УДК 519.23 + 519.25 + 629.7.01

© Сухорученков Б.И.
Sukhoruchenkov B.

СПОСОБЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОДНОЙ И ДВУМ ВЫБОРКАМ

METHODS OF STATISTICAL CONTROL OF THE NORMALLY DISTRIBUTED CHARACTERISTICS OF TECHNICAL SYSTEMS ON ONE AND TWO SELECTIONS

Аннотация. *Предлагаются новые способы статистического контроля случайных характеристик технических систем с нормальным распределением по одной и двум выборкам на основе построения плотности вероятностей оценок параметров распределения по методу несмещенных оценок. Показано, что наибольшая точность контроля достигается при представлении нормального распределения характеристик в зависимости от показателя компактности распределения, обратного среднеквадратическому отклонению.*

Annotation. *New ways of statistical control of casual characteristics of technical systems with normal distribution on one and two selections on the basis of creation of density of probabilities of estimates of parameters of distribution on a method of not displaced estimates are offered. It is shown that the greatest accuracy of control is reached at representation of normal distribution of characteristics depending on an indicator of compactness of distribution, the return to a mean square deviation.*

Ключевые слова. *Техническая система, случайная характеристика, нормальное распределение, параметры распределения, выборка, плотность вероятностей оценок параметров, проверка гипотез.*

Key words. *Technical system, casual characteristic, normal distribution, distribution parameters, selection, density of probabilities of estimates of parameters, check of hypotheses.*

Введение

При испытаниях, эксплуатации и совершенствовании технических систем (ТС) народнохозяйственного и военного назначения возникают задачи анализа и контроля соответствия требованиям и (или) изменения (улучшения) характеристик ТС. Характеристики ТС в общем случае являются случайными, при этом часто имеют нормальное распределение. Поэтому для контроля случайных характеристик (СХ) используются статистические методы обработки результатов измерений характеристик (выборок) при функционировании образцов ТС и методы проверки гипотез по одной или двум выборкам.

Существующие методы проверки гипотез о нормальных СХ ТС основаны на определении точечных оценок математического ожидания (МО) и дисперсии по методу максимального правдоподобия (ММП). Полученные оценки параметров распределения по выборкам сравниваются с требуемыми значениями или между выборками с использованием различных критериев. Такие критерии обоснованы только при соответствии параметров распределения требуемым значениям или при совпадении параметров в выборках.

Однако ряд задач контроля характеристик ТС нельзя решить только на основе точечных оценок параметров распределения. Для достоверного контроля характеристик ТС по экспериментальным данным в общем случае необходимо иметь плотности вероятностей (ПВ) оценок параметров распределения СХ. Такие ПВ можно построить по методу несмещенных оценок (МНО) [5]. Далее предлагаются новые способы контроля характеристик ТС, имеющих нормальное распределение, по одной или двум выборкам на основе использования МНО. При этом, как будет показано, для решения задач контроля СХ не требуется определять точечные оценки параметров распределения СХ.

Сухорученков Борис Иванович – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской инженерной академии, профессор кафедры ракетного вооружения, Военная академия РВСН имени Петра Великого, тел. (495) 696-06-48.

Sukhoruchenkov Boris – doctor of engineerings sciences, professor, corresponding member of the Russian engineering academy, professor of department of rocket armament, Military academy of RVSN of the name of Peter Great, tel. (495) 696-06-48.

1. Формы представления случайных характеристик ТС с нормальным распределением

Характеристики X ТС и их подсистем (кинематические, энергетические, прочностные, электрические и др.) обычно являются случайными и имеют нормальное распределение. При этом плотность вероятностей (ПВ) характеристик представляется в виде зависимости от математического ожидания (МО) M и дисперсии D или среднеквадратического отклонения (СКО) σ, которые являются мерой рассеивания

$$f_1(x, M, D) = (2\pi)^{-0,5} D^{-0,5} \exp\left[-0,5 D^{-1}(x-M)^2\right], \quad D>0; \tag{1}$$

$$f_2(x, M, \sigma) = (2\pi)^{-0,5} \sigma^{-1} \exp\left[-0,5 \sigma^{-2}(x-M)^2\right], \quad \sigma>0. \tag{2}$$

Модель ПВ характеристик можно также представить в виде функции от показателя сосредоточенности распределения, обратного СКО [2, 4]. Введем в рассмотрение показатель компактности (кучности) распределения (ПКР) $Q = \sigma^{-1}$. При этом ПВ нормального распределения характеристик ТС имеет вид

$$f_3(x, M, Q) = (2\pi)^{-0,5} Q \exp\left[-0,5 Q^2(x-M)^2\right], \quad Q>0. \tag{3}$$

Формы (1)–(3) представления ПВ случайных характеристик ТС при известных параметрах $D=\sigma^2$ и $Q=\sigma^{-1}$ совпадают. Однако если параметры распределения неизвестны, то результаты статистического оценивания характеристик ТС в виде распределений (1)–(3) по экспериментальным данным получаются разные, что показано в работе [4].

