УДК 629.7.05.

© Алферьев В.Л.
Alferyev V.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИЙ НА ЦЕЛЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

GENERAL PROPERTIES OF VARIATIONS ON THE TARGET SURFACE

Аннотация. *Рассмотрены и доведены до практических вычислительных правил решения прямой и обратной вариационных задач на кеплеровой дуге с участием вариаций положений и скоростей в двух её точках, одна их которых принадлежит подвижной целевой поверхности..*

Annotation. *Are observed and finished to practical computing rules of the solution of direct and inverse variational problems on Kepler's arc with involvement of variations of rules and velocities in two points, one their which belongs to a sliding target surface.*

Ключевые слова. *Матрица, частная производная, кеплерова дуга, свойство, вариационная задача.*

Key words. *Matrix, the partial derivative, Keplerian arc, the property, the variational problem.*

Представленный материал применим для непосредственного инженерного использования. Все соотношения в работе справедливы для произвольного вида кеплеровой дуги. Статья содержит полный набор необходимых для решения вариационных задач на целевой поверхности соотношений и их доказательство.

Рассмотрены интересные с практической точки зрения примеры использования полученных результатов.

Статья является второй из представляемой серии. В работе [2], являющейся началом исследований, указан перечень обозначений и представлен рисунок (II, рис.1).

С точки зрения практического использования особое положение занимают производные, обеспечивающие постоянную принадлежность вектора $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ на траектории космического объекта (КО) некоторой подвижной поверхности, собственное движение которой не зависит от движения КО. Данная поверхность может быть либо геоидом Земли в точке приземления КО, либо аналитически заданной границей зоны обзора информационного средства, дислоцированного на вращающейся Земле или движущемся носителе, либо специально подобранной поверхностью, выбор которой позволяет раскрыть маневренные возможности КО. В любом случае подобные производные являются ключевыми для целого спектра практических задач. В частности, такие частные производные могут быть использованы в алгоритмах дифференциальных коррекций траекторий КО при построении зависимостей размеров и ориентаций эллипсов рассеивания координат приземления КО, оценке разбросов положений входов КО в зоны обзоров информационных средств, либо при получении иной полезной информации.

1. *В общем случае* регулярная поверхность в конфигурационном пространстве определяется скалярным уравнением от времени и векторного аргумента

$$\Phi = \Phi(t^{(2)}, \vec{\mathbf{r}}^{(2)}) \equiv 0; \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}, \vec{\mathbf{v}}^{(2)}\right) \neq 0. \qquad (1)$$

Поверхность, на которую накладывается требование (1), будем называть *целевой поверхностью*.

В работе рассматриваются свойства вариаций на целевой поверхности, а также их взаимосвязь с вариациями положения и скорости КО в точке А ([2], рис.1). Дифференцируя уравнение (1) по некоторому траекторному параметру, напишем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t^{(2)}} t'^{(2)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}, \vec{\mathbf{r}}'^{(2)}\right) = 0. \qquad (2)$$

Выберем в качестве параметра дифференцирования последовательно векторы положения и скорости, а также текущего времени. В итоге получим частные производные от времени достижения целевой поверхности

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} &= -\frac{1}{\Phi_2^{(\mathrm{P})}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}; \\
\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} &= -\frac{1}{\Phi_2^{(\mathrm{P})}} \left.\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}\right|^{(0)\mathrm{T}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}; \qquad (3) \\
\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{\Phi_2^{(\mathrm{P})}} \frac{\partial \Phi}{\partial t^{(2)}},
\end{aligned}$$

Алферьев Виктор Леонидович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, МАК «Вымпел», тел. (495)543-36-76.

Alferyev Victor – Ph.D., senior researcher, IJSC «Vympel», tel. (495)543-36-76.

где функция $\Phi_2^{(\mathrm{P})}$ представляет собой скорость изменения функции Φ вдоль траектории КО в точке её пересечения с целевой поверхностью

$$\Phi_2^{(\mathrm{P})} = \frac{\partial \Phi}{\partial t^{(2)}} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}, \vec{\mathbf{v}}^{(2)} \right). \tag{4}$$

Уравнения (3) однозначно характеризуют поставленную в работе вариационную задачу. Обозначим через $\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}$ единичное направление градиента функции $\Phi(t_2, \vec{\mathbf{r}}^{(2)})$ (1)

$$\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}} \Bigg/ \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}} \right\| \tag{5}$$

