\tau_{\text{цф}}$ = 2 при доверительной вероятности γ = 0, 90 и определить эквивалентное число испытаний и отказов СТС.

Таблица 1

Результаты автономных испытаний элементов на надежность

Номера элементов j	1	2	3	4	5
Число испытанных образцов n или N	90	15	50	10	12
Число отказов m	0	1	2	3	4
Суммарная наработка ЭНФ S	-	150	-	100	70
Период работы в составе СТС τ	-	1,5	-	2	2
Эквивалентное число испытаний ЭНФ по зависимости (26)	-	100	-	50	35
Реализации оценок ВБР $\hat{P}_j$ по ММП или ГОСТ [4]	1	0,990	0,960	0,942	0,892
СКО оценок $\sigma_{\bar{P}_j}$ по ММП	0	0,0099	0,028	0,033	0,051
Реализации оценок ВБР $\hat{P}_j$ по МНО	0,989	0,980	0,941	0,919	0,865
СКО оценок $\sigma_{\bar{P}_j}$ по МНО	0,011	0,014	0,032	0,035	0,055

9.2. Оценивание ВБР СТС классическими методами

На основе результатов испытаний (табл. 1) можно оценить ВБР элементов по зависимостям (7) или (18) с учетом (15) и (17). Реализации оценок ВБР элементов и их среднеквадратические отклонения (СКО) приведены в табл. 1. На основе этих данных определяются оценки ВБР СТС и их СКО с учетом ССН (рис. 1) последовательно по зависимостям:

для группы из элементов 3 и 4 по зависимости (4):

$$\hat{P}_{3,4} = \hat{P}_3 \hat{P}_4 = 0,904; \quad \sigma_{\bar{P}_{3,4}} = \hat{P}_{3,4}\left(\frac{\sigma^2_{\bar{P}_3}}{\hat{P}_3^2} + \frac{\sigma^2_{\bar{P}_4}}{\hat{P}_4^2}\right)^{0,5} = 0,041; \quad (39)$$

для группы из элементов 3, 4 и 5 по зависимости (5) с учетом (39):

$$\hat{P}_{3,4,5} = 1 - (1 - \hat{P}_{3,4})(1 - \hat{P}_5) = 0,990; \quad (40)$$

$$\sigma_{\bar{P}_{3,4,5}} = (1 - \hat{P}_{3,4,5})\left(\frac{\sigma^2_{\bar{P}_{3,4}}}{(1 - \bar{P}_{3,4})^2} + \frac{\sigma^2_{\bar{P}_5}}{(1 - \bar{P}_5)^2}\right)^{0,5} = 0,0064; \quad (41)$$

для СТС с учетом ССН (рис. 1), оценок ВБР, приведенных в табл. 1, и оценок (40) и (41) по зависимостям (4):

$$\hat{P}_{\text{С}} = \hat{P}_1 \hat{P}_2 \hat{P}_{3,4,5} = 0,980; \quad (42)$$

$$\sigma_{\bar{P}_{\text{С}}} = \hat{P}_{\text{С}}\left(\frac{\sigma^2_{\bar{P}_1}}{\hat{P}_1^2} + \frac{\sigma^2_{\bar{P}_2}}{\hat{P}_2^2} + \frac{\sigma^2_{\bar{P}_{3,4,5}}}{\hat{P}_{3,4,5}^2}\right)^{0,5} = 0,0117. \quad (43)$$

Нижняя доверительная граница для ВБР СТС оценивается по зависимости (6) при доверительной вероятности $\gamma = 0,9$ и соответствующей квантили $u_\gamma = 1,281$:

$$\hat{P}_{\text{СН}} = \hat{P}_{\text{С}} - u_{\text{г}}\, \sigma_{\bar{P}_{\text{С}}} = 0,965. \quad (44)$$

9.3. Оценивание ВБР СТС изложенным способом

Для решения задачи на первом этапе выделим следующие подгруппы элементов с учетом ССН ТС: № I - элементы 1 и 2; № II - элементы 3 и 4. На втором этапе выделим группы № III - подгруппа II и элемент 5; № IV - группы I и III. Последняя группа охватывает все элементы и представляет собой собственно ТС со ССН, приведенной на рис.1.