2. Классические методы сравнения параметров распределения по двум выборкам

Параметры распределения СХ ТС обычно неизвестны, поэтому они оцениваются статистическими методами. Контроль характеристик ТС по 2 выборкам проводится на основе методов проверки гипотез [1–3]. Для этого выдвигается основная гипотеза H_0, что параметры распределения в выборках совпадают. Для проверки гипотезы задается уровень значимости $\alpha \in [0,01;\ 0,10]$. В настоящее время контроль характеристик ТС производится на основе сравнения точечных оценок МО и дисперсий, полученных по выборкам по ММП. Рассмотрим 2 выборки значений характеристик ТС $x1_i$, $i = 1,..., n1$, и $x2_i$, $i = 1,..., n2$. По ним вычисляются несмещенные оценки средних значений и дисперсий по зависимостям [1, 3]

$$M_1 = n1^{-1} \sum_{i=1}^{n1} x1_i; \quad M_2 = n2^{-1} \sum_{i=1}^{n2} x2_i; \tag{4}$$

$$D_1 = (n1-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n1} (x1_i - M_1)^2;$$

$$D_2 = (n2-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n2} (x2_i - M_2)^2. \tag{5}$$

Сравнение средних значений (4) осуществляется на основе статистики [1, 3]

$$t = \left(M_1 - M_2\right) \times \left[\left(n1 \cdot D_1 + n2 \cdot D_2\right) \cdot \left(n1^{-1} + n2^{-1}\right) \cdot \left(n1 + n2 - 2\right)^{-1}\right]^{-0.5}. \tag{6}$$

При нормальном распределении СХ и совпадении параметров распределения в выборках статистика (6) имеет распределение Стьюдента, зависящее от числа степеней свободы $k = n1 + n2 - 2$ [1, 3]. На основе этой статистики можно проверить гипотезу о совпадении средних значений в выборках. Для этого по таблице распределения Стьюдента при заданном уровне значимости α определяется критическое значение показателя $t_{КР} = t(1-\alpha; k)$. Если полученное значение (6) $|t| \le t_{КР}$, то гипотеза принимается, то есть признается, что средние значения характеристик ТС в выборках совпадают.

Сравнение дисперсий характеристик ТС в выборках производится на основе отношения большей дисперсии (5) к меньшей. Если $D_1 > D_2$, то используется показатель [1, 3]

$$F = D_1 / D_2. \tag{7}$$

При нормальном распределении характеристик ТС и совпадении параметров распределения в выборках статистика (7) имеет F-распределение Фишера-Снедекора, зависящее от числа степеней свободы $k1=n1-1$ и $k2=n2-1$ [1, 3]. Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий в выборках по таблице F-распределения при заданном уровне значимости α определяется критическое значение показателя $F_{КР} = F(\alpha; k1; k2)$. Если полученное значение (7) $F \le F_{КР}$, то гипотеза принимается, то есть признается, что дисперсии характеристик ТС в выборках совпадают.

3. Построение плотности вероятностей оценок параметров распределения случайных характеристик ТС по экспериментальным данным

Для достоверного контроля СХ ТС по экспериментальным данным необходимо иметь ПВ оценок параметров распределения (ПР) СХ. На основе ПВ можно определить как вероятности отклонений ПР СХ ТС от требуемых значений, так и вероятности несовпадения ПР СХ в выборках и решить различные задачи контроля характеристик ТС на вероятностном уровне.

ПВ оценок параметров распределения можно построить по методу несмещенных оценок (МНО) [5]. Рассмотрим выборку реализаций характеристики ТС x_i, $i=1,...,n$. Известно, что характеристика ТС имеет нормальное распределение с неизвестными параметрами, ПВ которого может быть представлена в различных формах (1)–(3). Для сокращения записей обозначим параметры распределения D, σ и Q в общем виде R и введем обозначение $f(x,M,R)$ для ПВ. Возможные оценки параметров M, σ, Q и R обозначим в виде m, s, q и r соответственно. При принятых обозначениях ПВ оценок параметров M и R как случайных величин согласно МНО строится по выборке последовательно по зависимостям

$$g(m,r) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, m, r); \tag{8}$$

$$k = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(m,r)\,dm\,dr; \tag{9}$$

$$f(m,r) = k^{-1} g(m,r), \tag{10}$$

где $f(x_i, m, r)$ – ПВ (1), (2) или (3) при значениях $\{x_i\}$ и замене МО M и соответствующего параметра R на их возможные оценки m и r.

На основе ПВ $f(m, r)$ (10) можно построить автономные ПВ оценок параметров распределения как компонентов случайного вектора

$$f(m) = \int_0^{\infty} f(m,r)\,dr; \quad f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(m,r)\,dm. \tag{11}$$

По формулам (10) и (11) в зависимости от формы ПВ характеристик ТС получаются ПВ $f(m, d)$, $f(m, s)$ или $f(m, q)$ оценок параметров МО и дисперсии, СКО или ПКР, а также автономные ПВ $f(m)$, $f(d)$, $f(s)$ или $f(q)$ оценок этих параметров. ПВ (10) и (11) являются исчерпывающими характеристиками оценок параметров распределения характеристик ТС как случайных векторов и случайных величин. На основе таких ПВ можно осуществить как точечное, так и интервальное оценивание неизвестных ПР как первых моментов распределения. Зависимости для несмещенных оценок параметров приведены в работах [4, 5].

