

© Новиков Р. Ю.
Novikov R.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

THE NUMERICAL SOLUTION OF HYPERBOLIC EQUATIONS

Аннотация. В статье исследовано численное решение уравнения гиперболического типа с помощью конечно-разностной схемы. Была проанализирована погрешность при различных типах конечно-разностных схем, аппроксимациях граничных условий, сеточных и временных шагах. Показана возможность добиться высокой точности решения путём подбора оптимальных шагов.

Annotation. In this article numerical solution of the hyperbolic partial differential equation was researched with mesh scheme. Also was analysed faulty proportion of different mesh schemes, approximations of boundary conditions, time and grid steps. The possibility to get high accuracy of computations with help of collecting effective steps was shown as well.

Ключевые слова. Уравнение гиперболического типа, явная схема крест, неявная схема, конечно-разностная схема.

Key words. Hyperbolic partial differential equation, explicit scheme cross, no explicit scheme, mesh scheme.

1. Постановка задачи

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию двух вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечную аппроксимацию с первым порядком, двухточечную аппроксимацию со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров t, h .

$$\begin{aligned} &(\partial^2 u)/(\partial t^2) + 2(\partial u)/(\partial t) = \\ &= (\partial^2 u)/(\partial x^2) + 2(\partial u)/(\partial x) - 3u; \\ &u(0,t) = \exp(-t)\cos(2t); \\ &u(\pi/2,t) = 0; \\ &u(x,0) = \exp(-x)\cos x; \\ &u_x(x,0) = -\exp(-x)\cos x. \end{aligned}$$

Известное аналитическое решение этого уравнения:

$$U(x,t) = \exp(-t-x)\cos x \cos(2t).$$

2. Теоретическая часть

2.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа

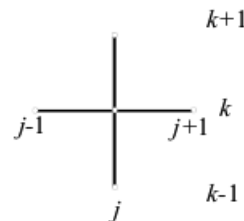
Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\begin{aligned} &(\partial^2 u)/(\partial t^2) = a^2(\partial^2 u)/(\partial x^2), \quad 0 < x < 1, t > 0; \\ &u(0,t) = \varphi_0(t), \quad x=0, t > 0; \\ &u(1,t) = \varphi_1(t), \quad x=1, t > 0; \\ &u(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, t=0; \\ &(\partial u(x,0))/\partial t = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, t=0. \end{aligned}$$

На пространственно-временной сетке будем аппроксимировать дифференциальное уравнение одной из следующих конечно-разностных схем:

- явная $(u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1})/\tau^2 = (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k)/h^2 + O(\tau^2 + h^2), j=1, N-1, k=1, 2, \dots$

с шаблоном



Новиков Роман Юрьевич – студент Московского авиационного института «МАИ», тел. +7(916)711-74-80.

Novikov Roman – student of Moscow Aviation Institute, phone: +7(916)711-74-80.

С ее помощью решение u_j^{k+1} определяется сразу, поскольку значения сеточных функции u_j^{k-1} , u_j^k на нижних временных слоях должны быть известны. В соответствии с шаблоном для этой схемы порядок аппроксимации равен двум как по пространственной, так и по временной переменной. При этом явная конечно-разностная схема для уравнения условно устойчива с условием $\sigma=(a^2\tau^2)/h^2 < 1$, накладываемым на сеточные характеристики τ и h ;

- неявная

$$(u_j^{k+1}-2u_j^k+u_j^{k-1})/\tau^2=$$

$$(u_{j+1}^{k+1}-2u_j^k+u_{j-1}^{k-1})/h^2+O(\tau^2+h^2), j=1, N-1, k=1, 2, \dots$$

с шаблоном

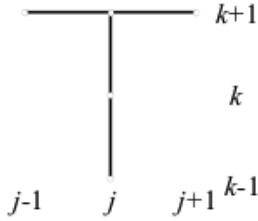


Схема обладает абсолютной устойчивостью. Ее можно свести к СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемой методом прогонки.

