УДК 532.5.032 + 517.954

© Аверьянов А.Н.
Averyanov A.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО НЕСЖИМАЕМОГО ПАРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ДЛИННОЙ ТЕПЛОВОЙ ТРУБЫ

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR A VISCOUS INCOMPRESSIBLE COUPLE CYLINDRICAL CHANNELS LONG HEAT PIPE

Аннотация. *Рассматривается стационарное течение вязкого несжимаемого пара в цилиндрическом канале длинной тепловой трубы (радиуса и длины). К зоне испарения тепловой трубы осесимметрично подводится, а в зоне конденсации отводится тепловая мощность с аксиальным распределением плотности теплового потока . Строится асимптотика решения соответствующей задачи Дирихле для уравнения Навье-Стокса по степеням малого параметра.*

Annotation. *Stationary flow of viscous incompressible vapor in a cylindrical channel of the long heat pipe (radius of and length of) is considered. The heat power with axial distribution of heat-flux density is supplied to the evaporation zone of the heat pipe and taken from the condensation zone. Asymptotic expansion of the corresponding Dirichlet problem solution for Navier-Stokes system in powers of the small parameter is constructed.*

Ключевые слова. *Тепловая труба, уравнение математической физики, уравнение Навье-Стокса, асимптотическое разложение, усреднение дифференциальных операторов.*

Key words. *Heat pipe, equations of mathematical physic, Navier-Stokes equation, asymptotic expansion, homogenization of differential operators.*

Как известно [1,2], течение пара в тепловых трубах в значительной степени идентично течению потока в канале с проницаемыми стенками при переменном по длине массовом расходе теплоносителя. При этом зоны испарения и конденсации можно рассматривать как последовательно работающие раздающие и сборные каналы, в которых осуществляется вдув (при испарении) и отток (при конденсации) парового потока. Для описания штатных (высокотемпературных) режимов течения парового потока в каналах тепловых труб обычно используется модель вязкой несжимаемой жидкости в виде соответствующей системы уравнений Навье-Стокса [1,2].

Постановка задачи

Рассмотрим стационарное течение вязкого несжимаемого пара в цилиндрическом канале тепловой трубы (радиуса R и длины L) под действием осесимметричного теплового потока Q, подводимого к боковой цилиндрической поверхности в зоне испарения и отводимого в зоне конденсации.

Постановка задачи описывается следующей задачей Дирихле для уравнения Навье-Стокса в цилиндрической области Ω_{RL}:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial z}+\rho w\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right);$$

$$\rho u\frac{\partial w}{\partial z}+\rho w\frac{\partial w}{\partial r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{w}{r^2}\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)=0.$$

Краевые условия:

$$u(r,0)=u(r,L)=u(R,z)=w(r,0)=w(r,L)=0; \tag{2}$$

$$w(R,z)=\varphi(z).$$

Условия согласования:

$$\varphi(0)=\varphi(L)=0;\ \int_0^L\varphi(z)dz=0, \tag{3}$$

где (r, z) – цилиндрическая система координат с центром, расположенным на левой торцевой поверхности цилиндрической тепловой трубы в зоне испарения;

Ω_{RL} – круговой цилиндр радиуса R и длины L,

$u(r, z)$ и $w(r, z)$ – аксиальная и радиальная компоненты вектора скорости пара;

$p(r, z)$ – давление пара;

Аверьянов Андрей Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГУП «ЦНИИмаш», тел. 8(495)513-54-16.

Averyanov Andrey – PhD in mathematics, senior researcher, TsNIIMash, tel. 8(495) 513-54-16.

ρ, μ – соответственно плотность пара и коэффициент динамической вязкости,

$\varphi(z)$ – скорость испарения (конденсации) парового потока на боковой поверхности.

Функцию φ полагаем достаточно гладкой на отрезке $[0, L]$.

