

УДК 531.383

© Погорелов В.А., Цыбенко С.Н., Яковлев К.Ю., Иванов С.В.
 Pogorelov V., Tsibenko S., Yakovlev K., Ivanov S.

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ВЫСОКОДИНАМИЧНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

MARCOV MODEL OF STRAPPED-DOWN GUIDANCE SYSTEM HIGH DYNAMIC FLYING VEHICLE

Аннотация. Для бесплатформенной навигационной системы, измерительный комплекс которой содержит три акселерометра, три датчика угловой скорости и баровысотомер, получены уравнения вектора состояния и его наблюдателя, ориентированные на использование методов нелинейной фильтрации, обеспечивающих требуемую точность оценивания при произвольном пространственном маневре летательного аппарата.

Annotation. For strapped-down guidance system, a measuring complex of which involves three accelerometers, three angular-rate sensors and a barometric altimeter, equations of a state vector and its observer are obtained, which use nonlinear filtration methods providing required estimation accuracy under arbitrary space maneuver of a vehicle.

Ключевые слова. Бесплатформенная навигационная система, измерительный комплекс, акселерометр, датчик угловой скорости, баровысотомер, метод нелинейной фильтрации.

Key words. Strapped-down guidance system, measuring complex, accelerometer, angular-rate sensor, barometric altimeter, nonlinear filtration method.

Введение

Результаты, достигнутые в последние годы в области создания новых прецизионных датчиков (лазерных, динамически настраиваемых, твердотельных, волоконнооптических гироскопов и т. д.) и бортовых цифровых вычислительных комплексов, построенных на базе оптических спецвычислителей, делают приоритетным использование бесплатформенных навигационных систем (БНС) в системах управления высокоскоростными летательными аппаратами (ЛА) [1].

Однако отказ от дорогостоящей гиросtabilизированной платформы, предохраняющей акселерометры

от влияния угловых и линейных вибраций, резко снижает помехоустойчивость навигационной системы ЛА, что приводит к необходимости применения в алгоритмах навигации методов стохастической фильтрации.

Существующие подходы к фильтрации помех измерений чувствительных элементов предполагают линеаризацию уравнений состояния БНС, что увеличивает ошибку навигации ЛА и, как следствие, сокращает время его автономного движения [2]. Таким образом, возникает необходимость в разработке нового подхода к решению задачи автономной навигации ЛА, позволяющего, с одной стороны, увеличить интервал его автоном-

Погорелов Вадим Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры «Системы управления ракет» Ростовского военного института Ракетных войск;

Цыбенко Сергей Николаевич – преподаватель кафедры «Системы управления ракет» Ростовского военного института Ракетных войск;

Яковлев Константин Юрьевич – заместитель начальника кафедры «Системы управления ракет» Ростовского военного института Ракетных войск;

Иванов Станислав Валерьевич – адъюнкт кафедры «Системы управления ракет» Ростовского военного института Ракетных войск, тел. 8-904-502-08-80.

Pogorelov Vadim – cand. sc. (tech) assistant professor, the chief of the department of the rocket control systems. Rostov Military Institute of Rocket Troops;

Tsibenko Sergey – the teacher of the department of the rocket control systems. Rostov Military Institute of Rocket Troops;

Yakovlev Konstantin – the vice-chief of the department of the rocket control systems. Rostov Military Institute of Rocket Troops.

Ivanov Stanislav – junior scientific assistant of department of the rocket control systems. Rostov Military Institute of Rocket Troops, captain, tel. 8-904-502-08-80.

ного движения, а с другой – обеспечить на нем требуемую точность определения параметров движения ЛА. Рассмотрим далее один из возможных способов решения этой задачи.

Синтез вектора состояния автономной БНС

Для решения поставленной задачи оценивания вектора состояния ЛА предварительно запишем уравнения исследуемой автономной БНС при самых общих предположениях о характере движения ЛА и погрешностях измерительного комплекса. Необходимо подчеркнуть, что при данном подходе обеспечивается требуемая точность оценки вектора состояния БНС на длительном интервале времени автономного движения ЛА. Следуя [3], введем в рассмотрение следующие правые системы координат (СК):

- инерциальную (ИСК) I с началом в центре Земли;
- сопровождающую (ССК) $S OXYZ$, начало которой совпадает с центром масс ЛА, а плоскость OXY относительно оси Z не вращается;
- приборную (ПСК) $J Oxyz$, оси которой направлены по соответствующим осям чувствительности приборов, входящих в состав измерительного комплекса ЛА.