В обеих схемах необходимо знать значения

$$u_j^{k-1}, u_j^k, j=1, N-1, k=1, 2, \dots$$

на нижних временных слоях. Для $k=1$ это делается следующим образом:

$$u_j^0 = \Psi_1(x_j), j=0, \dots, N,$$

где $\Psi_1(x)$ – функция из начального условия.

2.2. Аппроксимация граничных условий, содержащих производные

В задачах математической физики вообще, и в задачах теплопроводности в частности, граничные условия 1-го рода аппроксимируются точно в узлах на границе расчетной области. Граничные условия 2-го и 3-го рода отличаются тем, что в них присутствует производная первого порядка искомой функции по пространственной переменной. Поэтому для замыкания конечно-разностной схемы необходима их аппроксимация. Простейшим вариантом является аппроксимация производных направленными разностями первого порядка:

$$\partial u / \partial x = (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) / h + O(h).$$

Тогда, в общем случае граничных условий 3-го рода, уравнения, связывающие значения искомой функции в двух крайних узлах разностной сетки, выглядят следующим образом:

$$\alpha(u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) / h + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}) + O(h);$$

$$\gamma(u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) / h + \delta u_N^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}) + O(h).$$

Принципиальной особенностью рассмотренного выше подхода является первый порядок аппроксимации

граничных условий. Т.е. порядок аппроксимации в граничных узлах ниже порядка аппроксимации во внутренних узлах расчетной области. При этом глобальный порядок аппроксимации (во всей расчетной области) равен наименьшему относительно всех узлов сетки порядку аппроксимации.

Одним из способов повышения порядка аппроксимации граничных условий является использование формул численного дифференцирования второго порядка.

3. Практическая часть

3.1. Конечно-разностная схема

Для представленного уравнения конечно-разностные схемы примут следующий вид:

- явная

получим её, используя шаблон типа крест,

где

$$\partial u / \partial t = (u_j^k - u_j^{k-1}) / \tau; \partial u / \partial x = (u_{(j+1)}^k - u_{(j-1)}^k) / h;$$

$$(\partial^2 u) / (\partial x^2) = (u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) / \tau^2;$$

$$(\partial^2 u) / (\partial t^2) = (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) / h^2.$$

Перепишем представленное уравнение в виде

$$(u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) / \tau^2 + (u_j^{k+1} - u_j^{k-1}) / \tau =$$

$$= (u_{(j+1)}^k - 2u_j^k + u_{(j-1)}^k) / h^2 + (u_{(j+1)}^k - u_{(j-1)}^k) / h - 3\tau^2 u_j^k,$$

откуда выразим значение искомой функции на новом временном слое

$$u_j^{k+1} = (u_j^{k-1}(\tau - 1) + u_{(j-1)}^k(\tau^2/h^2 - \tau^2/h)) / (1 + \tau) +$$

$$+ u_j^k(2 - 2\tau^2/h^2 - 3\tau^2) + u_{(j+1)}^k(\tau^2/h^2 - \tau^2/h) / (1 + \tau);$$

- неявная

строится по аналогии с явной, за исключением, того что уравнение строится относительно трёх неизвестных на новом временном слое

$$(u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) / \tau^2 + (u_j^{k+1} - u_j^{k-1}) / \tau =$$

$$= (u_{(j+1)}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{(j-1)}^{k+1}) / h^2 +$$

$$+ (u_{(j+1)}^{k+1} - u_{(j-1)}^{k+1}) / h - 3\tau^2 u_j^{k+1}.$$

После упрощения получим коэффициенты при диагональных элементах

$$u_{(j-1)}^{k+1}(\tau^2/h^2 - \tau^2/h) + u_j^{k+1}(-1 - \tau - 2\tau^2/h^2 - 3\tau^2) +$$

$$+ u_{(j+1)}^{k+1}(\tau^2/h^2 - \tau^2/h) = u_j^{k-1}(1 - \tau) - 2u_j^k.$$

Неизвестные $u_{(j-1)}^{k+1}$, u_j^{k+1} , $u_{(j+1)}^{k+1}$ будем искать как решение СЛАУ методом прогонки.