и определим это направление посредством направляющих косинусов α_j в виде

$$\begin{aligned} &\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} = \sum_j \alpha_j \vec{\mathbf{e}}_j^{(2)} = \alpha_1 \vec{\mathbf{Q}}_2 + \alpha_2 \vec{\mathbf{c}} + \alpha_3 \vec{\boldsymbol{\gamma}}_2; \\ &{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2 = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Дополнительно для последующего использования введём в рассмотрение безразмерные коэффициенты

$$\mathrm{k}_f^{\Phi} = \frac{\Phi_2^{(\mathrm{P})}}{V_2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}} \right\|}; \quad \mathrm{k}_{\mathrm{T}}^{\Phi} = \frac{1}{V_2 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}} \right\|} \frac{\partial \Phi}{\partial t^{(2)}}, \tag{7}$$

которые в силу уравнения (4) связаны равенством

$$\mathrm{k}_f^{\Phi} = \mathrm{k}_{\mathrm{T}}^{\Phi} + (\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)}). \tag{8}$$

С учётом введённых обозначений уравнения (3) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} = -\frac{1}{V_2\, \mathrm{k}_f^{\Phi}} \left(\left. \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} \right|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} \right); \\ &\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = -\frac{1}{V_2\, \mathrm{k}_f^{\Phi}} \left(\left. \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} \right|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} \right); \\ &\frac{\partial t^{(2)}}{\partial t} = \frac{(\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)})}{\mathrm{k}_f^{\Phi}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставив частные производные (9) в уравнения ([2], 2.4) и ([2], 2.5) для матриц частных производных, напишем общий вид матриц частных производных от векторов положения и скорости КО на целевой поверхности

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} = \left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} \right|^{(0)} - \dfrac{1}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)} \otimes \left(\left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} \right|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} \right); \\ \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = \left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} \right|^{(0)} - \dfrac{1}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \vec{\mathbf{x}}_2^{(a)} \otimes \left(\left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} \right|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} \right); \end{cases} \\ &\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} = \left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} \right|^{(0)} + \dfrac{\cos\theta_2}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \dfrac{\mu}{R_2 C} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \left(\left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{r}}} \right|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} \right); \\ \dfrac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = \left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} \right|^{(0)} + \dfrac{\cos\theta_2}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \dfrac{\mu}{R_2 C} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} \otimes \left(\left. \dfrac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} \right|^{(0)\mathrm{T}} \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} \right). \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

При этом частные производные по текущему времени t от векторов положения и скорости КО в точке В ([2], рис.1) удовлетворят равенствам

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^{(2)}}{\partial t} = -\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{T}}^{\Phi}}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \vec{\mathbf{v}}^{(2)}; \quad \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}^{(2)}}{\partial t} = \frac{\mathrm{k}_{\mathrm{T}}^{\Phi}}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \frac{\mu}{R_2^2} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}. \tag{11}$$

Как следствие, взаимосвязь ([2], 3.20) и ([2], 3.21) между элементами матриц изохронных производных ([2], 3.6) – ([2], 3.9), с одной стороны, и элементами полных матриц частных производных ([2], 3.17) с другой – определится уравнениями

$$\begin{aligned} &\begin{cases} M_{k,j}^{(\mathrm{R,R})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,R})} - \dfrac{\delta_{k,1}\cos\theta_2 + \delta_{k,3}\sin\theta_2}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \displaystyle\sum_p M_{0,p,j}^{(\mathrm{R,R})} \alpha_p; \\ M_{k,j}^{(\mathrm{R,V})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{R,V})} - \dfrac{\delta_{k,1}\cos\theta_2 + \delta_{k,3}\sin\theta_2}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \displaystyle\sum_p M_{0,p,j}^{(\mathrm{R,V})} \alpha_p; \end{cases} \\ &\begin{cases} M_{k,j}^{(\mathrm{V,R})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,R})} + \chi \dfrac{\cos\theta_2}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \delta_{k,3} \displaystyle\sum_p M_{0,p,j}^{(\mathrm{R,R})} \alpha_p; \\ M_{k,j}^{(\mathrm{V,V})} = M_{0,k,j}^{(\mathrm{V,V})} + \chi \dfrac{\cos\theta_2}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \delta_{k,3} \displaystyle\sum_p M_{0,p,j}^{(\mathrm{R,V})} \alpha_p, \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера. С учётом выписанных элементов полных частных производных (10) перейдём к рассмотрению вопроса взаимосвязи вариаций векторов положения и скорости КО в точке А ([2], рис.1) и точке (В) пересечения его траектории с целевой поверхностью. Использовав равенства (10) и (11), выпишем уравнения для определения полных вариаций векторов положения и скорости в точке В ([2], рис.1)

$$\begin{aligned} &\delta \vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \delta \vec{\mathbf{r}}_0^{(2)} - \frac{1}{V_2} \frac{(\delta \vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)})}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \vec{\mathbf{v}}^{(2)}; \\ &\delta \vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \delta \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)} + \frac{\mu}{{R_2}^2} \frac{1}{V_2} \frac{(\delta \vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)})}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} \vec{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

