УДК 629.7.05

© Морозов В.В., Пустовалов Е.В., Клещенко А.Э.
Morozov V., Pustovalov E., Kleschenko A.

СПОСОБ ОПИСАНИЯ УГЛОВОГО И ЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

WAY OF DESCRIBING THE ANGULAR AND LINEAR MOTION OF A RIGID BODY

Аннотация. *Предложен способ описания углового и линейного движения твердого тела. Обоснован выбор численного метода решения матричного кинематического уравнения и перепроектирования кажущейся скорости на опорные навигационные оси для бесплатформенной инерциальной навигационной системы.*

Annotation. *The mode of description of angular and linear movement of a rigid body is proposed. The choice of a numerical method of solution of the matrix kinematic equation and the redesign of a seeming velocity on basic navigational axes for a strapdown inertial navigational system is justified.*

Ключевые слова. *Бесплатформенная инерциальная навигационная система, угловое движение твердого тела, матрица направляющих косинусов.*

Key words. *Strapdown inertial navigational system, angular rigid body movement, matrix of direction cosines.*

Выбор параметров ориентации и методов интегрирования кинематических уравнений углового движения представляет собой одну из основных проблем, возникающих при практической разработке бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). Это связано с тем, что задача построения аналитической инерциальной системы координат, включающая задачу вычисления параметров ориентации и задачу пересчета кажущейся скорости из связанной системы координат в инерциальную, предъявляет наиболее жесткие требования к производительности навигационного вычислителя.

Матрица направляющих косинусов С0С, используемая для вычисления проекций какого-либо вектора на опорные навигационные оси (если известны его проекции на оси системы координат, связанной с движущимся объектом реализуемой в БИНС), может быть определена путем решения матричного кинематического дифференциального уравнения Эйлера в форме Пуассона [1]:

$$\dot{C}_{OC} = C_{OC}\left[\overline{\omega}_{OC}\times\right], \qquad (1)$$

где $\left[\overline{\omega}_{OC}\times\right]=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$ – кососимметрическая матрица, элементами которой являются проекции вектора угловой скорости $\overline{\omega}_{OC}$ системы координат, связанной с объектом, относительно опорной системы координат.

Частота и порядок численного метода решения матричного кинематического уравнения и перепроектирования кажущейся скорости на опорные навигационные оси определяются характером углового и линейного движения объекта, требованиями точности вычисления и точности БИНС. Для снижения требований к бортовому навигационному вычислителю необходимо матричное кинематическое дифференциальное уравнение (1) свести к решению векторного дифференциального уравнения:

$$\dot{\overline{\varphi}}_{OC}(t) = \overline{\omega}_{OC}(t) + \dot{\overline{\mu}}_{OC}(t), \qquad (2)$$

где $\overline{\varphi}_{OC}(t)$ – вектор ориентации, обладающий следующим свойством: если в момент времени t выбранная опорная система координат будет повернута вокруг оси,

Морозов Василий Викторович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник отдела, ФГУП ЦНИИмаш, тел.(495)513-5396;
Пустовалов Евгений Владимирович – кандидат технических наук, доцент, заместитель начальника отдела, ФГУП ЦНИИмаш;
Клещенко Александр Эдуардович - кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник, ФБУ «4 ЦНИИ Минобороны России».

Morozov Vasiliy - candidate of technical sciences, senior research officer, head of department, TSNIImash, tel.(495)513-5396;
Pustovalov Evgeny - candidate of technical sciences, senior lecturer on a speciality, deputy head of department, TSNIImash
Kleschenko Aleksandr- candidate of technical sciences, senior research officer, leading research officer, FBI «4 CRI Russian Defense Ministry».

совпадающей с направлением этого вектора, на угол, равный модулю этого вектора, то она совпадет с осями связанной системы координат.

Величина $\bar{\omega}_{OC}(t)$ в уравнении (2) представляет собой вектор угловой скорости связанной системы координат относительно опорной системы координат, а $\dot{\bar{\mu}}_{OC}(t)$ есть вектор скорости некоммутативного поворота.