Считаем также, что в состав измерительного комплекса входят три акселерометра, оси измерения которых ортогональны и совпадают с соответствующими осями ПСК, и баровысотомер, удовлетворяющий заданным требованиям по точности измерения в предполагаемом режиме функционирования объекта.

В качестве модели шумов измерений чувствительных элементов НС примем белый гауссовский шум (БГШ). Такой подход не накладывает принципиальных ограничений на решение поставленной задачи, поскольку при необходимости путем расширения вектора состояния за счет введения формирующих фильтров оказывается возможным получить из БГШ процесс с требуемым законом распределения.

Для синтеза вектора состояния БНС необходимо определить через его переменные текущую ориентацию ССК относительно ПСК. Для этого предварительно рассмотрим текущую ориентацию ПСК и ССК относительно ИСК.

Взаимная текущая ориентация трехгранника J относительно I описывается известной системой кинематических уравнений [4]

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \Phi(\lambda) \omega; \tag{1}$$

$$\lambda_1(0) = \lambda_{1_0}; \quad \lambda_2(0) = \lambda_{2_0};$$

$$\lambda_3(0) = \lambda_{3_0}; \quad \lambda_4(0) = \lambda_{4_0},$$

где $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ – проекции абсолютной угло-

вой скорости ССК на ее оси, равные

$$\omega_x = \omega_{x_0} - \Omega \cos \varphi \sin \chi,$$

$$\omega_y = \omega_{y_0} + \Omega \cos \varphi \cos \chi,$$

$$\omega_z = \Omega \sin \varphi;$$

$\omega_{x_0}, \omega_{y_0}$ – проекции угловой скорости ССК на ее оси, обусловленные движением ПО относительно Земли;

$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]^T$ – вектор параметров Родрига-Гамильтона [4];

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_4 & -\lambda_3 \\ -\lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ – кватернионная матрица;}$$

Ω – скорость вращения Земли;

φ – широта центра масс ЛА, которую можно выразить через параметры Родрига-Гамильтона следующим образом:

$$\varphi = \arctg \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3 \lambda_4)}{1 - 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)} + k\pi;$$

$$\chi = \arctg \frac{2(\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3)}{1 - 2(\lambda_3^2 + \lambda_4^2)} + k\pi;$$

$$k = \overline{0, \infty}.$$

В свою очередь, текущая ориентация трехгранника ПСК относительно ИСК описывается вектором $\mu = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4]^T$, записанным в параметрах Родрига-Гамильтона

$$\dot{\mu} = \frac{1}{2} \Phi(\mu) \omega_J; \tag{2}$$

$$\mu_1(0) = \mu_{1_0}; \quad \mu_2(0) = \mu_{2_0};$$

$$\mu_3(0) = \mu_{3_0}; \quad \mu_4(0) = \mu_{4_0},$$

$$\text{где } \Phi(\mu) = \begin{bmatrix} -\mu_2 & -\mu_3 & -\mu_4 \\ \mu_1 & \mu_4 & -\mu_3 \\ -\mu_4 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & -\mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} \text{ – кватернионная матрица;}$$

$\omega_J = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения приборного трехгранника, который может быть получен по показаниям $\mathbf{z}_d = [z_x \quad z_y \quad z_z]^T$ датчиков угловой скорости (ДУС)

$$\omega_J = \mathbf{z}_d - \mathbf{W}_d, \tag{3}$$

где $\mathbf{W}_d = [W_x \quad W_y \quad W_z]^T$ – вектор аддитивных помех измерения ДУСов, который аппроксимируется БГШ с нулевым средним и матрицей интенсивности \mathbf{D}_d . С учетом (2) угловое движение БНС (1) может быть представлено в векторном виде

$$\dot{\mu} = \frac{1}{2} \Phi(\mu) (\mathbf{z}_d - \mathbf{W}_d) \tag{4}$$

Для окончательного синтеза вектора состояния навигационной системы ЛА необходимо далее в замкнутой форме представить правую часть системы уравнений (1).

