УДК 623. 004. 69

© Головачев Г.И., Котяшев Н.Н.
Golovachov G., Kotiaschev N.

ВЫБОР ЗНАЧЕНИЙ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА РЕЗУЛЬТАТ БОЯ ОБЩЕВОЙСКОВЫХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ, ПО КРИТЕРИЮ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ БОЯ

ON SELECTING THE VALUES OF FACTORS INFLUENCING THE BATTLE OUTCOME BASED ON COMBAT RESULTS EVALUATION

Аннотация. *С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина, модифицированного для процессов в конфликтных ситуациях, осуществлен выбор значений факторов, влияющих на результат боя общевойсковых формирований, по критерию оценки результатов боя в математической модели боя.*

Annotation. *Based on Pontryagin's maximum principle modified for processes in conflicts, the selection of factor values influencing the battle outcome is done, by evaluation of combat results in mathematical model of combat.*

Ключевые слова. *Математическая модель боя, факторы влияния на результат боя, управление.*

Key words. *Mathematical model of combat, factors influencing the battle outcome, battle control.*

Неоднократно было замечено [1, 2, 3, 4], что лучшим по тактико-техническим характеристикам образцов вооружения различного типа, которыми оснащены войсковые формирования, может соответствовать не лучший результат боя. Так, в работе [1] на это было указано при оптимизации сроков обновления вооружения и военной техники. В работе [2] предложена стратегия применения многоканального вооружения одного из типов боевых машин на основе функций оптимального целераспределения. В работе [3] изложены рекомендации по оптимальному двустороннему противоборству разнородных группировок, а в работе [4] представлены модели поддержки решений командира на выполнение тактической боевой задачи.

Опыт разработки и использования математических моделей боя для сравнительной оценки систем бронетанкового вооружения показывает, что наиболее сложными в этой области исследования являются вопросы учета полноты и выбора значений факторов управления боем. Эти факторы оказывают определяющее влияние на итоговые результаты боя. Распространенным способом учета факторов управления в моделях боя является их фиксация на заданном уровне. Однако этот способ не гарантирует получение непротиворечивых результатов. Поэтому в моделях боя, предназначенных для сравнительной оценки систем вооружения, при учете факторов управления целесообразно использовать оптимизационный подход, который устраняет указанный недостаток.

Под функцией управления в общевойсковом бою обычно понимают распределение огневых возможностей боевых средств между различными типами целей. Однако в бою общевойсковых (танковых, мотострелковых) подразделений, кроме указанного фактора, важную роль играет выбор скорости атаки, а также выбор типа снаряда для поражения цели. Бой танкового (мотострелкового) подразделения в наступлении рассматривается как сложный процесс, состоящий из ряда частных процессов: разведки целей на поле боя и организации целеуказаний, выбора цели для первоочередного поражения, огневого поражение цели, расхода боекомплекта, передвижения боевых порядков, выбора скорости атаки, распределения боевых средств и целей по глубине и другие.

При этом как с наступающей стороны А, так и с обороняющейся стороны В в бою могут участвовать разнотипные боевые средства – танки, боевые машины пехоты (БМП), противотанковые ракетные комплексы (ПТРК), танкоопасная живая сила (ТОЖС) и др.

При моделировании боя учет глубины построения

Головачев Григорий Иванович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, НИИЦ 3 ЦНИИ МО РФ, тел. 8(916) 978-68-60;
Котяшев Николай Николаевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, НИЦ 4 ЦНИИ МО РФ.

Golovachev Grigoriy – doctor of technical science, professor, chief researcher, NIIZ 3 SRI MD RF, tel. 8(916) 978-68-60;
Kotiaschev Nikolay – doctor of technical science, professor, leading researcher, NIZ 4 SRI MD RF.

боевого порядка боевые средства сторон располагаются на заданном числе боевых линий (рубежей), удаленных один от другого на некотором расстоянии. Так как эффективность процессов разведки (обнаружения и распознавания) и поражения целей существенно зависит от дальности до цели, то распределение типов боевых средств по боевым линиям (рубежам) может быть учтено путем введения условных типов боевых средств. В этом случае, например, танки, расположенные на различных боевых линиях, будут иметь различные номера условных типов боевых средств.

Одним из важных свойств некоторых современных боевых средств является многоканальность их вооружения, то есть наличие каналов вооружения, способных самостоятельно и независимо друг от друга вести поиск и поражение целей. Поэтому появляется необходимость перехода от описания процессов огневого поражения "средства-цели" к процессам "каналы-цели". В связи с этим возможно так же, как и для различных типов боевых средств, ввести понятие условных типов каналов вооружения. Формирование номеров условных типов боевых средств и каналов вооружения осуществляется по формулам

$$i=n'_a(r_{i'}-1)+i'; \quad j=n'_a(r_{j'}-1)+j';$$

$$k_i=n'_{ka}(r_{i'}-1)+k'_i; \quad k_j=n'_{kb}(r_{j'}-1)+k'_j,$$

где $i', j'(i,j)$ – номера типов (условных типов) боевых средств сторон А и В соответственно;

n'_a, n'_b – количество типов боевых средств соответственно сторон;

n'_{ka}, n'_{kb} – количество типов каналов вооружения сторон;

$r_{i'}$, $r_{j'}$ – номера боевых линий (рубежей), на которых располагаются боевые средства i'-го, j'-го типа, соответственно;

$k'_i, k'_j(k_i, k_j)$ – номера типов (условных типов) каналов вооружения сторон А и В соответственно.