3.2. Аппроксимация граничных условий

Граничные условия первого рода, поэтому они будут аппроксимироваться точно на границе

$$u_0^k = \exp(-t) \cos(x); u_N^k = 0.$$

3.3. Аппроксимация начальных условий

На нулевом слое

$$u_j^0 = \Psi_1(x_j).$$

На первом слое:

- первый порядок

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau;$$

• второй порядок

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + \tau^2/2(\dot{\psi}_1 + 2\dot{\psi}_1 - 3\psi_1 - 2\dot{\psi}_2),$$

где

$$\psi_1 = \exp(-x)\cos(x);$$

$$\psi_2 = -\exp(-x)\cos(x);$$

$$\dot{\psi}_1 = -\exp(-x)(\sin(x) + \cos(x));$$

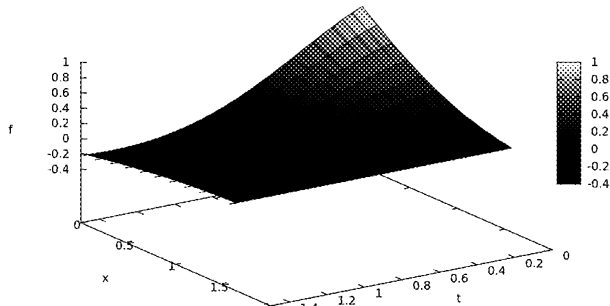
$$\dot{\psi}_2 = \exp(-x)(\sin(x) + \cos(x));$$

$$\dot{\psi}_1 = 2\exp(-x)\sin(x).$$

4. Вычисления

4.1. Численное решение

Используя формулу для явной схемы и аппроксимацию начального условия второго порядка из п. 3, построим график поверхности уравнения (рис. 1) с шагом по сетке $\tau = \pi/20$ на промежутке $[0; \pi/2]$, шагом по времени $h = \pi/60$ в диапазоне $[0; \pi/2]$.



4.2. Погрешность

Рис.1. График решения

Погрешность вычисления будем считать как норму вектора разности (максимальное значение по модулю среди элементов) между аналитическим решением и полученным (рис. 2-5), то есть

$$\delta \| u^k_{\text{аналитическое}} - u^k \| = \max | u_j^k |, k=0..N, j=0..I;$$

$$u^k = (u^k_{\text{аналитическое}})_0 - u_0^k, u^k_{\text{аналитическое}})_1 - u_1^k)^T.$$

Исследуем погрешность при различных сеточных параметрах

1. $\tau = \pi/30, h = \pi/60$:

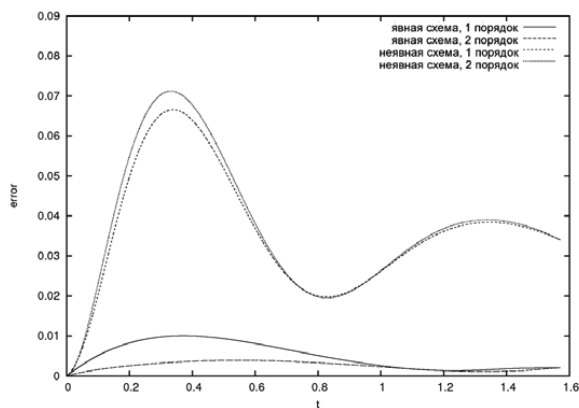


Рис.2. Погрешности при $\tau = \pi/30, h = \pi/60$

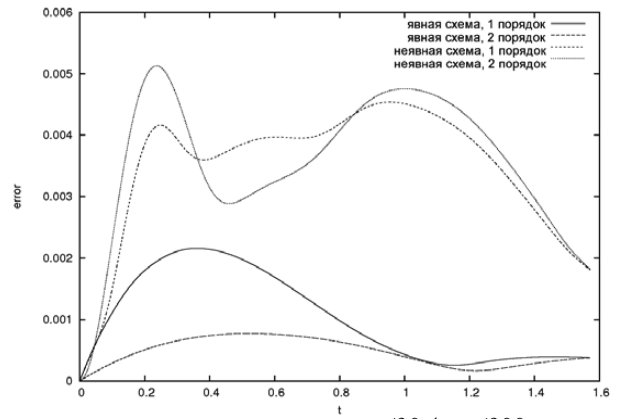


Рис.3. Погрешности при $\tau = \pi/30, h = \pi/300$

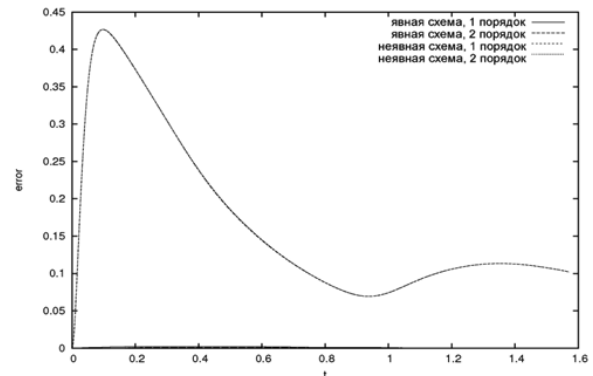


Рис.4. Погрешности при $\tau = \pi/30, h = \pi/300$

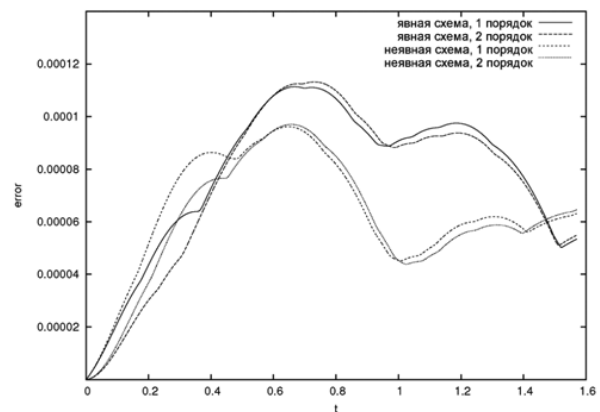


Рис.5. Погрешности при $\tau = \pi/30, h = \pi/30000$

По графику (рис. 2) видно что явная схема даёт преимущество, причём значительное.

2. $\tau = \pi/30, h = \pi/300$.

При уменьшении шага сетки в 5 раз точность явной схемы с аппроксимацией 2-го порядка возросла примерно в 10 раз (рис. 3).

3. $\tau = \pi/30, h = \pi/300$

При уменьшении шага по времени мы получаем лишь небольшой прирост точности явной схемы и сильный провал при использовании неявной (рис. 4).

4. $\tau = \pi/30, h = \pi/30000$

Малые значения шага сетки дают точность порядка $1/10000$, при таких значениях неявная схема начинает давать преимущество (рис. 5), но совсем малое.

Дальнейшее уменьшение шага даёт лишь незначительное уменьшение погрешности, однако трудоёмкость возрастает в разы.

4.3. Время выполнения

Проанализируем время, затрачиваемое на расчет задачи при различных параметрах

По графику (рис. 6) видно что явная схема считается значительно быстрее, так как не требуется решать на каждом слое СЛАУ. При уменьшении шага ситуация аналогичная (рис. 7, 8) – двукратное преимущество у явной схемы.