Пусть плотность осесимметричного теплового потока, подводимого к боковой поверхности ТТ, имеет аксиальное распределение $q(z)$. В зоне испарения считаем $q(z)\geq 0$, а в зоне конденсации, соответственно, $q(z)\leq 0$. Полагая, что всё подводимое в зоне испарения (и отводимое в зоне конденсации) тепло идет исключительно на испарение (конденсацию) теплоносителя с поверхности мениска тепловой трубы, получаем, что скорость пара $\varphi(z)$ на боковой поверхности связана с плотностью теплового потока $q(z)$ следующей зависимостью:

$$\varphi(z) = -q(z)/\lambda\rho, \tag{4}$$

где λ – скрытая теплота парообразования теплоносителя, а минус появляется по причине противоположных алгебраических знаков скорости потока и тепловой мощности на боковой поверхности тепловой трубы как в зоне испарения, так и в зоне конденсации.

Введем следующие обозначения:

• характерную аксиальную скорость парового потока $V \equiv \dfrac{Q}{\pi R^2 \rho\lambda}$; (5)

• число Рейнольдса $\mathrm{Re} \equiv \dfrac{\rho V R}{\mu} = \dfrac{Q}{\pi\mu\lambda R}$;

• среднее значение модуля плотности теплового потока по длине тепловой трубы $q_L \equiv \dfrac{1}{L}\int_0^L |q(z)|\,dz$.

Легко видеть, что $Q = \pi R L q_L$. (6)

По условию рассматриваемая тепловая труба длинная, поэтому исходная задача (1)–(3) естественным образом содержит малый параметр $\varepsilon = \dfrac{R}{L} \ll 1$.

Результат

Основным результатом данной работы является следующее асимптотическое разложение решения задачи (1)–(3) по степеням малого параметра ε ($\varepsilon\to 0$):

$$u(r,z,\varepsilon) = \frac{Q}{\pi R^2\rho\lambda} H\left(\frac{z}{L}\right)[4(1-(r/R)^2) +$$

$$+\varepsilon\frac{\mathrm{Re}}{36} q_1\left(\frac{z}{L}\right)(8(r/\mathrm{R})^6 - 36(r/\mathrm{R})^4 + 36(r/\mathrm{R})^2 - 8)] + O(\varepsilon^2);$$

$$w(r,z,\varepsilon) = \frac{Q}{\pi R^2\rho\lambda}[\varepsilon q_1\left(\frac{z}{L}\right)((r/\mathrm{R})^3 - 2(r/\mathrm{R})) +$$

$$+\varepsilon^2\frac{\mathrm{Re}}{36}\left(q_1^2\left(\frac{z}{L}\right) + H\left(\frac{z}{L}\right)\left.\frac{dq_1(x)}{dx}\right|_{x=z/L}\right)(-(r/R)^7 + \tag{7}$$

$$+6(r/R)^5 - 9(r/R)^3 + 4(r/R))] + O(\varepsilon^3);$$

$$p(r,z,\varepsilon) = -\rho V^2[\varepsilon^{-1}\frac{16}{\mathrm{Re}}\int_0^{z/L} H(t)dt +$$

$$+12\int_0^{z/L} q_1(t)H(t)dt] + O(\varepsilon) + Const,$$

где $q_1\left(\dfrac{z}{L}\right) \equiv \dfrac{q(z)}{q_L}$, $H(t) \equiv \int_0^t q_1(x)dx$.

Описание математической модели

Из законов сохранения следует, что

$$\int_0^L q(z)dz = \int_0^L \varphi(z)dz = 0. \tag{8}$$

В задаче (1)–(3) проведем следующую нормировку для перехода к безразмерным переменным:

$$r_1 = \frac{r}{R};\quad z_1 = \frac{z}{L};\quad u_1 = \frac{u}{V};$$

$$w_1 = \frac{w}{V};\quad p_1 = \frac{p}{\rho V^2};\quad \varphi_1 = \frac{\varphi}{V}. \tag{9}$$