Если общее количество условных типов средств стороны А – n_a и стороны В – n_b равно $n_a = n'_a\, l_a$, $n'_b = n'_b\, l_b$, то количество условных типов каналов вооружения средств стороны А – n_{ka} и стороны В – n_{kb} будет равно $n_{ka}=n'_{ka}l_a$, $n_{kb}=n'_{kb}l_b$, где l_a, l_b – количество боевых линий (рубежей), на которых распределяются боевые средства сторон.

Организация огневого взаимодействия боевых средств обеспечивается в процессе боя путем целеуказания. Формализация этого процесса в модели частично осуществляется путем выделения полос поиска и ведения огня для каждого канала вооружения.

Следующая группа учитываемых в модели факторов связана со спецификой процессов обнаружения и поражения целей из танков и БМП, которые могут быть учтены, если эти процессы рассматриваются раздельно. Поэтому в модели рассматриваются два состояния, в которых может находиться боеспособный канал вооружения: «поиск цели», «ведение огня по цели".

В приведенных ниже зависимостях, описывающих процесс боя, принята сквозная нумерация типов снарядов, каналов вооружения и средств для каждой из противоборствующих сторон. При этом индексы первого уровня $i(j)$, k, s обозначают сквозной номер, соответственно, типа средства, канала вооружения и снаряда. Индексы второго уровня отражают соответствие между рассматриваемым объектом и объектами других классов. Так, индекс S_{jk} обозначает снаряд S-го типа, используемый каналом вооружения k_j-го типа j-го боевого средства.

При описании процесса поражения средств противоборствующих сторон предполагается, что при поражении того или иного средства все каналы вооружения, принадлежащие этому средству, теряют боеспособность.

С учетом комплекса отмеченных факторов процесс боя танковых (мотострелковых) подразделений описывается следующей системой дифференциальных уравнений, основанных на модифицированном методе динамики средних [5, 6]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\sum_{j=1}^{n_b}\sum_{k\in k_j} z^b_{k_j}\, y_j(t)\eta^b_k(x^{(1)}_{k_j})\rho^b_{ki}(L_{ji})\lambda^b_{ki}(t), \quad i=\overline{1,n_a}; \\ \dot{y}_j = -\sum_{i=1}^{n_a}\sum_{k\in k_i} z^a_{k_i}\, x_i(t)\eta^a_k(y^{(1)}_{k_i})\rho^a_{kj}(L_{ij})\lambda^a_{kj}(t), \quad j=\overline{1,n_b}; \\ \dot{x}^{(1)}_{k_j i} = \nu^b_{k_j i}(L_{ji})P_{k_j i}\Big(\dfrac{x_i(t)}{z^b_{k_j} y_j(t)} - \\ - x^{(1)}_{k_j i}(t)\Big) - \left|\dot{x}_i(t)\right|\dfrac{x^{(1)}_{k_j i}(t)}{x_i(t)} - \gamma_{k_j i}x^{(1)}_{k_j i}(t), \quad k_j=\overline{1,n_{kb}}, i=\overline{1,n_a}; \\ \dot{y}^{(1)}_{k_i j} = \nu^a_{k_i j}(L_{ij})P_{k_i j}\Big(\dfrac{y_j(t)}{z^a_{k_i} x_i(t)} - y^{(1)}_{k_i j}(t)\Big) - \\ \left|-\dot{y}_j(t)\right|\dfrac{y^{(1)}_{k_i j}(t)}{y_j(t)} - \gamma_{k_i j}y^{(1)}_{k_i j}(t), \quad k_i=\overline{1,n_{ka}}, j=\overline{1,n_b}; \\ \dot{\theta}^a_{s_{ki}} = -\sum_{j=1}^{n_b}\rho_{s_{ki}j}(L_{ij})\eta^a_k(y^{(1)}_{ki})\lambda^a_{kj}(t)q_{S_i j}(L_{ij})\pi_{S_{ki}j}, \quad s_{ki}=\overline{1,s_a}; \\ \dot{\theta}^b_{s_{kj}} = -\sum_{i=1}^{n_a}\rho_{s_{kj}i}(L_{ji})\eta^b_k(x^{(1)}_{kj})\lambda^b_{ki}(t)q_{S_j i}(L_{ji})\pi_{S_{kj}i}, \quad s_{kj}=\overline{1,s_b}; \\ \dot{L} = -V(t); \end{cases} \tag{1}$$

$$x^{(1)}_{k_j} = \sum_{i=1}^{n_a} x^{(1)}_{k_j i}; \quad y^{(1)}_{k_i} = \sum_{j=1}^{n_b} y^{(1)}_{k_i j}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \rho^b_{ki} &= \max_{s_{kj}\in s_{kj}}\{\rho^b_{k_j i}\}, \theta^b_{s_{kj}} > 0; \\ \rho^a_{kj} &= \max_{s_{ki}\in s_{ki}}\{\rho^a_{k_i j}\}, \theta^a_{s_{ki}} > 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\pi_{s_{kj}i}=\begin{cases}1, если\ \rho^b_{s_{kj}i}=\rho^b_{ki};\\ 0, если\ \rho^b_{s_{kj}i}\neq\rho^b_{ki};\end{cases} \quad (4)$$