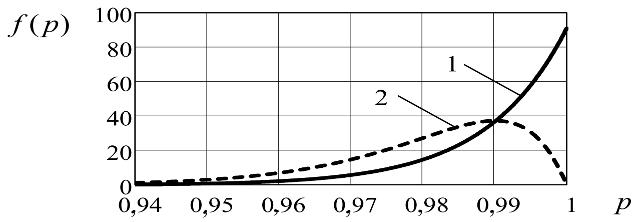

Рис. 2. Плотности вероятности оценок ВБР элементов 1 и 2

Проведение расчетов для подгруппы I. Подгруппа имеет ССН с последовательным соединением элементов. Поэтому зависимость ВБР подгруппы от ВБР элементов представляется в виде

$$P_I = P_1 P_2. \quad (45)$$

Проведем оценивание ВБР подгруппы I на основе результатов испытаний, приведенных в табл. 1. Плотности вероятности оценок ВБР элементов, полученные по зависимостям (9) и (24) с учетом (10) и (25), показаны на рис. 2.

Плотность вероятности оценок ВБР подгруппы построим по изложенному в п. 6 способу с учетом ПВ оценок ВБР элементов, показанных на рис. 2. Расчеты проводились в системе вычислений MathCAD при числе отрезков R_1 и R_2 в пределах от 200 до 400 и Q в пределах от 70 до 200. Значения границ ВБР приняты равными $P_{1\text{М}} = P_{2\text{М}} = 0,8$, $P_{\text{СМ}} = 0,9$. Заметим, что бета-функцию приходится вычислять по нескольким зависимостям с учетом возможностей системы MathCAD:

при $\alpha \leq 100 - 150$ на основе гамма-функции

$$\text{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}; \quad (46)$$

при $\alpha \geq 150$ на основе интеграла

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz. \qquad (47)$$

Для аппроксимации ПВ оценок ВБР подгруппы I построим функцию (32) в зависимости от параметров бета-распределения, которая показана на рис. 3 и 4.

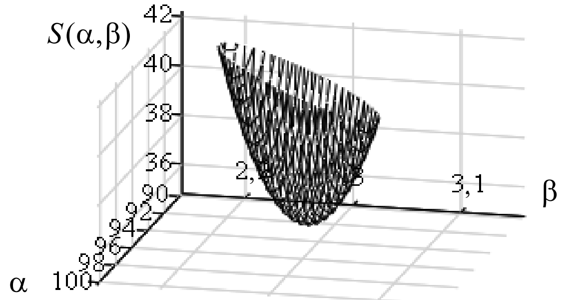

Рис. 3. Общий вид показателя S подгруппы I

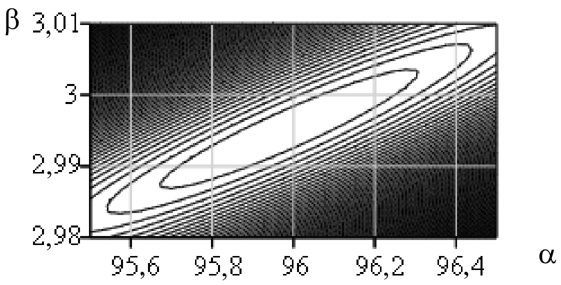

Рис. 4. Карта уровней показателя S подгруппы I

На основе функции S(α,β) вычисляются реализации точечных оценок параметров бета-распределения ВБР подгруппы по критерию (33): $\hat\alpha = 96,0$; $\hat\beta = 2,995$. ПВ бета-распределения оценок ВБР подгруппы I при этих параметрах показана на рис. 5. Здесь же точками показаны значения ПВ оценок ВБР, полученные по зависимости (30). Из рис. 5 видно, что бета-распределение хорошо аппроксимирует распределение оценок ВБР подгруппы с последовательным соединением элементов ЭОС и ЭНФ.

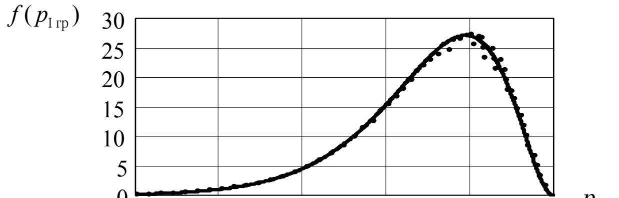

Рис. 5. Плотности вероятности оценок ВБР подгруппы I при $\alpha = 96$, $\beta = 3,0$

На основе построенной плотности определяются точечные и интервальные оценки ВБР подгруппы по зависимостям (35)-(37). В результате вычислений получаются следующие реализации точечной оценки ВБР, ее СКО и оценки нижней доверительной границы ВБР первой подгруппы при доверительной вероятности $\gamma = 0,90$, см. табл. 2: $\hat P_{\mathrm{I}} = 0,970$; $\sigma_{\hat P_{\mathrm{I}}} = 0,017$, $\hat P_{\mathrm{IН}} = 0,947$.