Вектор $\bar{\varphi}_{OC}(t)$ вычисляется в соответствии с уравнением (2). После этого матрица направляющих косинусов может быть найдена как функция векторного аргумента $\bar{\varphi}_{OC}(t)$

$$C_{OC}(\bar{\varphi}_{OC}) = \frac{\varphi \cdot \bar{\varphi}_{OC}}{\varphi^2} \cdot (1 - \cos\varphi) + I \cdot \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\varphi}[\bar{\varphi}_{OC} \times], \quad (3)$$

где $\varphi = |\bar{\varphi}_{OC}|$;

I – единичная матрица размерности 3×3;

$$[\bar{\varphi}_{OC} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Кроме того, везде предполагается, что вектор $\bar{\varphi}_{OC}$ является функцией времени t.

Достоинства уравнения (3) состоят в следующем:

а) это – точное соотношение;

б) получаемая в результате вычислений матрица ортогональна;

в) эта формула используется только в том случае, когда требуется вычислить углы Эйлера или преобразовать вектор из одной системы координат в другую.

Полученная в соответствии с уравнением (3) матрица C_{OC} является регулярной функцией от $\bar{\varphi}_{OC}$, не имеющей особых точек.

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение вектора ориентации можно представить в виде

$$\dot{\bar{\varphi}}_{OC} = \bar{\omega}_{OC} + \frac{1}{2} \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC} + \frac{1}{\varphi^2} \cdot \left(1 - \frac{\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times (\bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC}); \quad (5)$$

$$\varphi \neq n \cdot \pi, \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

Физический смысл ограничения $\varphi \neq n \cdot \pi, \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ состоит в том, что поворот на угол, равный π, вокруг какой-нибудь произвольной оси u приводит к тому же результату, что и поворот на угол π рад вокруг оси – u. Соотношение, описывающее поведение вектора скорости некоммутативного поворота, имеет вид

$$\dot{\bar{\mu}}_{OC} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC} + \frac{1}{\varphi^2} \cdot \left(1 - \frac{\varphi \cdot \sin\varphi}{2 \cdot (1 - \cos\varphi)}\right) \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times (\bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC}). \quad (6)$$

Уравнение (6) показывает, как вектор скорости некоммутативного поворота $\dot{\bar{\mu}}_{OC}(t)$ зависит от поведения вектора ориентации $\bar{\varphi}_{OC}$ и вектора угловой скорости $\bar{\omega}_{OC}$.

БИНС, использующая в своем составе цифровой вычислитель, реализует лишь дискретный во времени опрос датчиков. В ряде случаев такие сигналы датчиков характеризуют не мгновенные значения параметров кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости, а их интегралы на интервале дискретизации, что не позволяют непосредственно реализовать алгоритмы БИНС. Причина этого состоит в том, что дискретные во времени отсчеты первичных инерциальных измерений не содержат информации об особенностях вращательного и поступательного движения объекта внутри интервалов опроса, а также об особенностях взаимосвязи между этими видами движения. При этом возникает методическая ошибка алгоритма ориентации БИНС вследствие конического движения, а также методические ошибки алгоритма БИНС вследствие действия центробежного ускорения при счислении скорости и при счислении координат.

Основной метод повышения методической точности БИНС, построенной на датчиках интегрирующего типа, состоит в повышении частоты опроса датчиков и выделении двух циклов вычислительного процесса: быстрого и медленного.

Задача алгоритма быстрого цикла состоит в обработке первичных инерциальных измерений в высоком темпе (сотни...тысячи раз в секунду), поступающих с выхода блока инерциальных измерителей и необходимых для формирования с пониженной частотой (десятки...сотни раз в секунду) комплексных сигналов вращательного и поступательного движения, содержащих в себе максимум информации об особенностях динамики движения объекта на относительно длинном интервале времени.

Исходное дифференциальное уравнение (5) на шаге быстрого цикла может быть приведено к виду [2]

$$\dot{\bar{\varphi}}_{OC} = \bar{\omega}_{OC} + \frac{1}{2} \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} \cdot \bar{\varphi}_{OC}^{2(n-1)} \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times (\bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC}), \quad (7)$$

где B_{2n} – числа Бернулли.