$$\pi_{s_{ki}j}=\begin{cases}1, если\ \rho^a_{s_{ki}j}=\rho^a_{kj};\\ 0, если\ \rho^a_{s_{ki}j}\neq\rho^a_{kj};\end{cases}$$

$$P_{k_ji}=\frac{d_{ji}{}^b}{d_{ji}{}^b+d_{ji}{}^h};\quad P_{k_ij}=\frac{d_{ij}{}^b}{d_{ij}{}^b+d_{ij}{}^h}; \quad (5)$$

$$\gamma_{k_ji}=\frac{V}{d_{ji}{}^b};\quad \gamma_{k_ij}=\frac{V}{d_{ij}{}^b};\quad L_{ij}=L^0_{ij}-L(t)$$

при ограничениях на фазовые координаты

$$x_i(t)\geq 0;\ y_j(t)\geq 0;$$

$$\theta^a_{s_{ki}}(t)\geq 0;\ \theta^b_{s_{kj}}(t)\geq 0; \quad (6)$$

$$x^{(1)}_{k_ji}\geq 0;\ y^{(1)}_{k_ij}\geq 0;$$

на управления

$$\sum_{i=1}^{n_a}\lambda^b_{ki}(t)\leq 1;\ \sum_{j=1}^{n_b}\lambda^a_{kj}(t)\leq 1; \quad (7)$$

$$V_{\min}\leq V(t)\leq V_{\max};$$

и начальных условиях при $t=t_0$

$$x_i=x_{0i};\ y_j=y_{0j};\ x^{(1)}_{k_ji}=0;\ y^{(1)}_{k_ij}=0;$$

$$\theta^b_{s_jk}=\theta^b_{s_j0};\ \theta^a_{s_ik}=\theta^a_{s_i0};\ L_{ij}=L^0_{ij}, \quad (8)$$

где $z^b_{k_j}$ $(z^a_{k_i})$ – количество каналов вооружения k_j-го (k_i- го) типа, имеющихся в боевом средстве j-го (i-го) типа стороны В (А);

$x_i(t)(y_j(t))$ – текущее количество боеспособных средств i-го (j-го) типа;

$\eta^b_k(x^{(1)}_{k_j})(\eta^a_k(y^{(1)}_{k_i}))$ – вероятность нахождения канала вооружения k_j-го (k_i–го) типа стороны В (А) в состоянии "ведение огня";

$x^{(1)}_{k_j}(t)(y^{(1)}_{k_i}(t))$ – текущее суммарное количество целей, обнаруженных каналом вооружения k_j-го (k_i–го) типа стороны В (А) в своей полосе;

$\rho^b_{kj}(L_{ji})(\rho^a_{ki}(L_{ij}))$ – наибольшая среди типов снарядов интенсивность потока поражающих выстрелов канала вооружения k-го типа стороны В (А), c^{-1};

L_{ji} (L_{ij}) – текущее удаление средств i-го (j-го) типа от средств j-го (i-го) типа стороны А (В), м;

$\lambda^b_{ki}(t)(\lambda^a_{kj}(t))$ – доля каналов вооружения k-го типа стороны В (А), используемых для поражения цели i-го (j-го) типа стороны А (В);

$\nu^b_{k_ji}(L_{ji})(\nu^a_{k_ij}(L_{ij}))$ – интенсивность разведки цели i-го (j-го) типа стороны А (В) из канала вооружения k_j-го (k_i–го) типа стороны В (А) при наличии прямой видимости между каналом вооружения и целью с учетом целеуказаний, c^{-1};

$P_{k_ij}(P_{k_ji})$ – вероятность наличия прямой видимости между каналом вооружения k_i-го (k_j–го) типа стороны А (В) и целью j-го (i-го) типа стороны В (А);

$x^{(1)}_{k_ji}(t)(y^{(1)}_{k_ij}(t))$ – текущее количество целей j-го (i-го) типа, обнаруженных каналом вооружения k_j-го (k_i–го) типа стороны В (А) в своей полосе;

$\gamma_{k_ji}(\gamma_{k_ij})$ – интенсивность исчезновения прямой видимости между каналом вооружения k_j-го (k_i–го) типа стороны В (А) и целью i-го (j-го) типа стороны А (В), c^{-1};

$\theta^a_{S_{ki}}(t)(\theta^b_{S_{kj}}(t))$ – текущее количество неизрасходованных боеприпасов S-го типа, относящихся к каналу вооружения k_i-го (k_j–го) типа боевого средства i-го (j-го) типа стороны А (В);

$\rho^b_{s_{kj}i}(L_{ji})(\rho^a_{s_{ki}j}(L_{ij}))$ – интенсивность потока поражающих выстрелов из канала вооружения k_j-го (k_i–го) типа при использовании снарядов S_j–го (S_i–го) типа по разведанной цели i-го (j-го) типа стороны А (В), c^{-1};

$q_{s_ji}(L_{ji})(q_{s_ij}(L_{ij}))$ – средний расход снарядов S_j-го (S_i-го) типа стороны В (А) на поражение цели i-го (j-го) типа стороны А (В);

L – текущее удаление боевых порядков (первых линий) противоборствующих сторон;

$V(t)$ – скорость сближения боевых порядков противоборствующих сторон, м/с;

$d^b_{ij}(d^h_{ij})$ – средняя протяженность участков наличия (отсутствия) прямой видимости между средствами i -го и j -го типов противоборствующих сторон, м;

S_a, S_b – общее количество типов снарядов, принадлежащих средствам сторон.

