УДК 629.7.017.2

© Половинчук Н.Я., Трофименко В.Н., Руденко Н.В., Иванов С.В.
Polovinchuk N., Trophimenko V., Rudenko N., Ivanov S.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

OPTIMAL CONTROL OF A STOCHASTIC DYNAMIC SYSTEM WITH TERMINAL RESTRICTIONS

Аннотация. *Рассматривается задача оптимального терминального управления стохастической динамической системой с неопределенной управляющей функцией. Предлагается подход к ее решению, включающий синтез управления на основе модели с обобщенным управлением и организацию движения системы по сформированной оптимальной траектории.*

Annotation. *The problem of optimum terminal management stochastic dynamic system is considered with vague controlling function. The approach is offered to its decision, including syntheses of management on base of the models with generalised by management and organization of the moving the system on formed optimum path.*

Ключевые слова. *Оптимальное управление, стохастическая динамическая система, терминальное ограничение, неопределенный параметр.*

Key words. *Optimal control, stochastic dynamical system, the terminal constraint indefinite parameter.*

Введение

Традиционные подходы к решению задачи оптимального управления стохастической динамической системой с априорно неопределенными параметрами предполагают: оценивание и идентификацию вектора состояния и вектора параметров системы; формирование оптимального управления на основе уточненной математической модели системы [1]. Реализация таких подходов при решении задачи оптимального терминального управления динамической системой приводит к необходимости использования математической модели, наиболее полно отражающей динамические свойства системы. Однако в ряде практических приложений, например, при управлении движением летательного аппарата в широкой эксплуатационной области состояний и управлений модель системы не может быть сформирована строго. Как правило, это обусловлено трудностями формализации влияния управления на динамику системы, т.е. аэродинамических характеристик летательного аппарата. Вследствие этого при решении таких задач используются упрощенные модели. Неадекватность принятой модели реальному движению в этом случае приводит к движению системы по неоптимальной траектории и не позволяет с высокой точностью выполнить терминальные условия.

В связи с этим представляет интерес разработка способов решения задачи оптимизации на основе системы обобщенных моделей.

Половинчук Николай Яковлевич – профессор, кандидат технических наук, доцент кафедры АЭРПО, Ростовский филиала МГТУ ГА, тел. 8(928)603-63-12;
Трофименко Владимир Николаевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры АЭС и ПНК, Ростовский филиал МГТУ ГА;
Руденко Николай Валерьевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры АЭС и ПНК, Ростовский филиал МГТУ ГА;
Иванов Станислав Валерьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизации производственных процессов», Донской государственный технический университет.

Polovinchuk Nikolay – cand. sc. (tech), professor, senior lecturer of chair of the AERPO, Rostov Branch of the Moscow state technical university of civil aircraft, тел. 8(928)603-63-12;
Trophimenko Viadimir – cand. sc. (tech), the senior lecturer of chair of the AERPO, Rostov Branch of the Moscow state technical university of civil aircraft;
Rudenko Nikolay – cand. sc. (tech), the senior lecturer of chair of the AERPO, Rostov Branch of the Moscow state technical university of civil aircraft.
Ivanov Stanislav – cand.Tech.Sci., the senior lecturer of chair «Automation of productions» of the Don state technical university.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс стохастических динамических систем, движение которых описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x,t) + \varphi(x,t)\, u(v,t) + W_x, \quad t \in [t_0,\ t_k] \qquad (1)$$

с функцией наблюдения

$$z = h\,(x,t) + W_z, \qquad (2)$$

где x – вектор состояния размера n;

v – вектор управления (управляющих параметров) размера r;

$f(x,t)$ – известная нелинейная непрерывная дифференцируемая по x векторная функция размера $n{\times}r$;

u – в общем случае неизвестная нелинейная векторная управляющая функция размера r, под которой будем понимать в дальнейшем обобщенное управление;

h – известная нелинейная непрерывная дифференцируемая по x векторная функция размера n;

W_x, W_z – векторы возмущений в системе и шумов измерителя, которые могут быть представлены белыми гауссовскими шумами с нулевыми средними и известными матрицами интенсивностей $D_x(t)$,$D_z(t)$;

t_0, t_k – моменты времени начала и окончания управления.

Заметим, что система (1) является структурно неопределенной вследствие неопределенности управляющей функции $u(v, t)$.