4. Контроль параметров распределения характеристик ТС по МНО по одной выборке

На основе ПВ оценок ПР характеристик ТС, построенных по МНО, можно осуществить контроль соответствия характеристик ТС требуемым значениям на основе методов проверки гипотез. При этом в качестве основной выдвигается гипотеза, что параметры распределения соответствуют требованиям.

4.1. *Контроль математического ожидания характеристик ТС*

Рассмотрим результаты наблюдений в виде реализаций СХ ТС x_i, $i = 1,...,n$. По этим значениям по зависимостям (8)-(11) строится автономная ПВ $f(m)$ оценок МО распределения СХ. Если заданы требования $M_{\text{ТР}}$ к МО СХ ТС, то на основе этой ПВ можно определить вероятности отклонения МО от требуемого значения по зависимостям

$$B_1 = \text{Вер}(M \ge M_{\text{ТР}}) = \int_{M_{\text{ТР}}}^{\infty} f(m)\,dm; \tag{12}$$

$$B_2 = \text{Вер}(M < M_{\text{ТР}}) = \int_{-\infty}^{M_{TP}} f(m)\,dm = 1 - B_1. \tag{13}$$

Определяется максимальное значение вероятности $B_{\max} = \max[B_1; B_2]$. Решение о МО СХ при заданном уровне значимости α принимается по правилу:

$$\left.\begin{array}{l} \text{МО соответствует требованию, если } B_{\max} \le 1-\alpha; \\ \text{МО не соответствует требованию, если } B_{\max} > 1-\alpha. \end{array}\right\} \tag{14}$$

4.2. *Контроль среднеквадратического отклонения характеристик ТС*

На основе построенных по зависимостям (8)-(11) ПВ оценок дисперсии, СКО или ПКР можно решить различные задачи контроля степени отклонений параметров распределения от требуемых значений. Обычно задаются требования к СКО характеристик $\sigma_{\text{ТР}}$. Если построена ПВ $f(s)$ оценок СКО, то вероятность, что СКО СХ не превышает требуемого значения, вычисляется по зависимости

$$B_0 = \text{Вер}(\sigma \le \sigma_{\text{ТР}}) = \int_0^{\sigma_{\text{ТР}}} f(s)\,ds. \tag{15}$$

Решение при заданном уровне значимости α принимается по правилу: СКО СХ соответствуют требованию, если

$$B_0 > \alpha. \tag{16}$$

4.3. *Контроль совместного отклонения математического ожидания и СКО характеристик ТС от требуемых значений*

Если построена ПВ $f(m,s)$ распределения вектора оценок МО и СКО СХ ТС, то можно определить вероятность совместного отклонения параметров распределения от требуемых значений. Например, вероятность того, что МО и СКО не превышают требуемых значений $M_{\text{ТР}}$ и $\sigma_{\text{ТР}}$, вычисляется по зависимости

$$\text{Вер}(M \le M_{\text{ТР}}; \sigma \le \sigma_{\text{ТР}}) = \int_0^{\sigma_{\text{ТР}}}\int_{-\infty}^{M_{\text{ТР}}} f(m,s)\,dm\,ds. \tag{17}$$

Аналогично можно определить вероятности при других вариантах сравнения параметров с требованиями к ним. На основе вероятностей (17) можно решить различные задачи контроля соответствия вектора параметров распределения СХ ТС требованиям. Если по зависимости (17) определить максимальную вероятность B_0, что МО и СКО соответствуют требуемым значениям, то для обоснования решения используется правило (16).

Следует заметить, что при принятии окончательного решения о МО или СКО следует учитывать величину вероятностей (12), (13), (15) или (17), которые отражают степень достоверности принимаемых решений.

5. Контроль параметров распределения характеристик ТС по МНО по двум выборкам

Контроль характеристик ТС обычно осуществляется на основе выдвижения основной гипотезы, что параметры распределения характеристик в выборках совпадают, которая проверяется при заданном уровне значимости α.

5.1. *Контроль математического ожидания характеристик ТС*

Рассмотрим 2 выборки, при которых получены реализации характеристик ТС $x1_i$, $i = 1,..., n1$, и $x2i$, $i = 1,..., n2$. По этим данным по зависимостям (8)-(11) строятся автономные ПВ оценок математического ожидания $f1(m1)$ и $f2(m2)$ СХ по каждой выборке. На их основе определяются вероятности несовпадения МО характеристик ТС $M1$ и $M2$ в выборках по зависимостям

$$B_{12} = \text{Вер}(M_1 \geq M_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{m2}^{\infty} f1(m1)\cdot f2(m2)\ dm1\,dm2; \quad (18)$$

$$B_{21} = \text{Вер}(M_1 < M_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{m2} f1(m1)\cdot f2(m2)\ dm1\,dm2; \quad (19)$$

$$B_{21} = 1 - B_{12};\ B_{\max} = \max\,[B_{12};\,B_{21}]. \quad (20)$$

При совпадении МО вероятности $B_{\max}=B_{12}=B_{21}=$ $=0{,}50$. При полном различии МО вероятности B_{12} и B_{21} стремятся к 0 или 1, а $B_{\max} = 1$. На основе вероятностей (18)–(20) при заданном уровне значимости α решение о совпадении МО характеристик ТС в выборках принимается по правилу:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{МО в выборках совпадают, если} & B_{\max}\leq 1-\alpha; \\ \text{МО в выборках не совпадают, если} & B_{\max}>1-\alpha; \\ \text{МО характеристики в 1-й выборке выше (или ниже),} & \\ \text{чем во 2-й выборке, если} & B_{12}\ (\text{или } B_{21})>1-\alpha. \end{array}\right\} \quad (21)$$