Текущее значение вероятности нахождения рассматриваемого канала вооружения в состоянии «ведение огня» $\eta_k{}^a$ для стороны А определяется в предположении о показательном распределении количества обнаруженных целей $y^{(1)}_{kj}$

$$\eta^a_k=\exp\left(-m_k/\sum_{j=1}^{n_b}y^{(1)}_{kj}\right),$$

где m_k– количество обнаруженных целей k-м каналом вооружения, при котором осуществляется его переход в состояние "ведение огня".

Величина $\eta_k{}^b$ для каналов вооружения стороны В определяется по аналогичной зависимости.

В качестве критерия оценки результатов боя рассматривается разность взвешенных относительных остатков средств сторон на момент окончания боя [5]

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{n_a}X_i(T)\omega_i}{\sum_{i=1}^{n_a}X_{0i}\omega_i}-\frac{\sum_{j=1}^{n_b}Y_j(T)w_j}{\sum_{j=1}^{n_b}Y_{0j}w_j}, \quad (9)$$

где ω_i, w_j – коэффициенты значимости средств i-го и j-го типа, соответственно.

Сторона А, используя параметры управления процессом боя, стремится получить максимальное значение критерия W, сторона В, наоборот,– его минимальное значение.

Управление процессом боя будет оптимальным, если ни одна из сторон не сможет улучшить для себя значение критерия W, то есть, если будет выполнено соотношение

$$\overline{W}(T) = \max_{\lambda^a, V} \min_{\lambda^b} W(T), \tag{10}$$

где $\overline{W}(T)$ – оптимальное значение критерия.

В целом задача поиска оптимального управления процессом боя может быть сформулирована следующим образом. Пусть исследуемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1). Требуется определить такие параметры управления λ^a, V, λ^b, которые удовлетворяют в каждый момент времени системе ограничений (6), доставляют оптимальное значение функционалу (9) при условии выполнения ограничений на фазовые координаты процесса (6) и параметры управления (7).

Для решения поставленной задачи используется принцип максимума Л. С.Понтрягина, модифицированный для процессов в конфликтных ситуациях. Так как функционал (9) зависит от значения фазовых переменных процесса только в момент окончания боя Т, а фазовые координаты в момент T не заданы, то имеет место задача Майера со свободным правым концом [7, 8].

Оптимальное управление рассматриваемого процесса определяется из условия

$$\overline{H}(t) = \min_{\lambda^a, V} \max_{\lambda^b} H(t), \tag{11}$$

где $H(t)$ – функция Гамильтона, формируемая путем суммирования правых частей уравнений исходной системы, взвешенных по сопряженным переменным - соответствующим фазовым координатам (действующим факторам).

С целью достижения оптимального значения критерия $W(T)$ к моменту окончания боя T, в соответствии с условием (11) в каждый текущий момент времени t необходимо выбирать значения параметров управления таким образом, чтобы функция H достигала своего оптимального значения $\overline{H}(t)$.

Функция Гамильтона для рассматриваемой задачи имеет вид (далее символ зависимости переменных от t опущен)

$$\begin{aligned}
H = & -\sum_{i=1}^{n_a} \psi_{x_i} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{k \in k_j} z^b_{k_j} y_j \eta^b_k (x^{(1)}_{k_j}) \times \\
& \times \rho^b_{ki} (L_{ji}) \lambda^b_{ki} - \sum_{j=1}^{n_b} \psi_{y_j} \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{k \in k_i} z^a_{k_i} x_i \eta^a_k (y^{(1)}_{k_i}) \times \\
& \times \rho^a_{kj} (L_{ij}) \lambda^a_{kj} + \sum_{k_j=1}^{n_{k_b}} \sum_{i=1}^{n_a} \psi_{k_j i} [\nu^b_{k_j i} (L_{ji}) \times \\
& \times P_{k_j i} \left(\frac{x_i}{z^b_{k_j} y_j} - x^{(1)}_{k_j i}\right) - \left|\dot{x}_i\right| \frac{x^{(1)}_{k_j i}}{x_i} - \gamma_{k_j i} x^{(1)}_{k_j i}] + \\
& + \sum_{k_i=1}^{n_{k_a}} \sum_{j=1}^{n_b} \psi_{k_i j} [\nu^a_{k_i j} (L_{ij}) P_{k_i j} \left(\frac{y_j}{z^a_{k_i} x_i} - y^{(1)}_{k_i j}\right) - \\
& - \left|\dot{y}_j\right| \frac{y^{(1)}_{k_i j}}{y_j} - \gamma_{k_i j} y^{(1)}_{k_i j}] - \\
& - \sum_{s_i=1}^{s_a} \psi_{s_i} \sum_{j=1}^{n_b} \rho^a_{s_{ki} j} (L_{ij}) \eta^a_k (y^{(1)}_{k_i}) \lambda^a_{kj} q_{s_i j} \times \\
& \times (L_{ij}) \pi_{s_{ki} j} - \sum_{s_j=1}^{s_b} \psi_{s_j} \sum_{i=1}^{n_a} \rho^b_{s_{kj} i} (L_{ji}) \eta^b_k (x^{(1)}_{k_j}) \times \\
& \times \lambda^b_{ki} q_{s_j i} (L_{ji}) \pi_{s_{kj} i} - \psi_L V,
\end{aligned} \tag{12}$$

где ψ_z – сопряженные переменные, отражающие степень влияния изменения Z-й фазовой координаты исследуемого процесса на значение функции H.