С учетом (4)–(6) имеем для безразмерной скорости потока на боковой поверхности:

$$\varphi_1(z_1) = \frac{\varphi(z)}{V} = -\frac{\pi R^2}{Q}q(z) = -\varepsilon\frac{q(z)}{q_L} = -\varepsilon q_1(z_1). \tag{10}$$

Тогда с учетом (9)–(10) система (1)–(3) трансформируется в следующую задачу Дирихле в единичном цилиндре $\Omega_{1,1}$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = -\varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right)\right); \\
&u_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \varepsilon w_1\frac{\partial w_1}{\partial r_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial r_1} + \\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial w_1}{\partial r_1}\right) - \frac{w_1}{r_1^2}\right); \\
&\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1 w_1) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned}
&u_1(r_1,0) = u_1(r_1,1) = u_1(1,z_1) = \\
&= w_1(r_1,0) = w_1(r_1,1) = 0; \\
&w_1(1,z_1) = \varphi_1(z_1) = -\varepsilon q_1(z_1).
\end{aligned} \tag{12}$$

Условия согласования:

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0;\quad \int_0^1 \varphi_1(z_1)dz_1 = 0. \tag{13}$$

здесь малый параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Как известно [3, 4], для описания динамики двумерных течений можно использовать функцию тока. Введем функцию тока $\Psi(r_1, z_1, \varepsilon)$ следующим образом:

$$u_1 = \frac{1}{r_1}\frac{\partial\Psi}{\partial r_1} \equiv \frac{1}{r_1}\Psi_r;\quad w_1 = -\frac{\varepsilon}{r_1}\frac{\partial\Psi}{\partial z_1} \equiv -\frac{\varepsilon}{r_1}\Psi_z, \tag{14}$$

здесь и далее $\Psi_r \equiv \dfrac{\partial \Psi}{\partial r_1}$; $\Psi_z \equiv \dfrac{\partial \Psi}{\partial z_1}$.

При этом уравнение неразрывности в (11) удовлетворяется автоматически.

Для частных производных скорости потока имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{1}{r_1}\Psi_{rz};\quad \frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\Psi_r\right);$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = -\frac{\varepsilon}{r_1}\Psi_{zz};\quad \frac{\partial w_1}{\partial r_1} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\Psi_z\right); \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} = \frac{1}{r_1}\Psi_{rzz};\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\left(\frac{1}{r_1}\Psi_r\right);$$
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1 \partial z_1} = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\Psi_{rz}\right); \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} = -\frac{\varepsilon}{r_1}\Psi_{zzz};\quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial r_1^2} = -\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\left(\frac{1}{r_1}\Psi_z\right);$$
$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial r_1 \partial z_1} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\Psi_{zz}\right). \tag{17}$$

Далее в первых двух уравнениях (11) исключаем давление $p_1(r_1, z_1)$.

Для этого дифференцируем первое уравнение по r_1, а второе по z_1 и умножаем на ε. Затем берем их разность. В результате (с учетом (14)–(17)) получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^{-2}\Psi_r\Psi_{rz} - r_1^{-1}\Psi_z\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\Psi_r}{r_1}\right)\right] +$$
$$+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial z_1}\left(r_1^{-2}\Psi_r\Psi_{zz}\right) - \varepsilon^4\frac{\partial}{\partial z_1}\left(r_1^{-1}\Psi_z\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\Psi_z}{r_1}\right)\right) =$$
$$= \mathrm{Re}^{-1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^{-1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\Psi_r}{r_1}\right)\right)\right) +$$
$$+\frac{2\varepsilon^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\Psi_{rzz}}{r_1}\right) + \frac{\varepsilon^4}{\mathrm{Re}}\frac{\Psi_{zzzz}}{r_1}. \tag{18}$$

