УДК 621.311.

© Бабишин В.Д., Маклаков В.В., Дорошенко М.А.
Babishin V., Maklakov V., Doroshenko M.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

THEORETICAL RECOMMENDATIONS FOR DETERMINING THE DISTRIBUTION LAW OF TECHNICAL CHARACTERISTICS OF COMPLEX SYSTEMS UNDER DYNAMIC LOADING

Аннотация. *Предложены теоретические рекомендации в виде теоремы для определения закона распределения технических характеристик сложных технических систем при динамических условиях нагружения объекта управления. Согласно теореме, закон распределения технических характеристик сложных технических систем при динамических условиях нагружения объекта управления подчиняется нормальному закона распределения.*

Annotation. *The theoretical recommendations in the form of a theorem to determine distribution law of the technical characteristics of the complex technical systems under dynamic loading conditions are suggested. According to the theorem, the distribution law of technical characteristics of complex technical systems under dynamic loading conditions follows the normal distribution law.*

Ключевые слова. *Случайный процесс, технические характеристики, надежность.*

Key words. *Random process, technical characteristics, reliability.*

В процессе управления сложными техническими системами, такими как, например, космический аппарат, необходимо постоянно определять и корректировать величины технических характеристик этих систем в соответствии с требованиями к надежности данных систем. Указанные характеристики представляют собой такие параметры, как давление, температура, прочность, упругость и др.. При этом, как известно [1], обобщающей характеристикой данных параметров является сопротивляемость, т.е. наибольшее значение внешнего воздействия, которое объект может выдерживать неограниченное время и превышение которого приводит к отказу системы.

Как известно из механики, в основу большинства способов измерения показателей свойств объектов положен принцип равенства действия и противодействия или «принцип компенсации».

Применение компенсационного способа измерения сопротивляемости требует, чтобы в момент достижения объектом предельного состояния условия его нагружения были «стационарными», т.е. существовало бы равновесное состояние между приложенной «нагрузкой» и «реакцией» объекта на эту нагрузку. При этом величина действующей нагрузки определяет величину сопротивляемости. В этом случае случайный процесс нагрузки должен представлять стационарный случайный процесс нагрузки.

Большинство реальных взаимодействий (нагрузок) механических, электрических, тепловых и т.д. имеют динамический характер, когда скорость изменения нагрузки превышает скорость изменения реакции на эту нагрузку. Иначе в условиях динамического нагружения причина (нагрузка), измеренная в некоторый момент времени, не объясняет следствие (реакцию), имеющее место в тот же момент времени. В некоторых работах [1] отмечается, что в условиях динамического нагружения механическая нагрузка, соответствующая моменту разрушения объекта, может в два раза превосходить разрушающую нагрузку при «квазистатическом» (медленном) нагружении. Кратковременные (динамические) электрические нагрузки могут во много раз превосходить предельные в отношении «пробоя» или «плавления» статические нагрузки и т.д..

Бабишин Владимир Денисович – доктор технических наук, профессор, МАРТИТ, тел. 8-926-311—85-38;
Маклаков Владимир Васильевич – доктор технических наук, профессор, ИПУ РАН;
Дорошенко Максим Андреевич – аспирант, МАРТИТ.

Babishin Vladimir – doctor of technical sciences, professor, Moscow academy of labor market and information technology, tel. 8-926-311-85-38;
Maklakov Vladimir – doctor of technical sciences, professor, ICS RAS;
Doroshenko Maxim – post-graduate student, Moscow academy of labor market and information technology.

Таким образом [1], зависимость сопротивляемости от динамических характеристик условий нагружения объекта является экспериментально установленным фактом. В этом случае сопротивляемость объекта является случайной величиной, т.е. она характеризуется некоторым законом распределения вероятности.. Определение вида закона распределения сопротивляемости в условиях динамического нагружения, как правило, осуществляется опытным путем на основе применения непараметрических статистических критериев (механизмов) [2]. Кратко рассмотрим структуры некоторых наиболее известных из них.

Обзор некоторых методов анализа случайных процессов функционирования сложных технических систем

1. *Критерий согласия* χ^2. Критерий согласия заключается в проверке гипотезы H_0, когда в результате некоторого испытания может произойти одно из k событий A_k или разрядов статистического ряда, при этом вероятности этих событий определяются следующим образом:

$$p(A_1)= p_1,\ p(A_2)= p_2,\dots,\ p(A_k)= p_k,$$

причем сумма этих вероятностей равна 1.