Проведение расчетов для групп II-IV. Элементы группы III имеют ССН с параллельным соединением подгруппы II и элемента 5. Поэтому зависимость ВБР группы от ВБР элементов представляется в виде

$$P_{\mathrm{III}} = 1 - (1-P_{\mathrm{II}})(1-P_5). \qquad (48)$$

Для других групп ССН имеет последовательное соединение элементов. Для них справедлива зависимость, аналогичная (45).

Оценивание ВБР групп проведем по изложенному выше способу при результатах испытаний элементов, приведенных в табл. 1, или при параметрах бета-распределения оценок ВБР подгрупп, полученных при вычислениях. Расчеты проводились в системе вычислений MathCAD аналогично методике для подгруппы I. Полученные реализации оценок параметров бета-распределения оценок ВБР для каждой группы приведены в табл. 2.

ПВ оценок ВБР группы IV, представляющей собственно СТС, показана на рис. 6. Здесь же точками показана ПВ оценок ВБР, полученная по зависимости (30). Из рис. 6 видно, что бета-распределение хорошо аппроксимирует распределение оценок ВБР СТС с различными элементами ЭОС и ЭНФ по результатам автономных испытаний элементов.

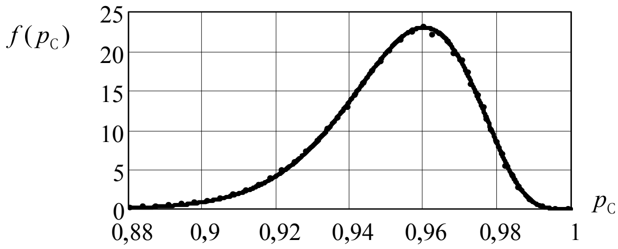

Рис. 6. Плотности вероятности оценок ВБР СТС при $\alpha = 126$, $\beta = 6,3$

На основе построенной ПВ оценок ВБР IV группы (рис.6), которая является собственно СТС, определяются реализация точечной оценки ВБР, ее СКО и нижняя доверительная граница для ВБР СТС при $\gamma = 0,90$ по зависимостям (35)-(37):

$$\hat P_{\mathrm{C}} = 0,953;\ \sigma_{\hat P_{\mathrm{CI}}} = 0,018,\ \hat P_{\mathrm{CН}} = 0,929. \qquad (49)$$

Сравнение полученных оценок с оценками (42)-(44) свидетельствует, что классические методы приводят к положительному смещению оценок ВБР СТС и занижению погрешностей точечных оценок ВБР.

Результаты вычислений показывают, что распределение оценок ВБР СТС хорошо описывается бета-распределением.

Таблица 2

Реализации оценок параметров бета-распределения оценок ВБР

№ группы	I	II	III	IV - СТС
$\hat{\alpha}$	96	45,6	194	126
$\hat{\beta}$	3,0	6,8	3,5	6,2
$\hat{P}$	0,970	0,869	0,983	0,953
$\sigma_{\overline{P}}$	0,017	0,045	0,009	0,018
$\hat{P}_{\text{Н}}$ при $\gamma = 0{,}90$	0,947	0,748	0,970	0,929

9.4. Определение эквивалентного числа испытаний и отказов СТС

На основе оценок параметров бета-распределения оценок ВБР СТС, приведенных в табл. 2, можно определить эквивалентное число испытаний и отказов СТС по зависимости (38):

$$n_{\text{экв}} = [\hat{\alpha} + \hat{\beta} - 2]_{\text{ЦЧ}} = 130; \quad m_{\text{экв}} = [\hat{\beta} - 1]_{\text{ЦЧ}} = 5. \qquad (50)$$

Следовательно, результаты АИ элементов, приведенные в табл. 1, по информативности эквивалентны полномасштабным испытаниям 130 образцов СТС при 5 отказах. На основе данных табл. 1 имеем среднее число испытаний элементов $n_{\text{ср}} = 65$ и суммарное число отказов элементов $m_{\Sigma} = 10$. Сравнение этих значений с (50) свидетельствует, что для резервированных СТС эквивалентное число испытаний СТС оказывается выше среднего числа АИ элементов, а эквивалентное число отказов СТС меньше суммарного числа отказов элементов. Отсюда следует вывод, что с точки зрения безотказности автономные испытания элементов могут быть эффективнее полномасштабных испытаний СТС.