Полагая, что модель движения системы известна с точностью до управляющей функции, представим ее в виде

$$\dot{x}_m = f(x_m,t) + \varphi(x_m,t)\, u_m(t), \qquad (3)$$

где x_m – модельный вектор состояния;

$u_m(t)$ - модельное обобщенное управление.

Зададим терминальное условие и минимизируемый функционал в следующей форме:

$$S(x_m,\ t_k) = 0; \qquad (4)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(x_m,\ u_m,\ t)\, dt, \qquad (5)$$

где $S(x_m, t_k)$ – непрерывная, дифференцируемая по x_m векторная функция размера n;

$F(x_m, u_m, t)$ – в общем случае нелинейная дважды дифференцируемая по x_m и u_m функция.

Задачу управления динамической системой (1) целесообразно представить в виде двухэтапной, причем на первом этапе осуществляется поиск оптимального обобщенного управления $u_m^o(t)$, удовлетворяющего на решениях (3) терминальному условию (4) и условию минимума функционала (5), а на втором этапе – формирование управления корректирующего $v(t)$ для приближения (подстройки) реального процесса (1) к оптимальному модельному (3).

Решение задачи на первом этапе может быть получено одним из известных методов синтеза, например? представленным в работе [2], позволяющим найти оптимальное обобщенное управление

$$u_m^o(t)\ :\ S(x_m,t_k) \le \mathrm{E}_S,\ J \to \inf;$$

$$\dot{x}_m = f(x_m,t) + \varphi(x_m,t)\, u_m(t);$$

$$x_m(t_0) = x_{m0},\ t \in [t_0,\ t_k],\ \ u_m \in U,$$

где E_s – допустимая погрешность выполнения терминального условия;

U – заданная ограниченная область в пространстве управляющей функции.

Решение задачи на втором этапе может быть получено на основе определения текущего значения управляющей функции, сравнения его с требуемым модельным и коррекции управления $v(t)$ с целью ликвидации рассогласования между $u(v, t)$ и $u_m^0(t)$. Определение текущего значения управляющей функции с учетом возмущений в системе и помех измерителя может быть реализовано только на основе ее идентификации. Исходя из этого, для решения задачи необходимо получить совместно идентификацию управляющей функции и подстройку реального движения системы, фактически решить задачу дуального управления системой.

В основу решения задачи дуального управления системой могут быть положены известные алгоритмы идентификации, основанные на теории оценивания процессов [1,2]. Однако их использование для решения сформулированной задачи управления потребует больших вычислительных затрат, что при практической реализации бортовых алгоритмов приводит к определенным трудностям.

Более рациональным с точки зрения вычислительных затрат могут быть алгоритмы, построенные при формулировке и решении задачи идентификации как задачи управления. Рассмотрим алгоритмический подход решения задачи идентификации, основанный на теории оптимального управления динамическими системами.

2. Способ идентификации управляющей функции

Запишем систему (1) в терминах оценок вектора состояния и обобщенного управления

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},t) + \varphi(\hat{x},t)\, \hat{u}(t), \qquad (6)$$

и представим задачу идентификации обобщенного управления как поиск на решениях (6) его оптимальной оценки, удовлетворяющей условию минимума рассогласования между текущим наблюдением z (2) и его текущей оценкой $h(\hat{x}, t)$. Исходя из этого, сформируем минимизируемый функционал в следующем виде:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left\{ \left[z - h(\hat{x}, t)\right]^T D_z^{-1} \left[z - h(\hat{x}, t)\right] + \hat{u}^T R\, \hat{u} \right\} \, d\tau ,$$

где R – положительно определенная диагональная матрица весовых коэффициентов размера $r \times r$;

T – знак операции транспонирования.

Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина и сформируем гамильтониан

$$H = \psi^T f(\hat{x}, t) + \psi^T \varphi(\hat{x}, t)\, \hat{u} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[z - h(\hat{x}, t)\right]^T D_z^{-1} \left[z - h(\hat{x}, t)\right] + \frac{1}{2}\hat{u}^T R\, \hat{u} ,$$

где ψ – вектор сопряженных переменных.