Учтем, что проекции угловой скорости $\omega_{X_0}, \omega_{Y_0}$ трехгранника S связаны с проекциями линейной скорости объекта V_X, V_Y на соответствующие оси сопровождающей СК линейными соотношениями

$$V_X = -\omega_{Y_0}(r+h); \quad V_Y = \omega_{X_0}(r+h), \quad (5)$$

где r – радиус Земли;

h – высота объекта над уровнем моря, которая может быть получена по показаниям Z_h баровысотомера

$$Z_h = h + W_h. \quad (6)$$

Входящая в выражение (6) погрешка измерения W_h описывается в общем случае стохастическим нелинейным дифференциальным уравнением не ниже 2-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{W}_h &= f_{h_0}(Z, W_h, W_{h_1}, t) + f_{h_1}(Z, W_h, W_{h_1}, t)\xi_{h_1} \\ W_h = W_{h_1} &= f_{h_2}(Z, W_h, W_{h_1}, t) + f_{h_3}(Z, W_h, W_{h_1}, t)\xi_{h_2}; \end{aligned} \quad (7)$$

где $f_i, i=0,3$ – известные нелинейные функции, определяемые типом прибора;

$\xi_h = \begin{bmatrix} \xi_{h_1} \\ \xi_{h_2} \end{bmatrix}$ – нормальный белый гауссовский вектор-шум.

Для синтеза искомым выражений проекций V_X и V_Y обратимся к основному уравнению инерциальной навигации [5]

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} + (2\mathbf{\Omega}_3 + \mathbf{\omega}_0) \times \mathbf{V} - \mathbf{g}, \quad (8)$$

где \mathbf{a} – ускорение, измеряемое акселерометрами в ССК;

$\mathbf{\omega}_0 = [\omega_{X_0} \ \omega_{Y_0} \ 0]^T$ – вектор угловой скорости ССК, обусловленной движением ПО относительно Земли;

$\mathbf{V} = [V_X \ V_Y \ V_Z]^T$ – вектор скорости центра масс ЛА относительно Земли;

$\mathbf{\Omega}_3 = [-\Omega \cos \varphi \sin \chi \ \Omega \cos \varphi \cos \chi \ \Omega \sin \varphi]^T$ – вектор угловой скорости вращения Земли в ССК;

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \Omega^2(r+h) \cos \varphi \sin \varphi \sin \chi \\ -\Omega^2(r+h) \cos \varphi \sin \varphi \cos \chi \\ \Omega^2(r+h) \cos^2 \varphi + g_0 \end{bmatrix} \text{ – вектор ускорения силы тяжести;}$$

g_0 – гравитационное ускорение, в наиболее общем случае рассматриваемое как функция $g_0 = g(R, \varphi, h)$ высоты h и широты φ , аппроксимируемая конечным рядом Лежандра.

Стохастическое выражение для вектора ускорения \mathbf{a} может быть получено из выражения вектора выходных сигналов акселерометров $\mathbf{z}_a = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ в следующем виде:

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^T(\mathbf{z}_a - \mathbf{w}_a), \quad (9)$$

где $\mathbf{C}(\mu, \lambda) = \mathbf{D}(\mu) \cdot \mathbf{B}^T(\lambda)$ – матрица направляющих

косинусов в параметрах Родрига-Гамильтона, определяющая ориентацию ПСК относительно ССК;

$\mathbf{D}(\mu)$ – матрица поворота 2-го рода в параметрах Родрига-Гамильтона [4], определяющая ориентацию ПСК относительно ИСК

$$\mathbf{D}(\mu) = \begin{bmatrix} 1 - 2(\mu_2^2 + \mu_3^2) & 2(\mu_1\mu_2 + \mu_0\mu_3) & 2(\mu_1\mu_3 - \mu_0\mu_2) \\ 2(\mu_1\mu_2 - \mu_0\mu_3) & 1 - 2(\mu_1^2 + \mu_3^2) & 2(\mu_2\mu_3 + \mu_0\mu_1) \\ 2(\mu_1\mu_3 + \mu_0\mu_2) & 2(\mu_2\mu_3 - \mu_0\mu_1) & 1 - 2(\mu_1^2 + \mu_2^2) \end{bmatrix};$$