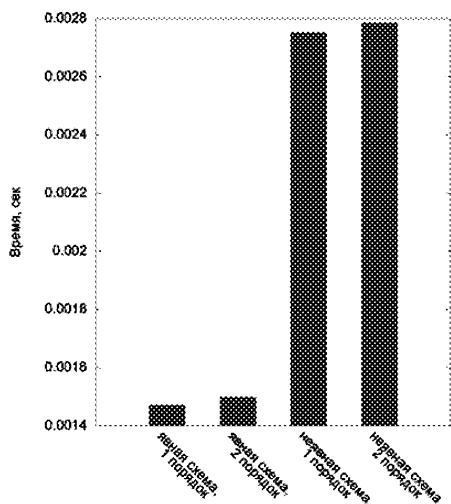


Рис.6. Время расчета при $\tau=\pi/30$, $h=\pi/60$

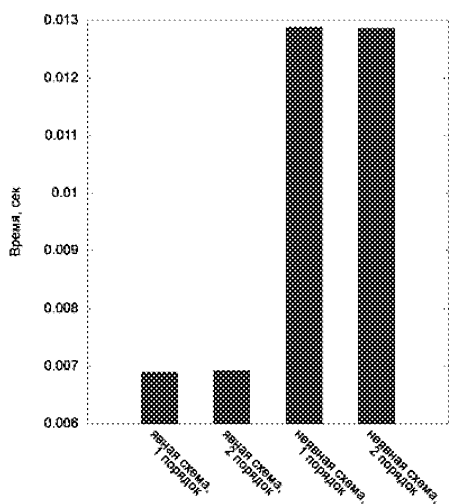


Рис.7. Время расчета при $\tau=\pi/30$, $h=\pi/300$

Замечание. Вычисления проводились на компьютере с конфигурацией: Intel i7 920, 6 GbRAM. Полученные

Литература

1. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. //Издательство Высшая школа, 2006.
2. Формалев В.Ф. Метод конечных элементов в задачах теплообмена. //Изд-во МАИ, 1991.

Материал поступил в редакцию 24. 03. 2011 г.

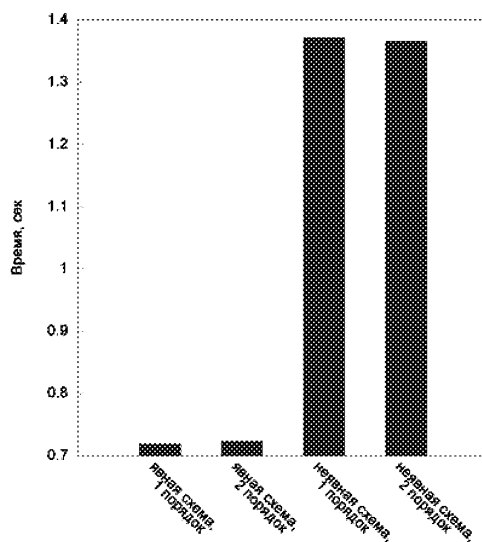


Рис.8. Время расчета при $\tau=\pi/30$, $h=\pi/30000$

временные показатели могут показаться довольно низкими для такой платформы, но так как реализация алгоритма решения была написана на скриптовом языке Ruby(выбор языка был обоснован удобством разработки и нативной поддержкой длинной арифметики), а его отставание от компилируемых языков (например, С) на арифметических операциях может достигать 5000 раз! Поэтому полученное время на графиках можно считать приемлемым.

5. Выводы

На основе проведенных исследований получены следующие результаты:

- 1.Конечно-разностная схема может быть использована при решении уравнений в частных производных, при удачном выборе шага решения получаются высокоточными.
2. Предложенный подход можно использовать в уравнениях, не имеющих точного решения.
3. Несмотря на то что неявная схема более ресурсоёмка, явная схема даёт лучшую точность в большинстве случаях.

6. Заключение

Работа может быть полезна в задачах теплопроводности, т. к. не для всех задач удаётся найти аналитическое решение, используя данный подход удаётся добиться численного решения с приемлемой точностью. Практические задачи теплопроводности могут включать в себя разнообразные проблемы, такие как распределение температур на обшивке космического корабля при посадке для подбора оптимальной скорости.