Краевые условия получаем с учетом (12) и (14):

$$\Psi_r(r_1,0) = \Psi_r(r_1,1) = \Psi_r(1,z_1) =$$
$$= \Psi_z(r_1,0) = \Psi_z(r_1,1) = 0; \tag{19}$$

$$\Psi_z(1,z_1) = q_1(z_1). \tag{20}$$

Построение асимптотики для функции тока $\Psi(r_1, z_1, \varepsilon)$

Асимптотическое разложение решения задачи (18)–(20) будем строить в следующем виде:

$$\Psi(r_1,z_1,\varepsilon) = \Psi_0(r_1,z_1) + \varepsilon\Psi_1(r_1,z_1) + \ldots;$$
$$(\varepsilon \to 0). \tag{21}$$

Тогда асимптотика для скорости потока из задачи (11)–(13)

$$u_1(r_1,z_1,\varepsilon) \equiv r_1^{-1}\frac{\partial \Psi(r_1,z_1,\varepsilon)}{\partial r_1} =$$
$$= r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0(r_1,z_1)}{\partial r_1} + \varepsilon r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1} + \ldots;$$

$$w_1(r_1,z_1,\varepsilon) \equiv -\frac{\varepsilon}{r_1}\frac{\partial \Psi(r_1,z_1,\varepsilon)}{\partial z_1} =$$
$$= -\varepsilon r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0(r_1,z_1)}{\partial z_1} - \varepsilon^2 r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_1(r_1,z_1)}{\partial z_1} - \ldots \tag{22}$$

Подставим разложение (21) в (18) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε.

Тогда для $\Psi_0(r_1, z_1)$ (степень ε^0) получаем следующую краевую задачу в цилиндре $\Omega_{1,1}$:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^{-1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0(r_1,z_1)}{\partial r_1}\right)\right)\right] = 0;$$
$$\frac{\partial \Psi_0(r_1,0)}{\partial r_1} = \frac{\partial \Psi_0(r_1,1)}{\partial r_1} = \frac{\partial \Psi_0(1,z_1)}{\partial r_1} = 0;$$
$$\frac{\partial \Psi_0(r_1,0)}{\partial z_1} = \frac{\partial \Psi_0(r_1,1)}{\partial z_1} = 0; \tag{23}$$
$$\frac{\partial \Psi_0(1,z_1)}{\partial z_1} = q_1(z_1).$$

Аналогично для $\Psi_1(r_1, z_1)$ (степень ε^1) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^{-1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1}\right)\right)\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial r_1}\left[r_1^{-2}\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1}\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r_1 \partial z_1} - r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0}{\partial r_1}\right)\right];$$
$$\frac{\partial \Psi_1(r_1,0)}{\partial r_1} = \frac{\partial \Psi_1(r_1,1)}{\partial r_1} = \frac{\partial \Psi_1(1,z_1)}{\partial r_1} = 0; \tag{24}$$
$$\frac{\partial \Psi_1(r_1,0)}{\partial z_1} = \frac{\partial \Psi_1(r_1,1)}{\partial z_1} = \frac{\partial \Psi_1(1,z_1)}{\partial z_1} = 0.$$

Найдем решение краевой задачи (23). Из первого уравнения (23) после троекратного интегрирования по r_1 получим

$$r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0(r_1,z_1)}{\partial r_1} = f_1(z_1)r_1^2 + f_2(z_1)\ln r_1 + f_3(z_1), \tag{25}$$

где $f_j(z_1)$, ($j = 1 \ldots 4$) суть некоторые достаточно гладкие функции на отрезке [0, 1].

Поскольку из (22) следует, что это нулевая компонента асимптотики скорости $u_1(r_1, z_1, \varepsilon)$, которая ограничена в $\Omega_{1,1}$, то $f_2(z_1) \equiv 0$.