Из условия стационарности гамильтониана по управлению $\frac{\partial H}{\partial \hat{u}} = 0$ определим: $\hat{u} = -R\, \varphi^T(\hat{x}, t)\, \psi$. На основании уравнения для сопряженных переменных $\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \hat{x}}$ с учетом выражения для оценки $\hat{u}$ получим следующую систему сопряженных уравнений:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t) - \varphi(\hat{x}, t)\, R\, \varphi^T(\hat{x}, t)\, \psi;$$
$$\dot{\psi} = -\left[\frac{\partial f(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right]^T \psi - \left[\frac{\partial \varphi(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\, R\, \varphi^T(\hat{x}, t)\, \psi\right]^T \psi -$$
$$- \left[\frac{\partial h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right]^T D_z^{-1}\left[z - h(\hat{x}, t)\right],$$

определяющих двухточечную краевую задачу. Использование для ее решения метода инвариантного погружения [3] дает систему уравнений для оценок

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t) - \varphi(\hat{x}, t)\, R\, \varphi^T(\hat{x}, t)\, \psi; \qquad (7)$$
$$\dot{K} = K\left\{\frac{\partial^2 h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}^2} D_z^{-1}\left[z - h(\hat{x}, t)\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right]^T D_z^{-1} \frac{\partial h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right\} K +$$
$$+ K\left[\frac{\partial f(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right]^T + \frac{\partial f(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} K +$$
$$+ \varphi(\hat{x}, t)\, R\, \varphi^T(\hat{x}, t) , \qquad (8)$$

где K – ковариационная матрица ошибок оценок.

При сравнении уравнений (6) и (7) заметим, что

$$\varphi(\hat{x}, t)\,\hat{u} = K\left[\frac{\partial h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right]^T D_z^{-1}\left[z - h(\hat{x}, t)\right],$$

откуда следует выражение для искомой оценки обобщенного управления

$$\hat{u} = \varphi^{-1}(\hat{x}, t)\, K\left[\frac{\partial h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}}\right]^T D_z^{-1}\left[z - h(\hat{x}, t)\right]. \qquad (9)$$

Таким образом, алгоритм идентификации обобщенного управления может быть построен на основе системы уравнений (7), (8) и зависимости (9), что по сравнению с известным алгоритмом субоптимальной параметрической идентификации (расширенным обобщенным фильтром Калмана – Бьюси) для реализации бортового алгоритма потребуется в 2-3 раза меньше вычислительных затрат.

3. Решение задачи дуального управления

Во многих практических случаях структурная неопределенность математической модели динамической системы (неопределенность управляющей функции) возникает, как правило, при выборе траектории ее движения в широкой области состояний и управлений. На основании этого будем считать, что для малой области состояний и управлений (при малых значениях управления ν) функция $u(\nu)$ приближенно определена, и связь между приращениями Δu и $\Delta \nu$ может быть представлена с помощью аппроксимирующего оператора u_ν, т.е. $\Delta u = u_\nu \Delta \nu$. Тогда требуемое приращение управления может быть вычислено исходя из рассогласования между модельным оптимальным обобщенным управлением и оценкой обобщенного управления

$$\Delta \nu(t) = u_\nu^{-1}\left[u_m^o(t) - \hat{u}(t)\right]. \qquad (10)$$

При численном решении рассматриваемой задачи требуемое приращение управления $\Delta \nu$ на первом такте подстройки движения системы определится на основании выражения (10), однако в силу неопределенности управляющей функции и, соответственно, приближенности оператора u_ν ее реальное значение при реализации этого приращения будет отличаться от требуемого. Следовательно, остающееся рассогласование между модельной и реальной управляющими функциями должно быть уменьшено на последующих тактах коррекции траектории движения системы. Исходя из этого, суммарное (интегральное) управление $\nu(t)$ на момент времени t_p начала p-го такта коррекции будет определяться выражением

$$\nu(t_p) = \nu_0 + \sum_{j=1}^{p} u_\nu^{-1}\left[u_m^o(t_j) - \hat{u}(t_j)\right], \qquad (11)$$

где ν_0 – начальное управление;

j – номер такта решения задачи коррекции обобщенного управления, отсчитываемый с момента времени t_0;

$u_m^0(t_j)$, $\hat{u}(t_j)$ – вычисленные в такте (j–1) требуемое обобщенное управление и его оценка, соответственно.

Заметим, что при соответствующем выборе аппроксимирующего оператора u_ν в ходе реализации управления (11) рассогласование между модельным оптимальным обобщенным управлением и оценкой обобщенного управления с течением времени будет уменьшаться и по окончании переходного процесса достигнет некоторого малого установившегося значения.