Для определения переменных ψ_z составим сопряженную систему (далее символ зависимости переменных от фазовых координат опущен). При дальнейшем анализе выясняется, что сопряженные переменные $\psi_{sj}(t)=0$, $\psi_{si}(t)=0$. Поэтому при составлении уравнений сопряженной системы члены, содержащие переменные $\psi_{sj}(t)$ и $\psi_{si}(t)$, также опущены.

$$\begin{cases}
\dot{\psi}_{x_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} = \sum\limits_{j=1}^{n_b} \psi_{y_j} \sum\limits_{k \in \overline{k_i}} Z^a_{k_i} \eta^a_k \rho^a_{kj} \lambda^a_{kj} - \\
- \sum\limits_{k_j=1}^{n_{k_b}} \psi_{k_j i} \left(\dfrac{\nu^b_{k_j i} P_{k_j i}}{Z^b_{k_j} y_j} + \dfrac{\left|\dot{x}_i\right| x^{(1)}_{k_j i}}{x_i^2} \right) + \\
+ \sum\limits_{k \in \overline{k_i}} \sum\limits_{j=1}^{n_b} \psi_{k_i j} \dfrac{\nu^a_{k_i j} P_{k_i j} y_j}{Z^a_{k_i} x_i^2}; \\
\dot{\psi}_{y_j} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_j} = \sum\limits_{i=1}^{n_a} \psi_{x_i} \sum\limits_{k \in k_j} Z^b_{k_j} \eta^b_k \rho^b_{ki} \lambda^b_{ki} -
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
-\sum\limits_{k_i=1}^{n_{k_a}} \psi_{k_i j}\left(\dfrac{\nu^a_{k_i j} P_{k_i j}}{Z^a_{k_i} X_i}+\dfrac{\left|\dot{y}_j\right| y^{(1)}_{k_i j}}{y_j^2}\right)+ \\
+\sum\limits_{k\in \overline{k_j}} \sum\limits_{i=1}^{n_a} \psi_{k_j i}\dfrac{\nu^b_{k_j i} P_{k_j i} x_i}{Z^b_{k_j} y_j^2}; \\
\dot{\psi}_{x^{(1)}_{ki}} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^{(1)}_{k_j i}} = \psi_{x_i} Z^b_{k_j} y_j \rho^b_{ki} \lambda^b_{ki} \dfrac{\partial \eta^b_k}{\partial x^{(1)}_{k_j i}} + \\
+\psi_{k_j i}\left(\nu^b_{k_j i} P_{k_j i} + \dfrac{\left|\dot{x}_i\right|}{x_i} + \gamma_{k_j i}\right),\ k=\overline{1,n_{kb}}; \\
\dot{\psi}_{y^{(1)}_{kj}} = -\dfrac{\partial H}{\partial y^{(1)}_{k_i j}} = \psi_{y_j} Z^a_{k_i} x_i \rho^a_{kj} \lambda^a_{kj} \dfrac{\partial \eta^a_k}{\partial y^{(1)}_{k_i j}} + \\
+\psi_{k_i j}\left(\nu^a_{k_i j} P_{k_i j} + \dfrac{\left|\dot{y}_j\right|}{y_j} + \gamma_{k_i j}\right),\ k=\overline{1,n_{ka}}; \\
\dot{\psi}_L = -\dfrac{\partial H}{\partial L} = \sum\limits_{i=1}^{n_a} \psi_{x_i} \sum\limits_{j=1}^{n_b} \sum\limits_{k\in \overline{k_j}} Z^b_{k_j} y_j \eta^b_k \lambda^b_{ki} \dfrac{\partial \rho^b_{ki}}{\partial L} + \\
+\sum\limits_{j=1}^{n_b} \psi_{y_j} \sum\limits_{i=1}^{n_a} \sum\limits_{k\in \overline{k_i}} Z^a_{k_i} x_i \eta^a_k \lambda^a_{kj} \dfrac{\partial \rho^a_{kj}}{\partial L} - \\
-\sum\limits_{k_j=1}^{n_{kb}} \sum\limits_{i=1}^{n_a} \psi_{k_j i} P_{k_j i}\left(\dfrac{x_i}{Z^b_{k_j} y_j} - x^{(1)}_{k_j i}\right)\dfrac{\partial \nu^b_{k_j i}}{\partial L} - \\
-\sum\limits_{k_i=1}^{n_{ka}} \sum\limits_{j=1}^{n_b} \psi_{k_i j} P_{k_i j}\left(\dfrac{y_j}{Z^a_{k_i} x_i} - y^{(1)}_{k_i j}\right)\dfrac{\partial \nu^a_{k_i j}}{\partial L}; \\
\dot{\psi}_{s_j} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta^b_s} = 0,\quad S_j=\overline{1,S_b}; \\
\dot{\psi}_{s_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta^a_s} = 0,\quad S_i=\overline{1,S_a}; \\
i=\overline{1,n_a};\quad j=\overline{1,n_b},
\end{cases}
\tag{13}
$$