5.2. *Контроль показателей отклонений характеристик ТС от математического ожидания*

Случайную характеристику ТС с нормальным распределением можно описать в виде одной из форм (1)-(3). Обозначим, как в п. 3, показатели возможных отклонений (ПВО) СХ: дисперсию D, СКО σ или ПКР Q в общем виде R. Рассмотрим 2 выборки, на основе которых по зависимостям (8)–(11) построены автономные ПВ оценок r ПВО R: $f1(r1)$ и $f2(r2)$. На основе этих ПВ можно оценить степень различия характеристик ТС по 2 выборкам по зависимостям

$$B_{12} = \text{Вер}(R_1 \geq R_2) = \int_{0}^{\infty}\int_{r2}^{\infty} f1(r1)\cdot f2(r2)\ dr1\,dr2; \quad (22)$$

$$B_{21} = \text{Вер}(R_1 < R_2) = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{r2} f1(r1)\cdot f2(r2)\ dr1\,dr2; \quad (23)$$

$$B_{21} = 1-B_{12};\ B_{\max} = \max\,[B_{12};\,B_{21}]. \quad (24)$$

При совпадении ПВО вероятности $B_{\max}=B_{12}=B_{21}=$ $=0{,}50$. При полном различии ПВО вероятности B_{12} и B_{21} стремятся к 0 или 1, а $B_{\max}=1$. Имея вероятности (22)–(24), можно обосновать решение о совпадении или несовпадении ПВО характеристик ТС в выборках по правилу, аналогичному (21).

Отметим, что при окончательном решении о параметрах распределения СХ ТС по двум выборкам целесообразно учитывать непосредственно вероятности (18)–(20) и (22)–(24), которые отражают степень достоверности принимаемых решений.

5.3. *Контроль совпадения вектора параметров распределения характеристик ТС по двум выборкам*

Если построена ПВ распределения вектора оценок МО и ПВО СХ ТС $f1(m1,r1)$ и $f2(m2,r2)$ по первой и второй выборке, то имеется возможность оценить вероятность совместного отклонения параметров распределения в этих выборках. Например, вероятность того, что параметры распределения в 1-й выборке не превышают соответствующих параметров во 2-й выборке, вычисляется по зависимости

$$\text{Вер}(M_1 \leq M_2; R_1 \leq R_2) =$$
$$= \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{r2}\int_{-\infty}^{m2} f1(m1,r1)\cdot f2(m2,r2)\,dm1dr1dm2dr2. \quad (25)$$

Аналогично можно определить вероятности других вариантов сравнения параметров распределения СХ ТС. Отметим, что при совпадении распределений СХ в выборках вероятности (25) равны 0,25. При полном различии параметров распределения вероятности (25) при различных вариантах сравнения равны или 0, или 1. На основе вероятностей несовпадения параметров распределения СХ, вычисляемых по зависимостям, аналогичным (25), можно проверить различные гипотезы о характеристиках ТС в выборках.

Основным достоинством изложенных в п. 3-5 способов в отличие от классических методов проверки гипотез является то, что они позволяют непосредственно определить вероятности отклонений параметров распределения характеристик ТС от требуемых значений или вероятности несовпадения параметров в выборках.

Следует отметить, что классические методы проверки гипотез при ограниченных уровнях значимости $\alpha \le 0{,}10$ всегда отдают предпочтение основной выдвигаемой гипотезе. Если выдвинуть альтернативную гипотезу, то с высокой вероятностью она также может быть подтверждена. Поэтому при обосновании решения о характеристиках ТС целесообразно не выдвигать заранее какую-либо гипотезу, а основываться непосредственно на вероятностях, вычисляемых по зависимостям (18)–(20) и (22)–(24).

6. Демонстрация способов на примере контроля точности и кучности стрельбы баллистических ракет

6.1. *Постановка задачи контроля отклонений боевых блоков от цели*

Для проверки работоспособности и точности изложенных выше способов рассмотрим задачу контроля точности и кучности стрельбы баллистических ракет (БР). Допустим, что при пусках БР получены отклонения боевых блоков (ББ) от цели по дальности, приведенные в условных единицах в табл. 1.