$\mathbf{B} = \mathbf{D}(\lambda)$ – матрица 2-го рода в параметрах Родрига-Гамильтона, определяющая ориентацию ССК относительно ИСК;

$\mathbf{w}_a = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ – вектор помех акселерометров, который в общем случае может быть описан БГШ с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей интенсивностей \mathbf{D}_a .

Из первого и второго уравнений системы (8) с учетом (6), (7) и (9) получим стохастические выражения для проекций V_X и V_Y

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_X \\ \dot{V}_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} (\mathbf{z}_a - \mathbf{w}_a) + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ (2\mathbf{\Omega}_3 + \mathbf{\omega}_0) \times \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ \dot{Z}_h - f_{h_0} - f_{h_1}\xi_{h_1} \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega^2(r+h) \cos \varphi \sin \varphi \cos \chi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Объединяя в единую систему уравнения (3), (4), (7) и (8), в окончательном виде получим вектор состояния исследуемой БНС

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \Phi(\lambda) \left\{ (r + Z_h - W_h)^{-1} \begin{bmatrix} -V_Y \\ V_X \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \cos \varphi \sin \chi \\ \Omega \cos \varphi \cos \chi \\ \Omega \sin \varphi \end{bmatrix} \right\};$$

$$\dot{\mu} = \frac{1}{2} \Phi(\mu) (\mathbf{z}_a - \mathbf{w}_a);$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_X \\ \dot{V}_Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} (\mathbf{z}_a - \mathbf{w}_a) + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ (2\mathbf{\Omega}_3 + \mathbf{\omega}_0) \times \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ \dot{Z}_h - f_{h_0} - f_{h_1}\xi_{h_1} \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega^2(r+h) \cos \varphi \sin \varphi \cos \chi \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\dot{W}_h = f_{h_0}(Z_h, W_h, W_{h_1}, t) + f_{h_1}(Z_h, W_h, W_{h_1}, t)\xi_{h_1};$$

$$\dot{W}_h = f_{h_2}(Z_h, W_h, W_{h_1}, t) + f_{h_3}(Z_h, W_h, W_{h_1}, t)\xi_{h_2}$$

или в каноническом виде

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{t}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{Y}, \mathbf{t})\xi,$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{Y}, t) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Phi(\lambda) \left\{ (r+Z_h-W_h)^{-1} \begin{bmatrix} -V_Y \\ V_X \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \cos \varphi \sin \chi \\ \Omega \cos \varphi \cos \chi \\ \Omega \sin \varphi \end{bmatrix} \right\} \\ \frac{1}{2}\Phi(\mu)\mathbf{Z}_d \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} (\mathbf{Z}_a - \mathbf{W}_a) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ (2\Omega_3 + \omega_0) \times \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ \dot{Z}_h - f_{h_0} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega^2(r+h)\cos\varphi\sin\varphi\cos\chi \\ 0 \end{bmatrix} \\ f_{h_0} \\ f_{h_2} \end{bmatrix} \text{--- вектор } \dim(\mathbf{F}) = 12 \times 1;$$

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{Y}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2}\Phi(\mu) : \mathbf{0} \\ \mathbf{0} : \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ (2\Omega_3 + \omega_0) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_{h_1} \end{bmatrix} \right\} : \mathbf{0} \\ \mathbf{0} : f_{h_1} : \mathbf{0} \\ \mathbf{0} : f_{h_2} \end{bmatrix} \text{--- матрица } \dim(\mathbf{F}_0) = 12 \times 8;$$

$\mathbf{Y} = [\lambda \ \mu \ V_X \ V_Y \ W_{h_1} \ W_{h_2}]^T$ – вектор состояния навигационной системы ЛА $\dim(\mathbf{Y}) = 12 \times 1$;

$\zeta = [\mathbf{W}_d \ \mathbf{W}_a \ \xi_{h_1} \ \xi_{h_2}]^T$ – вектор помех измерения $\dim(\zeta) = 8 \times 1$.