Альтернативной гипотезой является невыполнение хотя бы одного из этих равенств.

Исходными данными для проверки гипотезы H_0 являются результаты n независимых испытаний, при этом гипотетическое распределение $G(z)$ известно полностью.

В этом случае мера расхождения между теоретическим и статистическим значением вероятностей или функция потерь будет определяться в виде суммой квадратов отклонений $(p^{\bullet}-p_i)$ этих вероятностей, взятых с некоторыми весами c_i или

$$U=\sum_{i=1}^{k} c_i\left(p^{\bullet}-p_i\right)^2,$$

где $c_i = n/p_i$; $p^{\bullet} = m_i/n$; m – число значений в i-м разряде.

При большом количестве опытов n, закон распределения величины U практически не зависит от функции распределения и от числа опытов n, а зависит только от числа разрядов k статистического ряда и приближается к так называемому закону распределения χ^2.

Распределением χ^2 с r ступенями свободы называется распределение суммы квадратов r независимых случайных величин, каждая из которых подчинена нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией, равной 1, т.е.

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k} U_i^2,$$

где U_i, $i = 1,2,3,\dots,k$ имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Это распределение характеризуется плотностью вероятности

$$k_r(u)=\begin{cases}\dfrac{1\quad u^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{r}{2}}\,\Gamma(r/2)} & при\quad u\ge 0;\\ 0 & при\quad u<0,\end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ – известная гамма функция.

Тогда величина $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{\left(m_i-np_i\right)^2}{np_i}$ будет решающим правилом при проверке гипотезы H_0.

Затем выбирается уровень порога или значимости α далее вычисляется критическое значение $\chi^2_{кр}$ для гипотезы H_1 и значение $r = k–1$ для условия задачи, где r означает число степеней свободы. Критическое значение $\chi^2_{кр}$ определяется по специальной таблице:

если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается;

если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается.

2. *Критерий А.Н. Колмогорова.* В качестве меры расхождения между теоретическим распределением и статистическим распределением рассматривается в виде максимально возможного значения модуля разности между статистической функцией распределения $F(z)$ и теоретической функцией распределения вероятностей $G(z)$

$$d_1(F,G)=\sup_z\left|F(z)-G(z)\right|.$$

Колмогоров доказал, что при неограниченном возрастании числа опытов (наблюдений) вероятность неравенства (или функция распределения) $d_1\sqrt{n}\ge\lambda$ стремится к пределу (число опытов n заменяется числом степеней свободы)

$$P(\lambda)=1-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2},$$

где k – число разрядов статистической функции (ряда) распределения $F(z)$.

Схема применения критерия А. Н. Колмогорова хорошо описана в работе [8]. Данный критерий своей простотой выгодно отличается от критерия χ^2, поэтому его весьма охотно применяют на практике. Следует, однако, оговорить, что этот критерий можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение $F(z)$ полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений, т.е. когда известен не только вид функции распределения $F(z)$, но и все входящие в нее параметры. Такой случай сравнительно редко встречается на практике. Обычно из теоретических соображений известен только общий вид функции $G(z)$, а входящие в нее числовые параметры определяются по данному статистическому материалу. При применении критерия χ^2 это обстоятельство необходимо учитывать соответствующим уменьшением числа степеней свободы распределения . Критерий А. Н. Колмогорова такого согласования не предусматривает.

3. *Критерий Пирсона*. Проведение анализа случайных процессов с эмпирическим законом распределения осуществляется на основе линеаризации теоретических и эмпирической функций распределения и последующего их сравнения по критерию максимума коэффициента линейной корреляции Пирсона. Для этого между теоретической и фактической функциями, описывающими выходной случайный процесс объекта управления, вычисляется коэффициент линейной корреляции Пирсона

$$\rho = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(F_{\Phi i} - F_{\Phi}\right)\left(F_i - F\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(F_{\Phi i} - F_{\Phi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(F_i - F\right)^2}},$$

где F_{Φ} – фактическая функция случайного процесса;

F – теоретическая функция этого процесса.