Таблица 1

Отклонения боевых блоков (ББ) от цели по дальности

Номера пусков, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Отклонения от цели, δ_i	1,53	-1,05	-2,27	-2,68	-1,12	1,31	2,24	-0,17	-0,25	-0,43	1,66	2,18	0,26	2,14	-0,58

Предполагается, что отклонения ББ от цели имеют нормальное распределение. Известно, что после 7-го испытания проведена модернизация БР. Необходимо проверить, повлияла ли модернизация на показатели точности и кучности стрельбы. Для этого выдвигается основная гипотеза H0, что показатели не изменились, и проверяется при уровне значимости $\alpha = 0{,}10$.

Для решения задачи используем способы, изложенные в пп. 2 и 5. Одновременно проведем сравнение результатов решения задачи при различных формах представления нормального распределения СХ, представленных в п. 1.

6.2. *Контроль показателей отклонений ББ от цели существующими способами*

Существующие способы, см. п. 2, предназначены для проверки нулевых гипотез, что средние значения и дисперсии характеристик ТС в выборках не изменились. Рассмотрим 2 выборки отклонений $\{\delta_i\}$, приведенных в табл. 1: первая при $i = 1,...,7$ объемом $n1 = 7$ и вторая при $i = 8,...,n$ объемом $n2 = 8$. На основе данных табл. 1 по зависимостям (4) и (5) вычислим средние значения и дисперсии в выборках

$$M_1 = -0,291;\ D_1 = 3,862;\ M_2 = 0,601;\ D_2 = 1,411. \qquad (26)$$

На основе средних значений (26) по зависимости (6) определяется показатель t=1,005. По таблице распределения Стьюдента [1, 3] при k=13 и $\gamma=1-\alpha=0{,}90$ находим критическое значение показателя $t_{\text{КР}}$=1,77. Так как $t<t_{\text{КР}}$, то следует считать, что средние значения отклонений ББ от цели до и после модернизации совпадают.

По зависимости (7) на основе дисперсий (26) вычисляется показатель $F=D_1/D_2$ = 2,737. К сожалению, в таблице распределения Фишера-Снедекора [1, 3] значения для α=0,10 отсутствуют, приведены данные только для α=0,05. При этом значении α по таблице F-распределения при k_1=6 и k_2=7 находим критическое значение показателя $F_{\text{КР}}$=3,87. Так как $F<F_{\text{КР}}$, то следует признать, что дисперсия отклонений ББ от цели после модернизации не изменилась.

Таким образом, существующие методы подтверждают гипотезу, что параметры распределения СХ ТС до и после модернизации совпадают.

6.3. *Контроль отклонений ББ от цели по способу п. 5 при плотности вероятностей отклонений в форме (1)*

А. *Построение плотности вероятностей оценок параметров распределения отклонений ББ.* ПВ оценок МО и дисперсии отклонений ББ от цели до и после модернизации строятся по зависимостям (8)–(11) по двум выборкам: для испытаний с номерами с 1-го по 7-й и с 8-го по 15-й. Анализ показал, что ПВ оценок дисперсии имеет очень длинный «хвост». Для обеспечения оперативности и достаточной точности интегрирование по зависимостям (8)–(11) осуществлялось в пределах $m\in[-4; 4]$, $d\in[0,1; 200–300]$. ПВ для модели распределения отклонений (1) показаны на рис. 1 и 2.

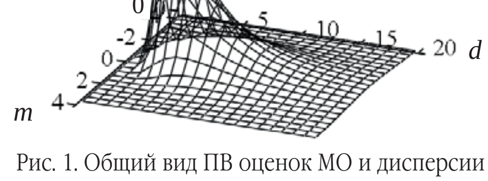

Рис. 1. Общий вид ПВ оценок МО и дисперсии по 1-й выборке

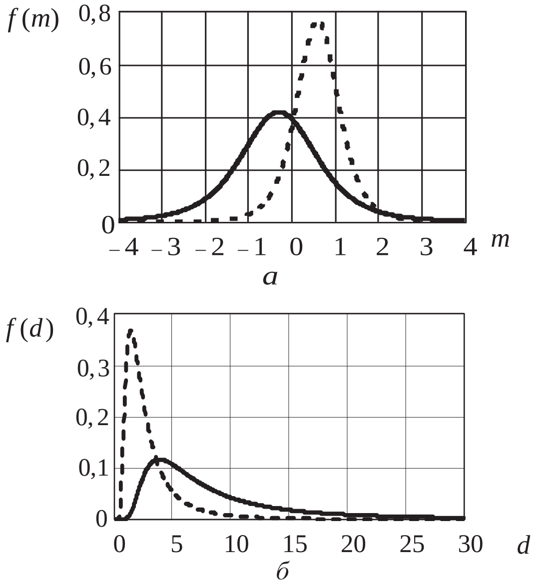

Рис. 2.Автономные ПВ оценок *а* – МО и б – дисперсии: по 1-й выборке (сплошная) и по 2-й выборке (пунктирная)

Б. *Сравнение математических ожиданий отклонений ББ от цели.* Из рис. 2*а* видно, что после модернизации МО отклонений от цели могло измениться. Вероятность того, что МО отклонений во 2-й выборке выше, нежели в 1-й, вычисляется по зависимости (19) с учетом ПВ, показанных на рис. 2,а

$$\text{Вер}(M_2 \ge M_1) = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{m2} f1(m1)\cdot f2(m2)\; dm1\, dm2 = 0{,}766. \quad (27)$$

По правилу (21) при заданном уровне значимости α=0,10 следует считать, что МО не изменилось.