Для первых трех членов ряда, стоящего в правой части уравнения:

$$\dot{\bar{\varphi}}_{OC} = \bar{\omega}_{OC} + \frac{1}{2} \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{720} \cdot \varphi^2 + \frac{1}{30240} \cdot \varphi^4 + \cdots\right) \cdot \bar{\varphi}_{OC} \times (\bar{\varphi}_{OC} \times \bar{\omega}_{OC}). \quad (8)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений требует вычисления правой части уравнения в точках между узлами t_m вычисления значений вектора ориентации, что, в свою очередь, требует знания явного вида функции $\bar{\omega}_{OC}(t)$, который не доступен. Поэтому для построения алгоритмов интегрирования уравнения (8) необходимо использовать приближенные методы решения [3].

Для случая, когда вектор угловой скорости вращения объекта $\bar{\omega}_{OC}$ не изменяет ориентации в инерциальной системе координат

$$\bar{\varphi}_{oc(i)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\omega}_{oc} \cdot dt.$$

При изменении ориентации вектора $\bar{\omega}_{OC}$ в инерциальном пространстве вектор конечного поворота $\bar{\varphi}_{oc(i)}$ может быть вычислен (до членов второго порядка малости в правой части уравнения (8)) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\bar{\upsilon} = \int_{t_i}^{t}\left(\bar{\omega}_{oc} + \frac{1}{2}\cdot\bar{\upsilon}\times\bar{\omega}_{oc}\right)\cdot dt;\\
&\bar{\varphi}_{oc(i+1)} = \bar{\upsilon}(t_{i+1});\\
&\bar{\varphi}_{oc(i+1)} = \bar{\eta}(t_{i+1}) + \delta\bar{\eta}(t_{i+1});\\
&\bar{\eta}(t) = \int_{t_i}^{t}\bar{\omega}_{oc}(t)\cdot dt;\\
&\delta\bar{\eta}(t) = \frac{1}{2}\cdot\int_{t_i}^{t}\bar{\eta}(t)\times\bar{\omega}_{oc}(t)\cdot dt.
\end{aligned} \tag{9}$$

Рекуррентный вычислительный алгоритм для определения вектора конечного поворота $\bar{\varphi}_{oc(i)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_{oc(i)} = \bar{\eta}(t_i) + \delta\bar{\eta}(t_i);\\
&\bar{\eta}(m) = \bar{\eta}(m-1) + \int_{t_{m-1}}^{t_m}\bar{\omega}_{oc}(t)\cdot dt;\\
&\delta\bar{\eta}(m) = \delta\bar{\eta}(m-1) + \frac{1}{2}\cdot\int_{t_{m-1}}^{t_m}\bar{\eta}(t)\times\bar{\omega}_{oc}(t)\cdot dt.
\end{aligned} \tag{10}$$

При начальных условиях $\bar{\eta}(t_i)=0,\ \delta\bar{\eta}(t_i)=0$, где m – шаг вычисления интегралов в правой части соотношения (10) внутри шага быстрого цикла вычисления $\bar{\varphi}_{oc(i)}$.

Считая временной интервал $[t_{m-1}, t_m]$ малым, $\bar{\omega}_{OC}$ можно представить следующим образом:

$$\bar{\omega}_{oc} = \bar{A} + \bar{B}\cdot(t + t_m), \tag{11}$$

где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ – постоянные векторы.

Принимая во внимание, что

$$\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} = \int_{t_{m-1}}^{t_m}\bar{\omega}_{oc}\cdot dt,$$

где $\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} = \begin{pmatrix}\Delta\bar{\varphi}^{x}_{oc(m)}\\ \Delta\bar{\varphi}^{y}_{oc(m)}\\ \Delta\bar{\varphi}^{z}_{oc(m)}\end{pmatrix}$ – вектор кажущегося поворота за промежуток времени $[t_m, t_{m+1}]$.