Таким образом, интегрирование уравнений (7), (8) с шагом, равным такту подстройки, и вычисление в конце каждого такта оценки обобщенного управления (9), как реакции системы (1) на сформированное для этого такта реальное управление (11), определяют процедуру одновременно идентификации и управления, т.е. приближения реального движения динамической системы к модельному оптимальному. Следует отметить, что движение системы (1) станет повторять модельное оптимальное, но с некоторой ошибкой, обусловленной переходным процессом на начальном этапе подстройки.

4. Пример

Иллюстрацию и сравнительную оценку эффективности предложенного алгоритмического подхода к решению задачи управления динамической системой проведем на примере динамической системы

$$\dot{x} = -x^2\,[v + v^2] + w_x\,; \quad x(0) = 1;$$
$$t \in [0\,;\ 3c];\ d_x = 0,01\,;$$
$$z = x + w_z\,;\ d_z = 0,05\,. \qquad (12)$$

Модель движения системы в терминах обобщенного управления принимает вид

$$\dot{x}_m = -x_m^2\,u_m\,; \quad x_m(0) = 1\,.$$

Для целей иллюстрации не представляет существенного интереса процедура синтеза оптимального обобщенного управления, исходя из этого выберем его произвольно, например, $u_m^o(t) = 0,5\,e^{-0,2\,t}$.

Примем $u_v = 5$; $v_0 = 0$; $r = 10$; $k(0) = 1$. Заметим, что значение u_v существенно отличается от действительного и выбрано таким из соображений "мягкой" подстройки движения динамической системы.

Тогда выражения (7), (8), (9), (11), определяющие процедуру коррекции движения системы (12), с учетом значений соответствующих параметров принимают вид

$$\dot{\hat{x}} = 100\ k\ (z - \hat{x}); \quad \dot{k} = -100\ k^2 + 10\ \hat{x}^4;$$
$$\hat{u} = -100\ \hat{x}^{-2} k\ (z - \hat{x});$$
$$v\ (t_p) = \sum_{j=1}^{p} 0,2\ \left[\ u_m^o(t_j) - \hat{u}\,(t_j)\right]\,.$$

Моделирование процессов управления угловой переориентацией ЛА [5,6] по предложенной методике для решения задачи с шагом интегрирования (тактом подстройки) 0,001с дает максимальные ошибки приближения движения системы к модельному оптимальному по обобщенному управлению и координате, соответственно, 0,4% и 0,9% при длительности переходных процессов не более 0,5с.

При использовании для решения этой задачи алгоритма параметрической идентификации, построенного на основе расширенного обобщенного фильтра Калмана – Бьюси, получены аналогичные результаты, однако вычислительные затраты при этом возросли в 2,5 раза.

Заключение

Предложенный способ позволяет решить задачу оптимального терминального управления стохастической динамической системой в условиях ее структурной неопределенности (неопределенности управляющей функции). Использование предложенного метода идентификации управляющей функции на этапе коррекции реального движения динамической системы приводит к существенному сокращению вычислительных затрат, что, в конечном итоге, повышает динамическую точность системы адаптивного управления. При этом следует отметить, что повышение точности приближения реального движения динамической системы к модельному оптимальному, т.е. повышение точности решения задачи оптимального терминального управления системой в целом, может быть достигнуто за счет введения дополнительного контура коррекции текущей оценки состояния системы.

Литература

1. Справочник по теории автоматического управления. / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.

2. Петров Б.Н., Лопатин В.И., Митрошин Э.И., Васильев В.И. Некоторые вопросы статистически оптимальной обработк информации о параметрах траектории транспортного космического корабля. – XXV Конгресс МАФ. Амстердам, сентябрь 1974.

3. Сейдж Э.П., Уайт Ч. С. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982.

4. Первачев С. В., Перов А. И. Адаптивная фильтрация сообщений. М.: Радио и связь, 1991.

5. Половинчук Н.Я. Основы теории наведения баллистических ракет и специальных ЛА. РВИ РВ, 2011.

6. Таран В. Н., Трофименко В. Н. Синтез оптимального алгоритма угловой стабилизации методом прогнозирующей модели // Автоматика и телемеханика. 1997, №5, с. 82-85 .

Материал поступил в редакцию 19. 05. 2013 г.