Далее, поскольку $\dfrac{\partial \Psi_0(1,z_1)}{\partial r_1} = 0$, то $f_1(z_1) + f_3(z_1) \equiv 0$, и из (25) имеем:

$$\frac{\partial \Psi_0(r_1,z_1)}{\partial r_1} = f_1(z_1)(r_1^3 - r_1). \tag{26}$$

После интегрирования получаем

$$\Psi_0(r_1,z_1) = f_1(z_1)(r_1^4 - 2r_1^2) + f_4(z_1).$$

Тогда

$$r_1^{-1}\frac{\partial \Psi_0(r_1,z_1)}{\partial z_1} = \frac{df_1(z_1)}{dz_1}(r_1^3 - 2r_1) + r_1^{-1}\frac{df_4(z_1)}{dz_1}. \tag{27}$$

Так как это нулевая компонента асимптотики скорости $w_1(r_1, z_1, \varepsilon)$ из (22), ограниченная в $\Omega_{1,1}$, то $f_4(z_1) \equiv Const$. Положим эту постоянную равной нулю.

Поскольку согласно (18)

$$\frac{\partial\Psi_0(r_1,0)}{\partial r_1}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Psi_0(1,z_1)}{\partial z_1}=q_1(z_1),$$

то из (26)–(27) находим $f_1(0)=0$ и $\frac{df_1(z_1)}{dz_1}=-q_1(z_1)$.

Откуда окончательно получаем

$$f_1(z_1)=-\int_0^z q_1(x)dx$$

и

$$\Psi_0(r_1,z_1)=(2r_1^2-r_1^4)\int_0^{z_1} q_1(x)dx. \qquad (28)$$

Легко видеть [условия согласования (13)], что краевые условия

$$\frac{\partial\Psi_0(r_1,1)}{\partial r_1}=\frac{\partial\Psi_0(r_1,0)}{\partial z_1}=\frac{\partial\Psi_0(r_1,1)}{\partial z_1}=0$$

удовлетворяются автоматически.

Из $\Psi_0(r_1,z_1)$ получаем первые компоненты асимптотики скорости при $\varepsilon\to 0$

$$u_1^{(0)}(r_1,z_1)\equiv r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_0(r_1,z_1)}{\partial r_1}=4(1-r_1^2)\int_0^{z_1} q_1(x)dx; \qquad (29)$$

$$w_1^{(0)}(r_1,z_1,\varepsilon)\equiv -\varepsilon r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_0(r_1,z_1)}{\partial z_1}=\varepsilon q_1(z_1)(r_1^3-2r_1). \qquad (30)$$

Теперь найдем решение краевой задачи (24).

Интегрируем (24) по r_1 и затем умножаем на r_1. Тогда с учетом (28) получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1}))=$$

$$=\mathrm{Re}[r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r_1}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial r_1\partial z_1}-\frac{\partial\Psi_0}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r_1})]+f_1(z_1)r_1=$$

$$=8\,\mathrm{Re}(2r_1-2r_1^3+r_1^5)q_1(z_1)H(z_1)+f_1(z_1)r_1.$$

Затем ещё раз интегрируем по r_1 и делим на r_1:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1})= \qquad (31)$$

$$=\frac{\mathrm{Re}}{3}(24r_1-12r_1^3+4r_1^5)q_1(z_1)H(z_1)+f_1(z_1)r_1+f_2(z_1)r_1^{-1}.$$

Поскольку из (22) следует, что $r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1}$ первая компонента асимптотики скорости $u_1(r_1,z_1,\varepsilon)$, которая осесимметрична по r_1, то при r_1=0

$$\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1})=0.$$

Поэтому и $f_2(z_1)\equiv 0$. Еще раз интегрируем (31) по r_1 умножаем на r_1:

$$\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1}=\frac{\mathrm{Re}}{9}(36r_1^3-9r_1^5+2r_1^7)q_1(z_1)H(z_1)+$$

$$+f_1(z_1)r_1^3+f_3(z_1)r_1. \qquad (32)$$

Поскольку из (24) $\frac{\partial\Psi_1(r_1,0)}{\partial r_1}=\frac{\partial\Psi_1(1,z_1)}{\partial r_1}=0$,

то $f_1(0)=f_3(0)=0$ (33)