Сопряженные переменные удовлетворяют граничным условиям [7]

$$\psi_z(T) = -\frac{\partial W(T)}{\partial Z}. \tag{14}$$

В соответствии с условием (14) имеем

$$\psi_{x_i}(T) = -\frac{\omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{n_a} X_{0i}\omega_i};\quad \psi_{y_j}(T) = \frac{w_j}{\sum\limits_{j=1}^{n_b} y_{0j} w_j}; \tag{15}$$

$$\psi_{k_j i}(T) = 0;\ \psi_{k_i j}(T) = 0;$$

$$\psi_{s_j}(T) = 0;\quad \psi_{s_i}(T) = 0;\quad \psi_L(T) = 0.$$

Для удобства решения поставленной задачи функция Гамильтона преобразуется следующим образом. В ней выделяются только те члены, которые содержат параметры управления. Кроме того, учитывая

$$\psi_{s_j}(t) = 0,\quad \psi_{s_i}(t) = 0,$$

граничные условия $\psi_{s_j}(T) = 0,\quad \psi_{s_i}(T) = 0$ и уравнения $\dot{\psi}_{s_j}(t) = 0,\quad \dot{\psi}_{s_i}(t) = 0$, входящие в систему (13), найдем,

что $\phi_{s_j}(t) = 0,\quad \phi_{s_i}(t) = 0$.

Поэтому члены, входящие в функцию H и содержащие сопряженные переменные ψ_{sj} и ψ_{si}, тоже могут быть опущены. Вводя обозначения H^* для новой функции, условие оптимальности может быть записано в виде

$$\min_{\lambda^a, V} \max_{\lambda^b} H^* = \min_{\lambda^a, V} \max_{\lambda^b}\left(-\sum_{i=1}^{n_a} \psi_{x_i} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{k\in k_j} Q^b_{kij}\lambda^b_{ki} - \right.$$

$$\left. -\sum_{j=1}^{n_b} \psi_{y_j} \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{k\in k_i} Q^a_{kji}\lambda^a_{kj} - \psi_L V\right), \tag{16}$$

где $Q^b_{kij} = Z^b_{k_j} y_j \eta^b_k \rho^b_{ki};\quad Q^a_{kji} = Z^a_{k_i} x_i \eta^a_k \rho^a_{kj}$.

Правую часть уравнения (16) можно рассматривать как сумму независимых между собой двух линейных по отношению к параметрам управления функций, относящимся соответственно к сторонам А и В. В итоге определение оптимального значения функции H^* сводится к решению двух задач линейного программирования.

Проанализируем процесс использования управляемых параметров противоборствующими сторонами с целью получения для себя наилучшего результата. В соответствии с условием (16) сторона В, используя параметр управления λ^b, добивается максимального значения функции H^*. Так как $\psi_{xi} \le 0$ (см. условие (15), то это соответствует максимальному по абсолютной величине значению первого члена в формуле (16), отражающему обобщенный ущерб, наносимый стороне А в единицу времени.

Сторона А, используя параметры λ^a и V, добивается минимального значения H^*. Поскольку $\psi_{yj} \ge 0$, то за счет параметра λ^a достигается максимальное по абсолютной величине значение второго члена в формуле (16). Этот член отражает обобщенный ущерб, наносимый стороне В в единицу времени. Выбор скорости атаки V стороной А зависит от знака переменной ψ_L. При $\psi_L < 0$ $V(t)=V_{min}$, при $\psi_L > 0$ $V(t)=V_{max}$.

В целом решение поставленной задачи может быть выполнено в такой последовательности. Осуществляется совместное интегрирование систем уравнений (1) и (13).

При этом на каждом шаге интегрирования указанных систем уравнений параметры (численные значения функций) управления выбираются исходя из условия оптимальности (16). Основная трудность в решении поставленной задачи состоит в том, что значения сопряженных переменных определены в конце процесса боя и неизвестны в его начале, вследствие чего необходимо решать краевую задачу. Обычно для решения такого рода задач организуется некоторый итерационный процесс, обеспечивающий последовательное приближение к искомому решению.

Для решения данной задачи применяется модифицированной метод Н.А. Крылова и Ф.А. Черноусько [8]. В соответствии с этим методом вначале задаются значениями сопряженных переменных $\psi_z(t)$, удовлетворяющих граничным условиям (15). В частности, можно положить, что $\psi_z(t)=\psi_z(T)$. Далее выполняется несколько итераций, каждая из которых состоит из двух этапов. На первом этапе итерации интегрируют систему уравнений (1) в прямом направлении от t_0 до T, выбирая и запоминая параметры управления на каждом шаге в соответствии с условием оптимальности (16). На втором этапе первой итерации, имея значения фазовых и сопряженных переменных в момент времени T, интегрируют систему (13) в обратном направлении от T до t_0, с целью получения новых значений сопряженных переменных для каждого момента времени t. При этом используются значения параметров управления, полученные на первом этапе итерации и т.д. Процесс вычислений прекращается, если максимальное отклонение значений сопряженных переменных в двух последовательных итерациях не превышает некоторого наперед заданного значения.