В. *Сравнение дисперсий* отклонений ББ от цели. Из рис. 2б видно, что после модернизации дисперсия отклонений от цели заметно снизилась. Вероятность этого вычисляется по зависимости (22) с учетом ПВ, показанных на рис. 2,б

$$\text{Вер}(D_2 \le D_1) = \int_{0.1}^{200}\int_{d2}^{300} f1(d1)\cdot f2(d2)\; dd1\, dd2 = 0{,}857. \quad (28)$$

По правилу, аналогичному (21), при заданном уровне значимости α следует считать, что дисперсия после модернизации не изменилась.

Г. *Совместное сравнение параметров отклонений ББ от цели.* На основе ПВ вектора оценок МО и дисперсии $f1(m1, d1)$ и $f2(m2, d2)$, построенных по выборкам, можно определить вероятность несовпадения обоих ПР отклонений ББ по зависимости (25). Например, вероятность неравенств МО $M_1 \le M_2$ и дисперсий $D_1 \ge D_2$ равна

$$\text{Вер}(M_1 \le M_2; D_1 \ge D_2) = \int_{0.1}^{200}\int_{-4}^{4}\int_{d2}^{300}\int_{-\infty}^{m2} f1(m1,d1)\times . \\ \times f2(m2,d2)dm1\, dd1\, dm2\, dd2 = 0{,}660. \quad (29)$$

По правилу, аналогичному (21), следует признать, что параметры распределения отклонений ББ от цели после модернизации существенно не изменились. Следует, однако, отметить, что при обосновании окончательного решения о точности и кучности стрельбы БР следует учесть вероятности (27)-(29), которые имеет значительный уровень.

6.4. *Контроль отклонений ББ от цели по способу п. 5 при плотности вероятностей отклонений в форме (2)*

А. *Построение плотности вероятностей оценок МО и СКО.* ПВ оценок МО и СКО отклонений ББ от цели

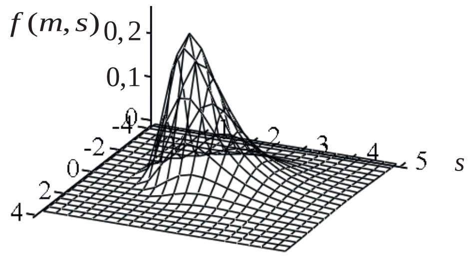

Рис. 3. Общий вид ПВ оценок МО и СКО по 1-й выборке

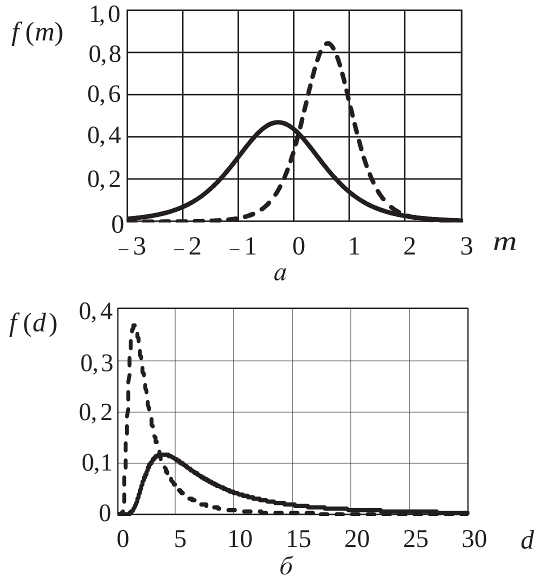

Рис. 4. Автономные ПВ оценок *а* – МО и б – СКО: по 1-й выборке (сплошная) и по 2-й выборке (пунктирная)

строятся по выборкам аналогично п. 6.3.А. Они показаны на рис. 3 и 4.

Б. *Сравнение математических ожиданий отклонений ББ от цели.* Из рис. 4а видно, что после модернизации МО отклонений ББ от цели могло повыситься. Вероятность этого вычисляется по зависимости (19) с учетом ПВ, показанных на рис. 4,а

$$\text{Вер}(M_2 \ge M_1) = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{m2} f1(m1)\cdot f2(m2)\; dm1\, dm2 = 0{,}802. \quad (30)$$

По правилу (21) при заданном уровне значимости α следует считать, что МО не изменилось.

В. *Сравнение среднеквадратических отклонений ББ от цели.* Из рис. 4,б видно, что после модернизации СКО отклонений ББ от цели заметно снизилось. Вероятность этого вычисляется по зависимости (22) с учетом ПВ, показанных на рис. 4,б:

$$\text{Вер}(\sigma_2 \le \sigma_1) = \int\limits_{0.1}^{10}\int\limits_{d2}^{10} f1(s1)\cdot f2(s2)\ ds1\,ds2 = 0,873. \quad (31)$$

По правилу, аналогичному (21), при заданном уровне значимости α следует считать, что после модернизации СКО не изменилось.