В выписанных уравнениях изохронные составляющие вариаций положения $\delta \vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}$ и скорости $\delta \vec{\mathbf{v}}_0^{(2)}$ в точке В ([2], рис.1) определены равенствами ([2], 3.38). Сравнив уравнения (13) с уравнениями (II,3.37), выпишем уравнение для вариации $\delta t^{(2)}$ времени достижения целевой поверхности

$$\delta t^{(2)} = -\frac{1}{V_2} \frac{(\delta \vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)})}{\mathrm{k}_f^{\Phi}}. \tag{14}$$

Перейдём к рассмотрению уравнения трансверсальности ([2], 3.45), описывающего взаимосвязь между вариациями положения $\delta \vec{\mathbf{r}}^{(2)}$, скорости $\delta \vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ и времени достижения целевой поверхности $\delta t^{(2)}$. Подставим в него уравнения (10). Учтя взаимосвязи между матрицами частных производных ([2], 3.25), ([2], 3.26) и ([2], 3.29), в итоге напишем

$$\mathrm{k}_{\mathrm{T}}^{\Phi} V_2 \delta t^{(2)} + (\delta \vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}) = 0 \tag{15}$$

при этом коэффициент $\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)}$ ([2], 3.44) удовлетворит уравнению

$$\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{(2)} = \frac{\mathrm{k}_{\mathrm{T}}^{\Phi}}{\mathrm{k}_f^{\Phi}} - 1. \tag{16}$$

Равенство (15) можно было бы непосредственно получить из первого уравнения (14) с использованием (8). Уравнение (15) полностью заменяет уравнение трансверсальности ([2], 3.45) и не зависит от вариации скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$, что обусловлено заданием целевой поверхности (1) в конфигурационном пространстве.

Для решения конкретной вариационной задачи на практике требуется введение системы координат $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(\Phi)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(\Phi)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)})$ на целевой поверхности, у которой векторы $\vec{\mathbf{e}}_1^{(\Phi)}$ и $\vec{\mathbf{e}}_2^{(\Phi)}$ расположены в мгновенной касательной плоскости к поверхности (1) $\Phi(t_2, \vec{\mathbf{r}}^{(2)}) = 0$, а вектор $\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}$ определён уравнением (6) и направлен по нормали к этой поверхности.

При использовании уравнений обратного преобразования ([2], 3.40) или ([2], 3.42) вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ считаются известными. Вместе с тем выбор вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ должен производиться с учётом выполнения уравнения трансверсальности (15). Подставим вариацию $\delta t^{(2)}$ из уравнения (14) в равенство (15). Получим

$$\left(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \frac{\mathrm{k}_\mathrm{T}^\Phi}{\mathrm{k}_f^\Phi}\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}\right). \tag{17}$$

При решении практических задач интересуют вариации положения и скорости КО в точке В ([2], рис.1), исчисленные непосредственно на движущейся целевой поверхности. В этой связи необходимо определить взаимосвязь абсолютных вариаций положения $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$, относительных вариаций положения $\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}$ и скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}_\Phi^{(2)}$, реализуемых непосредственно на подвижной целевой поверхности.

Пусть $\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}$ – переносная скорость точки пересечения траектории КО с целевой поверхностью. Тогда, если через $\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}$ обозначить относительную (на подвижной поверхности) вариацию координат точки достижения КО целевой поверхности, то окажутся справедливы равенства

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{пер}}^{(2)}; \quad (\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}) = 0. \tag{18}$$

Введённая относительная вариация $\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}$ отличается от абсолютной вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ вектора достижения целевой поверхности на величину $\delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{пер}}^{(2)}$ переносной вариации

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{пер}}^{(2)} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}\delta t^{(2)}, \tag{19}$$

для которой, в силу (17) и второго уравнения (18), выполнено условие

$$(\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)})\delta t^{(2)} = \frac{\mathrm{k}_\mathrm{T}^\Phi}{\mathrm{k}_f^\Phi}(\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}). \tag{20}$$

При этом уравнение (17) оказывается полностью идентично уравнению трансверсальности ([2],3.45) или (15). Поэтому, если в процессе решения обратной задачи вместо абсолютной вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ задавать относительную вариацию $\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}$, определённую на движущейся целевой поверхности, то уравнения трансверсальности будут выполнены всегда, и вариацию $\delta t^{(2)}$ времени подхода КО к целевой поверхности можно выбирать произвольно.