Максимальный коэффициент линейной корреляции определяет наилучшую теоретическую функцию, описывающую. выходной случайный процесс объекта управления.

Таким образом, в настоящее время предположение о виде закона распределения сопротивляемости в условиях динамического нагружения делается на основе эмпирических методов за счет вычисления меры расхождения между теоретическим распределением и статистическим распределением. Однако теоретических доказательств данного предположения пока не существует.

В отличие от рассмотренных критериев в статье предлагаются следующие теоретические рекомендации для определения вида закона распределения технических характеристик сложных технических систем.

В качестве основы для определения вида закона распределения технических характеристик сложных технических систем выступает случайный процесс нагрузки $\widehat{u}(t)$. Стационарный случайный процесс нагрузки $\widehat{u}(t)$ отмечен на рис. 1 пунктирной линией.

Представим теперь данный стационарный случайный процесс нагрузки в виде дискретного случайного процесса $\widehat{u}'(t)$, состоящего лишь из наибольших значений исходного процесса нагрузки $\widehat{u}(t)$. Данные наибольшие значения лежат на границе сопротивляемости. Наибольшие значения внешнего воздействия отмечены на рис. 1 черными точками, а полученный дискретный случайный процесс сопротивляемости отмечен сплошной линией.

В результате случайный процесс нагружения $\widehat{u}(t)$ преобразуется в дискретный стационарный случайный процесс сопротивляемости, состоящий только из наибольших значений исходного процесса нагрузки $\widehat{u}(t)$. Согласно работе [1], распределение данных наибольших значений нагрузки подчиняется закону распределения экстремальных значений [5] (распределение Гумбеля)

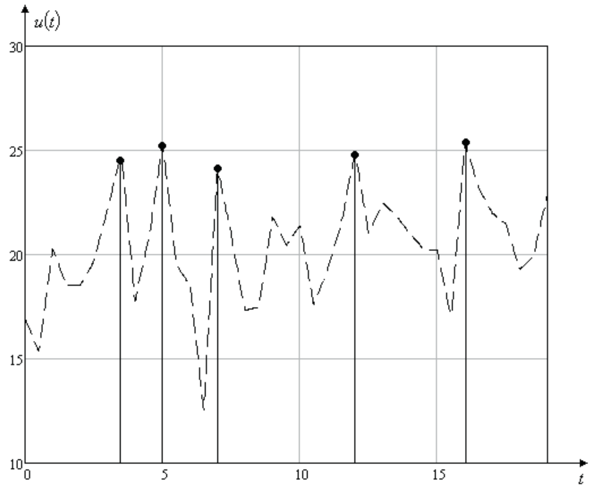

Рис.1. Случайные процессы нагружения и сопротивляемости

$$F_{\widehat{u}}(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\beta\left(x-\mu\right)\right]\right\},$$

где μ и β – параметры распределения.

Проверить случайный процесс нагружения на стационарность можно, например, с помощью методов, рассмотренных в работах [2,3].

В статье предлагается следующая теорема.

Теорема. *Если нагрузка в каждом испытании подчиняется закону распределения экстремальных (наибольших) значений (распределение Гумбеля), причем эти наибольшие значения также характеризуют сопротивляемость, то при неограниченном увеличении количества испытаний закон распределения сопротивляемости будет неограниченно приближаться к нормальному закону распределения.*

Доказательство данной теоремы вытекает из следующих рассуждений:

1. Случайный процесс нагрузки должен представлять стационарный случайный процесс.

2. Максимальные случайные значения нагрузки в каждом испытании подчиняется одному и тому же экстремальному закону распределения, а количество испытаний неограниченно возрастает. При этом данные наибольшие значения нагрузки также представляют величины сопротивляемости.

3. Значения максимальных случайных величин нагрузки должны быть независимы.

Зависимость сопротивляемости от динамических условий нагружения приведена на рис. 2. Значение сопротивляемости $X(t)$ в данный момент времени t можно представить как сумму значений приращений сопротивляемости $dX(t)$ в предыдущие моменты времени. Таким образом

$$X(t) = dX(t_1) + dX(t_2) + dX(t_3) + dX(t_4) + \ldots + dX(t_n)$$

или иначе $X(t) = \sum_{i=1}^{n} dX(t_i)$.