Г. *Совместное сравнение параметров отклонений ББ от цели.* На основе ПВ вектора оценок МО и СКО $f1(m1, s1)$ и $f2(m2, s2)$, построенных по выборкам, определяется вероятность несовпадения обоих ПР отклонений ББ по зависимости (25). Например, вероятность неравенств МО $M_1 \le M_2$ и СКО $\sigma_1 \ge \sigma_2$ равна

$$\text{Вер}(M_1 \le M_2; \sigma_1 \ge \sigma_2) = \int\limits_{0.1}^{10}\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{s2}^{10}\int\limits_{-\infty}^{m2} f1(m1, s1)\times$$
$$\times f2(m2, s2)dm1\,ds1\,dm2\,ds2 = 0,704. \quad (32)$$

По правилу, аналогичному (21), следует признать, что параметры распределения отклонений ББ от цели после модернизации существенно не изменились. Однако при окончательном решении о точности и кучности стрельбы БР следует учесть, что вероятности (30)–(32) имеют высокий уровень.

6.5. *Контроль отклонений ББ от цели по способу п.5 при плотности вероятностей отклонений в форме (3)*

А. *Построение плотности вероятностей оценок параметров распределения.* ПВ оценок МО и ПКР отклонений ББ по выборкам строится аналогично п. 6.3.А. Построенные ПВ для модели распределения отклонений (3) показаны на рис. 5 и 6.

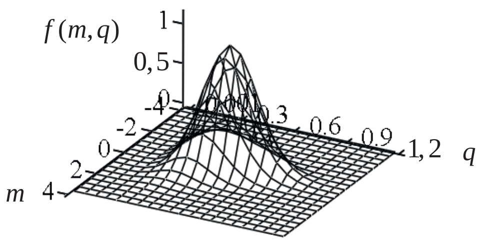

Рис. 5. Общий вид ПВ оценок МО и показателя компактности распределения по 1-й выборке

Б. *Сравнение математических ожиданий отклонений ББ от цели.* Из рис. 6,а видно, что после модернизации МО отклонений ББ от цели могло возрасти. Вероятность этого вычисляется по зависимости (19) с учетом ПВ, показанных на рис. 6,а:

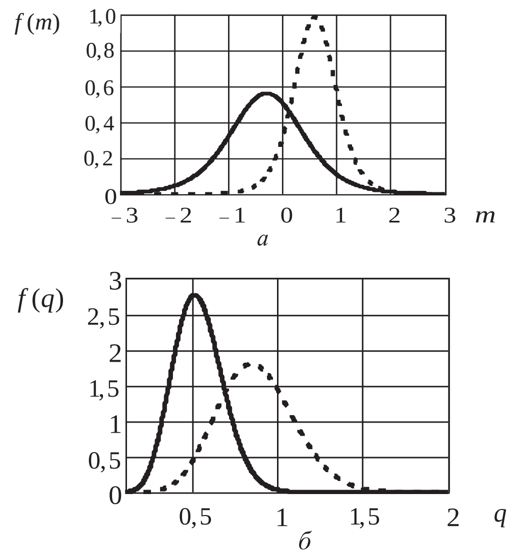

Рис. 6. Автономные ПВ оценок *а* – МО и б – ПКР: по 1-й выборке (сплошная) и по 2-й выборке (пунктирная)

$$\text{Вер}(M_2 \ge M_1) = \int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{-4}^{m2} f1(m1)\cdot f2(m2)\ dm1\,dm2 = 0,846. \quad (33)$$

По правилу (21) при заданном уровне значимости α следует считать, что МО не изменилось.

В. *Сравнение показателей компактности распределения отклонений ББ от цели.* Из рис. 6,б видно, что после модернизации ПКР заметно возрос. Вероятность этого вычисляется по зависимости (23) с учетом ПВ, показанных на рис. 6,б

$$\text{Вер}(Q_2 \ge Q_1) = \int\limits_{0.01}^{3}\int\limits_{0.01}^{q2} f1(q1)\cdot f2(q2)\ dq1\,dq2 = 0,905. \quad (34)$$

По правилу (21) при заданном уровне значимости α следует считать, что показатель компактности распределения изменился (стал выше), то есть кучность стрельбы БР после модернизации повысилась.

Г. *Совместное сравнение показателей отклонений ББ от цели.* На основе ПВ вектора оценок МО и ПКР $f1(m1, q1)$ и $f2(m2, q2)$, построенных по выборкам, можно определить вероятность несовпадения обоих параметров распределения отклонений ББ по зависимости (25). Например, вероятность неравенств МО $M_1 \le M_2$ и ПКР $Q_1 \le Q_2$ равна

$$\text{Вер}(M_1 \le M_2; Q_1 \le Q_2) = \int\limits_{0.01}^{3}\int\limits_{-4}^{4}\int\limits_{0.01}^{q2}\int\limits_{-4}^{m2} f1(m1, q1)\times$$
$$\times f2(m2, q2)dm1\,dq1\,dm2\,dq2 = 0,753. \quad (35)$$

По правилу, аналогичному (21), следует признать, что параметры распределения отклонений ББ после модернизации существенно не изменились. Однако при окончательном решении о точности и кучности стрельбы БР необходимо учесть, что вероятности (33)–(35) имеют высокий уровень.