Для вектора $\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}$, расположенного на целевой поверхности и совпадающего с вектором $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ в момент времени $t^{(2)}$, всегда выполнены равенства

$$\begin{gathered}\partial\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}/\partial\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = 0; \quad \partial\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}/\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \mathbf{E}; \\ \partial\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}/\partial t^{(2)} = -\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)},\end{gathered} \tag{21}$$

так что в соответствии с (2) выполнено условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t^{(2)}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}, \vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}\right) = 0 \tag{22}$$

или

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)} = -V_2\,\mathrm{k}_\mathrm{T}^\Phi\,\vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)} + \vec{\mathbf{v}}_\pi^{(\mathrm{G})}, \tag{23}$$

где скользящая составляющая $\vec{\mathbf{v}}_\pi^{(\mathrm{G})}$ переносной скорости расположена непосредственно на целевой поверхности. При этом относительная скорость $\vec{\mathbf{v}}_\Phi^{(2)}$ подхода КО к целевой поверхности удовлетворит равенству

$$\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \vec{\mathbf{v}}_\Phi^{(2)} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}. \tag{24}$$

Переносная скорость $\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}$ является функцией положения $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и времени $t^{(2)}$ достижения целевой поверхности

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}(t^{(2)}, \vec{\mathbf{r}}^{(2)}). \tag{25}$$

Частные производные $\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}/\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}/\partial t^{(2)}$ от переносной скорости $\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}$ так же, как и сама переносная скорость, не являются (в полном объёме) характеристиками движения целевой поверхности, определяются для каждой конкретной задачи отдельно и в данном разделе считаются известными.

В процессе программной реализации решение прямой вариационной задачи производится по правилу:

• выбираем требуемые вариации положения $\delta\vec{\mathbf{r}}$, скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}$ и времени $\delta t'$ в точке А ([2], рис.1).

• находим изохронные составляющие вариаций $\delta\vec{\mathbf{r}}_0^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}_0^{(2)}$ с использованием уравнений ([2], 3.38);

• в соответствии с уравнением (14) определяем вариацию $\delta t^{(2)}$ времени достижения целевой поверхности;

• рассчитываем ([2],3.37) абсолютные вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ в точке В ([2], рис.1);

• определяем относительные вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}_\Phi^{(2)}$ на движущейся целевой поверхности в соответствии с правилом

$$\begin{gathered}\delta\vec{\mathbf{r}}_\Phi^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}\delta t^{(2)}; \\ \delta\vec{\mathbf{v}}_\Phi^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} - \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}}{\partial t^{(2)}}\delta t^{(2)}.\end{gathered} \tag{26}$$

После получения относительных вариаций по формулам (26) их необходимо формально спроектировать на орты системы координат $(\vec{\mathbf{e}}_1^{(\Phi)}, \vec{\mathbf{e}}_2^{(\Phi)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)})$, введённой на целевой поверхности в точке В ([2], рис.1). Никаких дополнительных алгебраических действий не требуется.

Решение обратной вариационной задачи производится по правилу:

• выбираем требуемую относительную вариацию $\delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)}$ из условия её принадлежности целевой поверхности $(\delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)}, \vec{\mathbf{e}}_3^{(\Phi)}) = 0$ (18);

• выбираем вариацию относительной скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}_{\Phi}^{(2)}$ и времени $\delta t^{(2)}$ прихода КО к целевой поверхности;

• рассчитываем абсолютные вариации в точке В ([2], рис.1) в соответствии с правилом

$$\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}\delta t^{(2)};$$
$$\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{v}}_{\Phi}^{(2)} + \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}\delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)} + \left(\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}}{\partial t^{(2)}} + \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}\right)\delta t^{(2)}; \quad (27)$$

• подставляем полученные вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$, $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$, а также ранее выбранную вариацию $\delta t^{(2)}$ в уравнения ([2], 3.40). Получаем искомые вариации положения $\delta\vec{\mathbf{r}}$ и скорости $\delta\vec{\mathbf{v}}$ в точке А ([2], рис.1) как функции вариации времени проведения импульса $\delta t'$, которую для однозначности решения можно положить равной нулю.