Структура критерия (9), в выражение для которого входят коэффициенты значимости средств сторон ω_i и w_j, накладывает определенные особенности на процесс решения данной задачи.

Коэффициенты значимости средств сторон определяются как величины, пропорциональные вкладу каждого средства в критерий W, путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}\,\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n_b} \alpha'_{ij} w_j, \quad i=\overline{1,n_a}; \\ \sqrt{\lambda}\,w_j = \sum\limits_{i=1}^{n_a} \beta'_{ji}\omega_i, \quad j=\overline{1,n_a}. \end{cases} \tag{17}$$

При

$$\alpha'_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{1+\beta_i^{\Sigma}}; \quad \beta'_{ji} = \frac{\beta_{ji}}{1+\alpha_j^{\Sigma}};$$

$$\beta_i^{\Sigma} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_b} y_{0j}\beta_{ji}}{X_{0i}}; \quad \alpha_j^{\Sigma} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_a} X_{0i}}{y_{0j}},$$

где α_{ij} (β_{ji}) — среднее количество средств j-го (i-го) типа стороны В (А), пораженных одним средством i-го (j-го) типа стороны А (В) за время боя;

λ — собственное значение преобразования (17).

Следует отметить, что в правых частях первого и второго уравнений системы (17) осуществляется не сквозное, а поэтапное суммирование составляющих членов вначале по каналам вооружения, принадлежащим данному средству, а затем по средствам. Это позволяет определять текущее и итоговое количество средств стороны В (А), пораженных одним боевым средством каждого типа стороны А (В).

Коэффициенты значимости средств сторон ω_i и w_j рассчитываются в конце первого этапа каждой итерации, то есть когда известны результаты боя на момент времени T. Затем полученные значения ω_i и w_j используются для определения значений сопряженных переменных в момент времени T по формулам (15), что необходимо для перехода ко второму этапу итерации. Для обеспечения процесса сходимости решения данной задачи значения сопряженных переменных в первой итерации выбираются на основе граничных условий (15) и результатов решения системы (17).

Критерий W однозначно связан с условием выполнения боевой задачи общевойсковым подразделением. Известно, что боевой результат характеризуется потерями противоборствующих сторон, рубежом и временем выполнения поставленной боевой задачи. При этом решение поставленной боевой задачи связано с выполнением определенных условий: к заданному моменту времени должен быть достигнут заданный рубеж (обеспечено удержание заданного рубежа); потери нашей стороны не должны превышать заданный уровень, а потери противника должны быть не менее требуемого значения. Указанные четыре показателя боевого результата могут быть свернуты в один обобщенный показатель. Таким показателем является вероятность выполнения поставленной боевой задачи.

При определении обобщенного показателя боевого результата такие его частные показатели, как достигнутый рубеж и время выполнения поставленной боевой задачи целесообразно перевести в разряд ограничений, а вероятность ее выполнения определять по условиям нахождения потерь или относительных остатков сторон в заданных пределах. В ходе ряда исследований, направленных на формирование обобщенного показателя боевого результата, установлено, что между предельными значениями относительных остатков средств противоборствующих сторон существует вполне определенная связь, которая позволяет выразить условие выполнения поставленной боевой задачи через один обобщенный показатель W – разность относительных остатков средств сторон [5].

Таким образом, вероятность выполнения поставленной боевой задачи рассматриваемым ОВФ $P_{зl}$ может быть определена по зависимости

$$P_{зl} = \begin{cases} P(W \geq r_m), & если\ Д_l \geq Д_{ol}, T_l \leq T_{ol}; \\ 0, & если\ \ Д_l < Д_{ol}, T_l > T_{ol}, \end{cases} \qquad (18)$$

где $P(W \geq r_m)$ – вероятность выполнения условия $W \geq r_m$;

r_m – предельное значение показателя W при котором поставленная боевая задача стороной А считается выполненной;

$Д_l$, T_l – соответственно, достигнутый рубеж и время боя;

$Д_{ol}$, T_{ol} – предельные значения, соответственно, достигнутого рубежа и времени боя, при которых поставленная боевая задача стороной А считается выполненной.

Для расчета вероятности $P_з$ используется биноминальное распределение остатков боевых средств сторон на момент окончания боя [9]. Условием окончания боя является достижение наступающей стороной заданного рубежа или превышение текущих потерь одной из сторон заданного уровня.

В результате моделирования выбранного варианта боя рассчитываются следующие показатели: достигнутый рубеж; продолжительность боя; количество боевых средств сторон каждого типа, сохранивших и потерявших боеспособность; коэффициенты значимости средств сторон; разность взвешенных относительных остатков средств сторон; вероятность выполнения боевой задачи стороной А, а также средняя скорость сближения сторон; расход боеприпасов каждого типа; распределение потерь по средствам поражения.