6.6. *Сравнение способов контроля параметров распределения отклонений ББ от цели по двум выборкам*

Приведенные выше примеры свидетельствуют, что для контроля случайных характеристик ТС по выборкам можно использовать как классические методы, основанные на сравнении оценок МО и дисперсий [1, 3], так и новые способы на основе применения МНО при различных формах представления ПВ распределения характеристик ТС (1)-(3). Для выбора рационального способа контроля СХ ТС по 2 выборкам в табл. 2 приведены данные о результатах решения задачи, поставленной в п. 6.1, различными способами. В табл. 2 дисперсия, СКО или ПКР обозначены в общем виде как показатели возможных отклонений (ПВО) R. Знак $\succ$ означает «лучше»: меньше для дисперсии и СКО и больше для ПКР.

Из табл. 2 следует, что практически все способы подтверждают основные гипотезы, что параметры распределения характеристик в выборках совпадают. Однако вероятности несовпадения ПР, полученные по МНО, имеют значимый уровень, которым нельзя пренебрегать при принятии окончательного решения.

Таблица 2

Отклонения боевых блоков (ББ) от цели по дальности

Способы сравнения	Результаты сравнения МО и показателей R возможных отклонений ББ от цели					
	Проверка гипотезы о МО		Проверка гипотезы о ПВО		Проверка гипотезы о МО и ПВО	
	Вер($M_2 > M_1$)	H_0:$M_2 = M_1$	Вер($R_2 \succ R_1$)	H_0:$R_2 = R_1$	Вер($M_2 > M_1$; $R_2 \succ R_1$)	H_0:$M_2 = M_1$; $R_2 = R_1$
Классические способы, п. 2	-	принимается	-	принимается	-	-
Способ п. 5 по МО и дисперсии	0,766	принимается	0,857	принимается	0,660	принимается
Способ п. 5 по МО и СКО	0,802	принимается	0,873	принимается	0,704	принимается
Способ п. 5 по МО и ПКР	0,846	принимается	0,905	отклоняется	0,753	принимается

Следует особо отметить, что если выдвинуть альтернативные гипотезы, что параметры распределения в выборках отличаются, то такие гипотезы при том же уровне значимости были бы приняты, так как вероятности несовпадения ПР, приведенные в табл. 2, значительно выше принятого уровня значимости $\alpha = 0{,}10$. Это подтверждает приведенные ранее рекомендации, что контроль характеристик ТС целесообразно осуществлять на основе вероятностей соответствия параметров распределения СХ требованиям или вероятностей отклонений таких параметров в выборках, определяемых по МНО по зависимостям, приведенным в пп. 3–5.

Из табл. 2 видно, что вероятности несовпадения ПР в выборках заметно зависят от формы представления ПВ нормального распределения характеристик ТС. Наибольший уровень различия параметров достигается при использовании формы (3) распределения. При этом основная гипотеза о совпадении ПКР отклоняется, то есть показатель компактности распределения во второй выборке значимо выше. Анализ результатов решения аналогичных задач при вариациях объемов и элементов выборок показал, что наибольшая точность контроля характеристик ТС обеспечивается при использовании ПВ распределения характеристик в форме (3), при которой отклонения характеристик ТС от математического ожидания представлены показателем компактности распределения.

Выводы

На основе проведенных исследований получены следующие результаты и выводы.

Показано, что плотность вероятностей нормального распределения случайных характеристик ТС можно представить в трех формах (1)-(3), параметрами которых являются дисперсия, среднеквадратическое отклонение или показатель компактности распределения, см. п. 1.

Изложены существующие способы проверки гипотез о параметрах распределения характеристик ТС по двум выборкам, см. п. 2.

Представлены способы построения плотности вероятностей оценок параметров нормального распределения характеристик ТС по экспериментальным данным по методу несмещенных оценок, см. п. 3.

Обоснованы способы контроля характеристик ТС по одной или двум выборкам при использовании различных форм представления нормального распределения характеристик, см. пп. 4 и 5.

Проведена демонстрация способов контроля характеристик ТС по двум выборкам и показано, что наибольшая точность контроля достигается при представлении нормального распределения характеристик ТС в форме зависимости от показателя компактности распределения, см. п. 6.

Разработанные способы обеспечивают контроль характеристик ТС по экспериментальным данным без предварительного выдвижения гипотез и задания уровня значимости для их проверки, а только на основе анализа вероятностей отклонений параметров распределения характеристик ТС от требуемых значений или вероятностей несовпадения этих параметров в разных выборках. В результате повышается степень обоснованности и точность контроля характеристик ТС по одной или двум выборкам.

Литература

1. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2007.

2. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002.

3. Смирнов Н. В. , Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1965.

4. Сухорученков Б. И. Способ повышения точности оценивания нормального распределения характеристик технических систем по ограниченной выборке. // Двойные технологии. 2013, № 1 (62). С. 37-42.

5. Сухорученков Б. И. Анализ малой выборки. Прикладные статистические методы. М.: Вузовская книга, 2010.

Материал поступил в редакцию 22. 09. 2014 г.