Будем считать $\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$. Проинтегрировав выражение (11) на интервале $[t_{m-1}, t_m]$ и решив полученную систему уравнений относительно векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$, получим

$$\begin{aligned}
&\bar{A} = \frac{1}{2\cdot\Delta t_m}\cdot\left(\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} + \Delta\bar{\varphi}_{oc(m-1)}\right);\\
&\bar{B} = \frac{1}{\Delta t_m^2}\cdot\left(\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} - \Delta\bar{\varphi}_{oc(m-1)}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставив (11), (12) в (10), получим следующее выражение для вычисления

$$\begin{aligned}
&\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} = \bar{\eta}(t_{m-1}) + \delta\bar{\eta}(t_{m-1});\\
&\bar{\eta}(m) = \bar{\eta}(m-1) + \Delta\bar{\varphi}_{oc(m)};\\
&\delta\bar{\eta}(m) = \delta\bar{\eta}(m-1) +\\
&+\frac{1}{2}\cdot\left(\bar{\eta}(m-1) + \frac{1}{6}\cdot\Delta\bar{\varphi}_{oc(m-1)}\right)\times\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Полученная рекуррентная процедура позволяет вычислить компоненты векторов $\bar{\eta}$ и $\delta\bar{\eta}$ за цикл $[t_{m-1}, t_m]$, затем по полученным к моменту времени t_m значениям векторов $\bar{\eta}$ и $\delta\bar{\eta}$ вычисляются компоненты вектора конечного поворота $\bar{\varphi}_{oc}$ связанной системы координат за цикл $[t_{m-1}, t_m]$. Далее вычисляется матрица ориентации связанной системы координат относительно опорной C_{OC}.

Полагая, что

$$C_{oc(m)} = C_{oc(m-1)}\cdot C_c, \tag{14}$$

где $C_c = E + dk1\cdot C_{MP} + dk2\cdot C^2_{MP}$;

$C_{MP} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_m^{(z)} & \varphi_m^{(y)}\\ \varphi_m^{(z)} & 0 & -\varphi_m^{(x)}\\ -\varphi_m^{(y)} & \varphi_m^{(x)} & 0\end{bmatrix}$ – матрица малого поворота;

$dk1 = \dfrac{\sin\varphi_m}{\varphi_m};\quad dk2 = \dfrac{1-\cos\varphi_m}{\varphi_m^2}$ – динамические коэффициенты;

$$\varphi_m^{(j)} = \Delta\bar{\varphi}_{oc}^{(j)},\ j = x, y, z;$$

$$\varphi_m = \left(\left(\varphi_m^{(x)}\right)^2 + \left(\varphi_m^{(y)}\right)^2 + \left(\varphi_m^{(z)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\Delta\bar{\varphi}_{oc}$ – вектор конечного поворота связанной системы координат на интервале быстрого цикла.

Задача пересчета кажущейся скорости объекта из связанной системы координат в опорную заключается в том, чтобы по составляющим приращения кажущейся скорости объекта в связанной системе координат за цикл между съемами информации и информации о взаимном угловом положении связанной и опорной систем координат вычислить составляющие кажущейся скорости объекта в опорной системе координат.

Выражение для вычисления кажущейся скорости в опорной системе координат на интервале быстрого цикла имеет следующий вид:

$$\bar{V}_{oc} = C_{oc} \cdot \int_{0}^{T_{бц}} \bar{W}_c(t) \cdot dt, \qquad (15)$$

где $\bar{V}_{oc}$ – вектор кажущейся скорости объекта в опорной системе координат;

$\bar{W}_c$ – вектор кажущегося ускорения объекта в осях связанной системы координат.

В реальных навигационных системах интегрирование осуществляется на коротких интервалах времени и, таким образом, задача сводится к вычислению приращения составляющих кажущейся скорости в опорной системе координат на шаге решения $\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$, а именно

$$\Delta\bar{V}_{oc(m)} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} C_{oc} \cdot \bar{W}_c(t) \cdot dt, \qquad (16)$$

где $\Delta\bar{V}_{oc(m)} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{V}^x_{oc(m)} \\ \Delta\bar{V}^y_{oc(m)} \\ \Delta\bar{V}^z_{oc(m)} \end{bmatrix}$ – составляющие приращения кажущейся скорости в опорной системе координат за цикл $[t_{m-1}, t_m]$;

$\bar{W}_c(t) = \begin{bmatrix} \bar{W}_c^{x_1}(t) \\ \bar{W}_c^{x=y_1}(t) \\ \bar{W}_c^{z_1}(t) \end{bmatrix}$ – составляющие кажущегося ускорения в связанной системе координат на интервале $[t_{m-1}, t_m]$.