Для СТС без резервирования (с последовательным соединением элементов ССН) этот феномен не наблюдается. Для подтверждения этого проведем оценивание ВБР СТС со ССН, включающей три последовательные цепочки только элементов 1 и 2, см. рис. 1 и табл.1. Среднее число испытаний элементов такой системы равно $n_{\text{ср}} = 95$, а суммарное число отказов равно $m_{\Sigma} = 3$. При оценивании ВБР такой системы изложенным методом получается следующее эквивалентное число испытаний и отказов: $n_{\text{экв}} = 99$, $m_{\text{экв}} = 8$. Отсюда следует, что хотя для систем без резервирования эквивалентное число испытаний может быть несколько выше среднего числа испытаний элементов, однако эквивалентное число отказов системы значительно выше суммарного числа отказов элементов.

Полученные в п. 9 результаты подтверждают работоспособность и точность изложенного способа оценивания ВБР сложных технических систем с различными элементами одноразового срабатывания и непрерывного функционирования по результатам автономных испытаний элементов.

Выводы

На основе проведенных исследований получены следующие результаты.

Изложены классические методы оценивания ВБР элементов одноразового срабатывания, непрерывного функционирования и систем с известной ССН по результатам испытаний элементов на безотказность (п. 3, 4.1, 5.1).

Приведены зависимости для построения плотности вероятности оценок ВБР элементов СТС и для точечного и интервального оценивания ВБР элементов одноразового срабатывания и непрерывного функционирования по методу несмещенных оценок на основе результатов испытаний их на надежность (п. 4.2, 5.2).

Обоснована методика построения плотности вероятности оценок ВБР системы с двумя элементами по результатам испытаний элементов (п. 6). На основе этой методики разработан способ построения плотности вероятности оценок ВБР СТС с произвольной ССН (п. 7). В результате вычислений показано, что плотность вероятности оценок ВБР СТС, построенная по результатам испытаний элементов, хорошо описывается в виде бета-распределения (п. 9.3). Изложена методика аппроксимации ПВ оценок ВБР СТС в дискретных точках, полученных численным способом, в классе бета-распределения (п. 7). Получены зависимости для точечного и интервального оценивания ВБР СТС по результатам испытаний элементов (п. 7), а также для определения эквивалентного числа полномасштабных испытаний и отказов СТС, соответствующих по информативности результатам совокупности автономных испытаний элементов (п. 8).

Работоспособность и точность разработанного способа по сравнению с классическими методами продемонстрирована на примере оценивания ВБР СТС с 5 элементами одноразового срабатывания и непрерывного функционирования при ССН с последовательным и параллельным соединением элементов (п. 9). Показано, что для резервированных СТС эквивалентное число полномасштабных испытаний выше среднего числа испытаний элементов, при этом эквивалентное число отказов СТС меньше суммарного числа отказов элементов. Следовательно, для резервированных СТС автономные испытания элементов на безотказность эффективнее полномасштабных испытаний СТС.

Литература

1. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 912 с.

2. Волков Л. И. Безопасность и надежность систем. М.: Изд-во СИП РИА, 2003. – 268 с.

3. Волков Л. И., Лукин В. Л., Сухорученков Б. И. Методы статистического контроля надежности технических систем. – Юбилейный: ЗАО «ПСТМ», 2008. – 332 с.

4. ГОСТ 11.005-74. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров экспоненциального распределения и распределения Пуассона. М.: Госкомитет СССР по стандартам, 1979. - 30 с.

5. Национальный стандарт РФ. Системы и комплексы космические. Порядок задания требований, оценки и контроля надежности. М.: Стандартинформ, 2009.- 115 с.

6. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.– 496 с.

7. Сухорученков Б. И. Методы оценивания показателей безотказности по ограниченной выборке. Российская инженерная академия // Сборник трудов. – СИП РИА. 2006. Вып. 14. – С. 101–123.

Материал поступил в редакцию 26. 09. 2010 г.