Рассмотрим частный случай, когда целевая поверхность жёстко связана с вращающейся Землёй. Пусть единичный вектор $\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)}$ направлен из центра Земли в сторону Северного полюса. Если допустить, что $\vec{\boldsymbol{\omega}}_з = \omega_з\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)}$ – угловая скорость вращения Земли, то переносная скорость $\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}$ запишется в виде

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)} = \omega_з[\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} \times \vec{\mathbf{r}}^{(2)}]. \quad (28)$$

Введём в рассмотрение постоянные относительно вращающейся Земли и ортогональные между собой единичные векторы $\vec{\mathbf{j}}_з^{(1)}$ и $\vec{\mathbf{j}}_з^{(2)}$, расположенные в плоскости экватора и удовлетворяющие равенству $\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} = [\vec{\mathbf{j}}_з^{(1)} \times \vec{\mathbf{j}}_з^{(2)}]$.

Тогда, дифференцируя уравнение (28) по вектору $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$, формально получаем

$$\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)} \big/ \partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \omega_з(\vec{\mathbf{j}}_з^{(2)} \otimes \vec{\mathbf{j}}_з^{(1)} - \vec{\mathbf{j}}_з^{(1)} \otimes \vec{\mathbf{j}}_з^{(2)}). \quad (29)$$

Более того, для любого вектора $\vec{\mathbf{x}}$, определённого в точке А ([2], рис.1), окажется справедливо равенство $\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}\vec{\mathbf{x}} = \omega_з[\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} \times \vec{\mathbf{x}}]$. При этом частная производная от переносной скорости по времени достижения целевой поверхности будет равна нулю

$$\partial\vec{\mathbf{v}}_{\text{пер}}^{(2)} \big/ \partial t^{(2)} = 0. \quad (30)$$

Уравнения (26), используемые для решения прямой вариационной задачи на связанной с Землёй целевой поверхности, примут вид

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \omega_з[\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} \times \vec{\mathbf{r}}^{(2)}]\delta t^{(2)};$$
$$\delta\vec{\mathbf{v}}_{\Phi}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} - \omega_з[\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} \times \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}]. \quad (31)$$

После получения вариаций $\delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}_{\Phi}^{(2)}$ с использованием (31) они окажутся представлены в ортах абсолютной системы координат. Для получения вариаций в связанной с Землёй системе координат достаточно просто спроектировать эти вариации на соответствующие орты.

Уравнения (27), использующиеся для решения обратной задачи, в рассматриваемом частном случае перепишутся в виде

$$\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)} + \omega_з[\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} \times \vec{\mathbf{r}}^{(2)}]\delta t^{(2)};$$
$$\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)} = \delta\vec{\mathbf{v}}_{\Phi}^{(2)} + \omega_з[\vec{\mathbf{j}}_з^{(0)} \times \delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}]. \quad (32)$$

При этом вариации $\delta\vec{\mathbf{r}}_{\Phi}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}_{\Phi}^{(2)}$ предварительно должны быть представлены в абсолютной системе координат посредством простого проектирования на соответствующие орты.

2. Пример. Целевая поверхность представляет собой вертикальный конус с центром на поверхности Земли

Во многих практических задачах интересуют вариации положения и скорости КО на нижней границе сектора ответственности РЛС, представляемой в виде конической поверхности с углом места $\varepsilon_{\text{м}}$.

Местоположение КО на вращающейся Земле обозначим вектором $\vec{\mathbf{r}}_{\text{зм}}^{(\text{st})}$ и положим

$$R_{\text{зм}}^{(\text{st})} = \left\|\vec{\mathbf{r}}_{\text{зм}}^{(\text{st})}\right\|; \quad \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{зм}}^{(\text{st})} = \vec{\mathbf{r}}_{\text{зм}}^{(\text{st})} \big/ R_{\text{зм}}^{(\text{st})}. \quad (33)$$

Введём обозначение для вектора прямой дальности $\vec{\mathbf{D}}_{\text{пр}}$, определяемого в инерциальном пространстве

$$\vec{\mathbf{D}}_{\text{пр}} = \vec{\mathbf{r}}^{(2)} - \vec{\mathbf{r}}_{\text{зм}}^{(\text{st})}. \quad (34)$$

В последнем выражении вектор $\vec{\mathbf{r}}_{\text{зм}}^{(\text{st})}$ предполагается заранее представленным в абсолютном пространстве. Положим

$$\mathrm{D}_{\text{пр}} = \left\|\vec{\mathbf{D}}_{\text{пр}}\right\|; \quad \vec{\mathbf{d}}_{\text{пр}} = \vec{\mathbf{D}}_{\text{пр}} \big/ \mathrm{D}_{\text{пр}}. \quad (35)$$

Единичный вектор $\vec{\mathbf{d}}_{\text{пр}}$ (направление на цель) представим в виде

$$\vec{\mathbf{d}}_{\text{пр}} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{зм}}^{(\text{st})}\sin\varepsilon_{\text{м}} + (\vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{nor})}\cos\beta_{\text{аз}} + \vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{ost})}\sin\beta_{\text{аз}})\cos\varepsilon_{\text{м}}. \quad (36)$$