При использовании интегрирующих измерителей кажущегося ускорения, величина $\bar{W}_c(t)$ недоступна. Кроме того, информация о кажущемся ускорении и матрице имеется лишь в дискретные моменты времени. Поэтому решение для выражения (16) можно получить только с помощью численных методов. Оптимальные алгоритмы, имеющие минимальные методические и вычислительные погрешности при ограничениях на производительность навигационного вычислителя предложены в работе [3, в соответствии с которыми

$$\Delta\bar{V}_{oc(m)} = C_{oc(m-1)} \times$$
$$\times\left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \bar{W}_c \cdot dt + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left(\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} \times \bar{W}_c\right) \cdot dt, \right), \qquad (17)$$

где $\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \bar{\omega}_{oc} \cdot dt.$

Обозначим

$$\bar{a} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \bar{W}_c \cdot dt;$$

$$\bar{b} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left(\Delta\bar{\varphi}_{oc(m)} \times \bar{W}_c\right) \cdot dt,$$

тогда $\Delta\bar{V}_{oc(m)} = C_{oc(m-1)} \cdot (\bar{a} + \bar{b})$.

Рекуррентные соотношения для вычисления $\Delta\bar{V}_{oc}$ будут следующими:

$$\Delta\bar{V}_{oc(m)} = C_{oc(m-1)} \cdot \left(\bar{a}(t_m) + \bar{b}(t_m)\right), \qquad (18)$$

где $\bar{a}(t_m) = \bar{a}(t_{m-1}) + \Delta\bar{a}(t_m)$

при начальных условиях $\bar{a}(t = t_0) = 0$;

$\bar{b}(t_m) = \bar{b}(t_{m-1}) +$

$+\left(\Delta\bar{\varphi}_{oc(m-1)} + \frac{1}{2} \cdot \Delta\bar{\varphi}_{oc(m)}\right) \times \Delta\bar{a}_m$ при начальных условиях $\bar{b}(t = t_0) = 0$; $\Delta\bar{\varphi}_{oc}(t = t_0) = 0$.

В медленном цикле (частота порядка нескольких десятков герц) решается традиционная задача инерциальной навигации с вычислением всех необходимых параметров ориентации, скорости и местоположения.

Заключение

В статье получен способ представления углового и линейного движения твердого тела. Отличительная черта этого способа состоит в том, что он позволяет устранить вычислительные трудности, связанные с некоммутативностью конечных поворотов.

Векторный способ представления углового движения твердого тела особенно удобен при решении вычислительных задач, возникающих в процессе работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Использование предлагаемого способа приводит к значительному снижению требований к быстродействию навигационного вычислителя, экономии памяти и улучшению полосы пропускания системы без ухудшения точности. Загрузку навигационного вычислителя можно без ухудшения точности и полосы пропускания уменьшить примерно на порядок.

Литература
1. Bortz J. E., S t, A New Concept in Strapdown Inertial Navigation, NASA Tech. Rept. TR R-329, March 1970.
2. Водичева Л.В., Бельский Л.Н., Маслова О.И., Лукин Н.А. Оптимальное проектирование прецизионных малогабаритных БИНС для высокоманевренных подвижных объектов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. Академика СП. Королева. – 2009. - № 4 (20). – с. 186-198.
3. Savage, P.G. Strapdown System Computational Elements // Advances in Navigation Sensors and Integration Technology. RTO Lecture Series 232 (2004) Pre-Prints.- May 27-28, 2004, Saint Petersburg.- p.p. 3-1-3-28.

Материал поступил в редакцию 19. 03. 2014 г.