Синтез уравнения наблюдения

Для последующего использования методов оптимальной фильтрации необходимо получить уравнение наблюдения за вектором \mathbf{Y} , т.е. аналитическую модель информационно-измерительного сигнала, явно зависящую от одного или нескольких компонентов вектора \mathbf{Y} и позволяющую построить его апостериорную плотность в соответствии с известными в теории фильтрации подходами [6].

Используя третье уравнение системы (8) и выражения проекций параметров движения в ССК через выходные сигналы измерителей и их помех, получим уравнение наблюдателя за вектором состояния \mathbf{Y}

$$\begin{aligned} Z_3 = 1/C_{33} \{ & \ddot{Z}_h - f_{h_2} - [C_{31} \ C_{32}] \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \\ & + (2\Omega_X + (r+Z_h-W_h)^{-1}V_Y)V_Y - \\ & - (2\Omega_Y - (r+Z_h-W_h)^{-1}V_X)V_X + \\ & + \Omega^2(r+h)\cos^2\varphi + g_0 \} - \\ & - 1/C_{33} \{ [C_{31} \ C_{32} \ C_{33}] \mathbf{W}_a + f_{h_3} \xi_{h_2} \}. \end{aligned}$$

Или в каноническом виде

$$Z_3 = H(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{H}_0(\mathbf{Y}, t) \begin{bmatrix} \mathbf{W}_a \\ \xi_{h_2} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{H}_0 = -1/C_{33} [C_{31} \ C_{32} \ C_{33}] f_{h_3}$ – вектор-строка $\dim(\mathbf{H}_0) = 1 \times 2$;

$$H = 1/C_{33} \left\{ \begin{aligned} & \ddot{Z}_h - f_{h_2} - [C_{31} \ C_{32}] \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \\ & + (2\Omega_X + (r+Z_h-W_h)^{-1}V_Y)V_Y - \\ & - (2\Omega_Y - (r+Z_h-W_h)^{-1}V_X)V_X + \\ & + \Omega^2(r+h)\cos^2\varphi + g_0 \end{aligned} \right\}$$

Заключение

Для иллюстрации возможности практического использования такого подхода было рассмотрено численное моделирование движения БНС совместно с текущей оценкой навигационных параметров на временном интервале 0÷10000 с при шаге $t = 0,1$ с и значениях характеристик помех измерительного комплекса, которыми обладают используемые в настоящее время ДУС, БВМ и акселерометры. Оценка вектора состояния \mathbf{Y} осуществлялась на основе аппроксимации апостериорной плотности вероятности вектора состояния – гауссовской.

По окончании временного интервала моделирования максимальные ошибки оценивания переменных вектора состояния составили: по вертикальной составляющей скорости движения ЛА – 2%, по высоте – 6%, по углам ориентации – 0,1%, по угловой скорости – 0,03%.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о возможности эффективного практического использования предложенного нами подхода к синтезу вектора состояния в форме объект-наблюдатель в реальных навигационных системах.

Литература

1. Ривкин С.С., Берман З.М., Окон И.М. *Определение параметров ориентации объекта бесплатформенной инерциальной системы*. Санкт-Петербург, ГНЦ РФ –ЦНИИ «Электронприбор», 1996.
2. Кузовков Н. Г., Салычев О. С. *Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация*. М., 1982.
3. Ишлинский А. Ю. *Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация*. М: Наука, 1976.
4. Онищенко С.М. *Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации*. Автономные системы. Киев: Наукова думка, 1983.
5. *Командно-измерительные приборы* / Под. ред. БИ.Назарова – М.: МО, 1975.
6. Хуторцев В.В., Соколов С.В., Шевчук П.С. *Современные принципы управления и фильтрации в стохастических системах*. М.: Радио и связь, 2001.

Материал поступил в редакцию 22. 02. 2011 г.