Полученная система показателей позволяет достаточно полно и однозначно оценить уровень выполнения боевой задачи танковым (мотострелковым) подразделением по вероятности $P_з$. При условии оптимизации управления процессом боя этот показатель позволяет дать непротиворечивую оценку комплектов (совокупности образцов) БТВ, которыми оснащены рассматриваемые подразделения. Она также позволяет оценить вклад каждого боевого средства в результат боя по коэффициентам значимости ω_i и w_j, а также дать сравнительную оценку однотипных и разнотипных средств, участвующих в бою, по вкладу в результат боя.

Кроме того, варьируя значениями того или иного параметра, можно установить степень его влияния на эффективность данного боевого средства или рассматриваемой системы вооружения. Такие зависимости используются для решения задач выбора рациональных характеристик исследуемых объектов. Примеры таких зависимостей, полученных по результатам моделирования боя танкового батальона с приданной мотострелковой ротой, представлены на рис 1, 2. Зависимости влияния скорости атаки V (см. рис. 1) и соотношения танков и БМП в структуре войскового формирования α_T (см. рис. 2) на вероятность выполнения поставленной боевой задачи $P_з$ имеют ярко выраженные экстремумы.

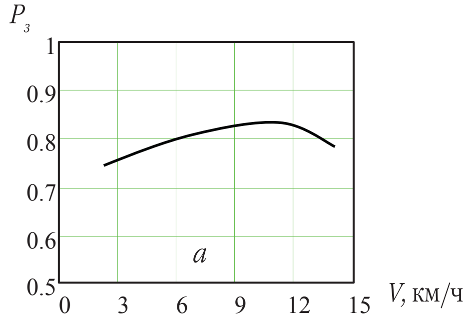

Рис.1. Вероятность выполнения боевой задачи общевойсковым формированием в наступлении в функции скорости атаки

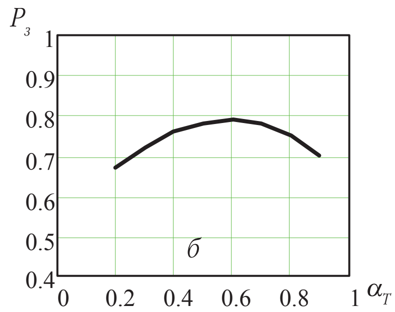

Рис.2. Вероятность выполнения боевой задачи общевойсковым формированием в наступлении в функции отношения количества танков к суммарному количеству танков и БМП

Зависимость $P_з = f(V)$ получена в режиме моделирования боя, когда $V_{max} = V_{min} = V$. Наличие экстремума в этой зависимости объясняется тем, что при ведении атаки со скоростью, близкой к оптимальной, атакующие танки и БМП смогут нанести урон танкоопасной живой силе (ТОЖС) противника еще до момента сближения с ней на небольшую дальность, где резко возрастает эффективность ее ответного огня. При увеличении скорости атаки по сравнению с оптимальным значением, танки и БМП не успевают в полной мере решить задачу по уничтожению ТОЖС и на малой дальности несут от нее значительные потери. При снижении скорости атаки, по сравнению с оптимальным значением, дальнобойные средства противника, находясь в обороне и имея преимущество в эффективности огня, наносят значительные потери атакующим танкам и БМП.

Наличие экстремума зависимости $P_з=f(\alpha_T)$ объясняется тем, что одни цели лучше поражаются танками, другие — БМП. Поэтому, если в бою сохраняется такая ситуация, когда танки и БМП поражают в основном свои цели, то бой протекает наиболее успешно. Для достижения такого положения необходимо иметь рациональное количественное соотношение танков и БМП (см. рис.2).

Таким образом, применение рассмотренной математической модели боя позволяет увеличить количество учитываемых факторов, оптимизировать процесс управления боем, проводить однозначную оценку уровня выполнения поставленной боевой задачи рассматриваемым войсковым формированием, повысить уровень адекватности получаемых результатов, корректно учитывать взаимодействие танковых и мотострелковых подразделений, проводить синтез комплектов БТВ ОВФ, определять их рациональный состав.

Литература

1. Головачев Г.И., Котяшев Н.Н. Оптимизация сроков обновления вооружения и военной техники // Стратегическая стабильность, №4, 2006г.

2. Парфенов Е.И. Метод выбора рациональной стратегии поражения неоднородныхцелей многока-нальным вооружением боевой машины // Стратегическая стабильность, №2, 2010г.

3. Черноскутов А.И., Жиганов А.Н., Усачев В.В. Стратегия огневого поражения, обусловленная разнородностью группировок // Стратегическая стабильность, №1, 2010г.

4. Путков В.Н, Кужев В.В. Математические модели боя как средство планирования боевых действий низовых тактических воинских формирований // Стратегическая стабильность, №1, 2011г.

5. Головачев Г. И. Диссертация доктора технических наук. МО РФ , 2005. .

6. Шамардин Ю. В. Аналитическая модель боя // Сборник трудов инсти¬тута математики СО АН СССР. Исследование операций. – 1986, вып. 10, часть 2. - с. 42-48.

7. Моисеев Н. Е. Математика ставит эксперимент.– М.: Наука, 1976.–270с.

8. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1974.- 424с.

9. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. Радио, 1972.- 55с.

Материал поступил в редакцию 29. 03. 2012 г.