В этом случае действует центральная предельная теорема теории вероятности [4], согласно которой сумма независимых случайных величин с одинаковым распределением вероятностей при неограниченном увеличении количества этих значений неограниченно приближается к нормальному закону распределения.

Таким образом, если данные условия выполнены, то закон распределения сопротивляемости будет подчиняться нормальному закону распределения.

Нормальный закон распределения сопротивляемости для различных значений параметров математического ожидания и дисперсии, полученных для разных условий испытаний БС КА представлен на рис. 3.

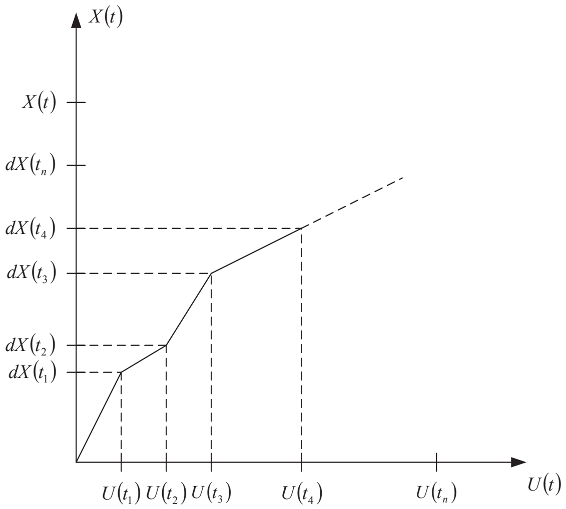

Рис.2. Зависимость сопротивляемости от динамических условий нагружения

Сплошной линией представлен проектный закон распределения величин технических характеристик БС КА, полученный на этапе наземных испытаний, а пунктиром – закон распределения, полученный на этапе летных испытаний.

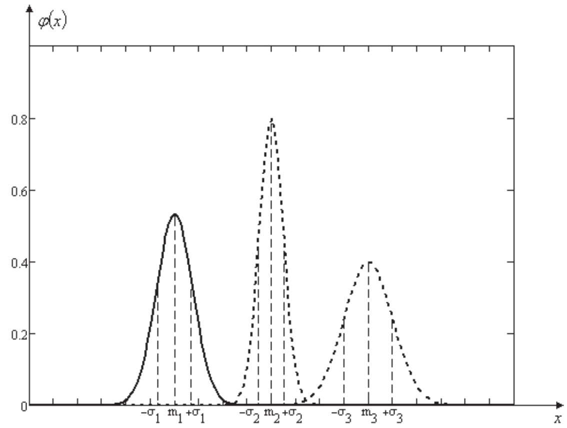

Рис. 3. Законы распределения сопротивляемости на этапах наземных и летных испытаний

Как видно из графика, представленного на рис. 3, параметры распределения величин технических характеристик (математическое ожидание и дисперсия) будут отличаться в зависимости от действующей на объект управления нагрузки.

Параметры нормального закона параметры распределения величин технических характеристик определяются путем решения обратной задачи надежности согласно работе [1].

Выводы

Предложены теоретические рекомендации для определения вида закона распределения технических характеристик сложных систем в условиях динамического нагружения.

Определение вида закона распределения технических характеристик сложных систем в условиях динамического нагружения нагрузки позволяет на основе анализа случайных процессов определить технические характеристики БС КА при различных нагрузках по параметрам нормального закона распределения сопротивляемости.

Предложенные рекомендации могут быть использованы для определения вида закона распределения технических характеристик сложных систем как социально-экономического назначения, так и специального назначения.

Литература

1. Дедков В.К. Обратная задача теории надежности. – М.: ВЦ РАН, 2004.

2. Бабишин В.Д., Дорошенко М.А. Метод оперативного анализа технического состояния систем на основе имитационного моделирования стационарных процессов. // Научно-практический журнал «Прикладная информатика» №4 С. – 41-45 , 2011.

3. Бабишин В.Д., Давыдов А.Н., Дедков В.К., Дорошенко М.А. Метод оперативного анализа нестационарных случайных процессов на основе разложения исследуемой функции в интеграл Фурье. // Научно-практический журнал «Прикладная информатика» № 6. – С. 49-55., 2011.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.

5. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965.

Материал поступил в редакцию 19. 05. 2013 г.