В котором единичный вектор $\vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{nor})}$ направлен из точки стояния РЛС на север, а единичный вектор $\vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{ost})}$ – на восток. Величина $\beta_{\text{аз}}$ представляет собой азимут направления на КО, отсчитываемый от Северного полюса по часовой стрелке. Примем функцию Ф (1) в виде

$$\Phi = (\vec{\mathbf{r}}^{(2)}, \vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{зм}}^{(\text{st})}) - \mathrm{D}_{\text{пр}}\sin\varepsilon_{\text{м}} - R_{\text{зм}}^{(\text{st})}. \quad (37)$$

С учётом определения (28) переносной скорости справедливы равенства

$$\partial\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{зм}}^{(\text{st})} \big/ \partial t_2 = \omega_з\cos\varphi_{\text{st}}\vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{ost})};$$
$$\partial\vec{\mathbf{D}}_{\text{пр}} \big/ \partial t^{(2)} = -\omega_з R_{\text{зм}}^{(\text{st})}\cos\varphi_{\text{st}}\vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{ost})}; \quad (38)$$
$$\partial\vec{\mathbf{D}}_{\text{пр}} \big/ \partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \mathbf{E},$$

так что

$$\partial\,\mathrm{D}_{\text{пр}} \big/ \partial t^{(2)} = -\omega_з R_{\text{зм}}^{(\text{st})}\cos\varphi_{\text{st}}(\vec{\mathbf{d}}_{\text{пр}}, \vec{\mathbf{j}}_{\text{st}}^{(\text{ost})});$$
$$\partial\,\mathrm{D}_{\text{пр}} \big/ \partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \vec{\mathbf{d}}_{\text{пр}}. \quad (39)$$

Полагая величины $\varepsilon_{\text{м}}$ и $R_{\text{зм}}^{(\text{st})}$ постоянными (заданными), дифференцируем уравнение (37). В итоге получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t^{(2)}} = \omega_з R_2 \cos\varphi_{st}\left(1+\frac{R^{(st)}_{зм}}{D_{пр}}\sin\varepsilon_м\right)(\vec{\gamma}_2, \vec{\mathbf{j}}^{(ost)}_{st});$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}} = \vec{\gamma}^{(st)}_{зм} - \vec{\mathbf{d}}_{пр}\sin\varepsilon_м, \quad (40)$$

так что

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)}}\right\| = \cos\varepsilon_м; \quad \vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_3 = \frac{\vec{\gamma}^{(st)}_{зм} - \mathbf{d}_{пр}\sin\varepsilon_м}{\cos\varepsilon_м}. \quad (41)$$

Функция $\Phi^{(P)}_2$ (4) примет вид

$$\Phi^{(P)}_2 = \varepsilon'_м D_{пр}\cos\varepsilon_м, \quad (42)$$

где угломестная скорость $\varepsilon'_м$ КО в местной сферической СК определится уравнением

$$\varepsilon'_м D_{пр} = (\vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_3, \vec{\mathbf{v}}^{(2)}_\Phi). \quad (43)$$

Коэффициенты (7) удовлетворят равенствам

$$\mathrm{k}^\Phi_f = \varepsilon'_м \frac{D_{пр}}{V_2};$$
$$\mathrm{k}^\Phi_T = \omega_з \frac{D_{пр}}{V_2}\left(1+\frac{R^{(st)}_{зм}}{D_{пр}}\sin\varepsilon_м\right)\cos\varphi_{st}\sin\beta_{аз}. \quad (44)$$

Вариация $\delta t^{(2)}$ (14) времени достижения целевой поверхности определится уравнением

$$\delta t^{(2)} = -\frac{1}{D_{пр}}\frac{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}_0, \vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_3)}{\varepsilon'_м}. \quad (45)$$

Выписанных уравнений достаточно для непосредственного программирования прямой и обратной вариационной задачи для рассматриваемой целевой поверхности.

3. Целевая поверхность, представляющая собой геоцентрическую сферу

Пересчёт вариаций с неподвижной сферы на вращающуюся, а также наоборот, с вращающейся сферы на неподвижную, производится с использованием уравнений (31) и (32). Здесь, в силу большой практической значимости, рассмотрим взаимосвязь вариаций положения и скорости КО в точке A ([2], рис.1) и в точке B, которая расположена на неподвижной сфере с центром в центре Земли и радиуса R_a. Другими словами, положим

$$\Phi = R - R_a \equiv 0, \quad (46)$$

так что

$$\partial\Phi/\partial t_2 = 0; \quad \partial\Phi/\partial\vec{\mathbf{r}}^{(2)} = \vec{\gamma}^{(2)}. \quad (47)$$

Векторы $\vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_1, \vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_2, \vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_3$ выразятся через орты системы координат в точке B соотношениями

$$\vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_1 = \vec{\mathbf{Q}}^{(2)}; \quad \vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_2 = \vec{\mathbf{c}}; \quad \vec{\mathbf{e}}^{(\Phi)}_3 = \vec{\gamma}^{(2)}. \quad (48)$$

Функция $\Phi^{(P)}_2$ (4) окажется равной радиальной скорости КО в точке пересечения его траектории с целевой поверхностью (1)

$$\Phi^{(P)}_2 = (\vec{\mathbf{v}}^{(2)}, \vec{\gamma}^{(2)}) = \dot{R}_2, \quad (49)$$

так как $\mathrm{tg}\,\theta_2 = R_2\dot{R}_2/C$, то коэффициенты k^Φ_T и k^Φ_f определятся равенствами

$$\mathrm{k}^\Phi_T = 0; \quad \mathrm{k}^\Phi_f = \sin\theta_2. \quad (50)$$

Уравнение (14), определяющее вариацию времени достижения неподвижной сферы, запишется в виде

$$\delta t^{(2)} = -\frac{(\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}_0, \vec{\gamma}^{(2)})}{V_2\sin\theta_2}, \quad (51)$$

После чего вариации положения и скорости достижения КО целевой поверхности найдутся с использованием равенств ([2], 3.37). Частные производные от времени достижения целевой поверхности (9) с учётом записи ([2], 3.2) примут вид

$$\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{R_2}{C}\mathrm{ctg}\,\theta_2(M^{(R,R)}_{0,3,1}\vec{\mathbf{Q}} + M^{(R,R)}_{0,3,3}\vec{\gamma});$$
$$\frac{\partial t^{(2)}}{\partial\vec{\mathbf{v}}} = -\frac{RR_2}{\mu}\mathrm{ctg}\,\theta_2(M^{(R,V)}_{0,3,1}\vec{\mathbf{Q}} + M^{(R,V)}_{0,3,3}\vec{\gamma}) \quad \frac{\partial t^{(2)}}{\partial t} = 1 \quad (52)$$

и полные матрицы частных производных (12) с учётом тождеств ([2], 3.13), ([2], 3.14) и ([2], 3.15) перепишутся в виде

$$\begin{cases} M^{(R,R)}_{1,1} = \cos\phi - \mathrm{ctg}\,\theta_2\sin\phi - \frac{R_2}{p}(1-\cos\phi); \\ M^{(R,R)}_{1,3} = -\frac{1}{\chi}\left[1+\frac{R_2}{P}(1-\cos\phi)\right]\mathrm{ctg}\,\theta_2; \\ M^{(R,R)}_{1,2} = M^{(R,R)}_{2,1} = M^{(R,R)}_{2,3} = M^{(R,R)}_{3,1} = M^{(R,R)}_{3,2} = M^{(R,R)}_{3,3} = 0; \\ M^{(R,R)}_{2,2} = 1 - \frac{R_2}{p}(1-\cos\phi); \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} M^{(R,V)}_{1,1} = -\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{p}W_2\,\mathrm{ctg}\,\theta_2\sin\phi; \\ M^{(R,V)}_{1,3} = -\frac{1}{\chi}\frac{R_2}{p}\mathrm{ctg}\,\theta_2\sin\phi; \\ M^{(R,V)}_{1,2} = M^{(R,V)}_{2,1} = M^{(R,V)}_{2,3} = M^{(R,V)}_{3,1} = M^{(R,V)}_{3,2} = M^{(R,V)}_{3,3} = 0; \\ M^{(R,V)}_{2,2} = \frac{R_2}{p}\sin\phi; \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} M^{(V,R)}_{1,1} = -\left(1-\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}\right)\sin\phi; \\ M^{(V,R)}_{1,2} = 0; \quad M^{(V,R)}_{1,3} = -(1-\cos\phi); \\ M^{(V,R)}_{2,1} = 0; \quad M^{(V,R)}_{2,2} = M^{(V,R)}_{1,1}; \quad M^{(V,R)}_{2,3} = 0; \\ M^{(V,R)}_{3,1} = \chi(1-\cos\phi) + \chi\,\mathrm{ctg}\,\theta_2\sin\phi; \\ M^{(V,R)}_{3,2} = 0; \quad M^{(V,R)}_{3,3} = \left(\frac{1}{\chi}+1-\cos\phi\right)\mathrm{ctg}\,\theta_2; \end{cases} \quad (55)$$

$$\begin{cases} M^{(V,V)}_{1,1} = \cos\phi - \frac{R}{P}(1-\cos\phi); \\ M^{(V,V)}_{1,2} = 0 \quad M^{(V,V)}_{1,3} = -\sin\phi; \\ M^{(V,V)}_{2,1} = 0; \quad M^{(V,V)}_{2,2} = 1 - \frac{R}{p}(1-\cos\phi); \quad M^{(V,V)}_{2,3} = 0; \\ M^{(V,V)}_{3,1} = \left(\frac{1}{\chi}+1\right)(1-\chi\cos\phi)\,\mathrm{ctg}\,\theta_2 - \chi\sin\phi; \\ M^{(V,V)}_{3,2} = 0; \quad M^{(V,V)}_{3,3} = \cos\phi + \frac{R_2}{p}\mathrm{ctg}\,\theta_2\sin\phi. \end{cases} \quad (56)$$

Матрицы частных производных (53) – (56) явным образом не зависят от функции A_2 ([2], 1.6) или, что то же самое, от полётного времени между точками A и B ([2], рис.1). Частные производные от угловой дальности перелёта удовлетворят уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \vec{\mathbf{r}}} = -\dfrac{1}{R}\{2\dfrac{R_2}{p}\left(1-\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{R}{2a}\right)\cdot\vec{\mathbf{Q}}+ \\ \quad +\left[1+\dfrac{R_2}{p}(1-\cos\phi)\right]\cdot\vec{\boldsymbol{\gamma}}\}\operatorname{ctg}\theta_2; \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = -\dfrac{R_2 \sin\phi}{C}\operatorname{ctg}\theta_2 (W_2\cdot\vec{\mathbf{Q}}-\vec{\boldsymbol{\gamma}}), \end{cases} \tag{57}$$

причём в программной реализации можно использовать тождества

$$\begin{cases} 2\dfrac{R_2}{p}\left(1-\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{R}{2a}\right)=\dfrac{R}{p}+ \\ +\operatorname{tg}\theta_2\left(\dfrac{R}{p}\operatorname{tg}\dfrac{\phi}{2}+\dfrac{1-\chi\cos\phi}{\sin\phi}\right); \\ 1+\dfrac{R_2}{P}(1-\cos\phi)=\dfrac{1}{\chi}+1-\cos\phi-\operatorname{tg}\theta_2\sin\phi; \\ W_2=(\chi+1)\operatorname{tg}\dfrac{\phi}{2}-\chi\operatorname{tg}\theta_2. \end{cases}$$

Обратные преобразования задаваемых вариаций $\delta\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ в точке B ([2], рис.1) достижения целевой поверхности к вариациям $\delta\vec{\mathbf{r}}$ и $\delta\vec{\mathbf{v}}$ в точке A производятся с использованием уравнений ([2], 3.40). В рассматриваемом примере, так же как и в случае любой неподвижной целевой поверхности, коэффициент k_{T}^{Φ} равен нулю, и вариация времени $\delta t^{(2)}$ достижения целевой поверхности не зависит от соответствующих вариаций векторов положения $\vec{\mathbf{r}}^{(2)}$ и скорости $\vec{\mathbf{v}}^{(2)}$ КО, является величиной независимой и может устанавливаться в уравнении ([2], 3.42) произвольной.

Заключение

Рассмотрены и доведены до практических вычислительных правил решения прямой и обратной вариационных задач на кеплеровой дуге с участием вариаций положений и скоростей в двух её точках, одна их которых принадлежит подвижной целевой поверхности. Представленный материал применим для непосредственного инженерного использования в процессе имитационного моделирования. Все соотношения в работе справедливы для произвольного вида кеплеровой дуги. Статья содержит полный набор необходимых для решения вариационных задач на целевой поверхности соотношений и их доказательство.

Литература.
1. В.Л. Алферьев. О частных производных на кеплеровой дуге. Российская инженерная академия. Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии"//Сборник трудов "Теоретические вопросы физики космоса, баллистики и практической космонавтики. Проблемы технической безопасности". Выпуск 13. Москва, СИП РИА, 2005.
2. В.Л. Алферьев. Свойства матриц частных производных на кеплеровой дуге. Российская инженерная академия. Секция "Инженерные проблемы стабильности и конверсии"//Сборник трудов "Теоретические вопросы физики космоса, баллистики и практической космонавтики. Проблемы технической безопасности". Выпуск 13. Москва, СИП РИА, 2005.

Материал поступил в редакцию 12. 08. 2011 г.