и

$$f_1(z_1)+f_3(z_1)=-\frac{29\,\mathrm{Re}}{9}q_1(z_1)H(z_1). \qquad (34)$$

Заключительное интегрирование (32) по r_1 дает

$$\Psi_1(r_1,z_1)=\mathrm{Re}(\frac{r_1^8}{36}-\frac{r_1^6}{6}+r_1^4)q_1(z_1)H(z_1)+$$

$$+\frac{f_1(z_1)r_1^4}{4}+\frac{f_3(z_1)r_1^2}{2}+f_4(z_1). \qquad (35)$$

Поскольку первая компонента асимптотики скорости $w_1(r_1,z_1,\varepsilon)$ из (22)

$$-r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial z_1}=\mathrm{Re}(-\frac{r_1^7}{36}+\frac{r_1^5}{6}-r_1^3)\frac{d}{dz_1}(q_1H)-$$

$$-\frac{r_1^3}{4}\frac{d}{dz_1}f_1(z_1)-\frac{r_1}{2}\frac{d}{dz_1}f_3(z_1)-r_1^{-1}\frac{d}{dz_1}f_4(z_1)$$

ограничена в $\Omega_{1,1}$ по r_1, то $f_4(z_1)\equiv Const$. Положим эту постоянную равной нулю.

Далее, поскольку согласно (24)

$$\frac{\partial\Psi_1(1,z_1)}{\partial z_1}=0,$$

то

$$31\,\mathrm{Re}\frac{d}{dz_1}(q_1H)+9\frac{d}{dz_1}f_1(z_1)+18\frac{d}{dz_1}f_3(z_1)=0.$$

Тогда с учетом (33)–(34) получаем

$$f_1(z_1)=-3\,\mathrm{Re}\,q_1(z_1)H(z_1);$$

$$f_3(z_1)=-\frac{2}{9}\mathrm{Re}\,q_1(z_1)H(z_1). \qquad (36)$$

Подставляя (36) в (35), окончательно находим для $\Psi_1(r_1,z_1)$, $u_1^{(1)}(r_1,z_1)$ и $w_1^{(1)}(r_1,z_1,\varepsilon)$

$$\Psi_1(r_1,z_1)=\frac{\mathrm{Re}}{36}(r_1^8-6r_1^6+9r_1^4-4r_1^2)q_1(z_1)H(z_1); \qquad (37)$$

$$u_1^{(1)}(r_1,z_1)\equiv r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial r_1}=$$

$$=\frac{\mathrm{Re}}{36}(8r_1^6-36r_1^4+36r_1^2-8)q_1(z_1)H(z_1); \qquad (38)$$

$$w_1^{(1)}(r_1,z_1,\varepsilon)\equiv -\varepsilon r_1^{-1}\frac{\partial\Psi_1(r_1,z_1)}{\partial z_1}=$$

$$=\varepsilon\frac{\mathrm{Re}}{36}(-r_1^7+6r_1^5-9r_1^3+4r_1)\frac{d}{dz_1}(q_1H). \qquad (39)$$

$$\Psi(r_1,z_1,\varepsilon)=(2r_1^2-r_1^4)\int_0^{z_1} q_1(x)dx+$$

$$+\varepsilon\frac{\mathrm{Re}}{36}(r_1^8-6r_1^6+9r_1^4-4r_1^2)q_1(z_1)H(z_1)+\ldots$$

С учетом (29)–(30) получаем асимптотику скорости для задачи (11)–(13) при $(\varepsilon\to 0)$

$$u_1(r_1,z_1,\varepsilon)=u_1^{(0)}(r_1,z_1)+\varepsilon u_1^{(1)}(r_1,z_1)+\ldots=$$

$$=4(1-r_1^2)\int_0^{z_1} q_1(x)dx+\varepsilon\frac{\mathrm{Re}}{36}(8r_1^6-36r_1^4+36r_1^2-8)\times \qquad (40)$$

$$\times q_1(z_1)\int_0^{z_1} q_1(x)dx+O(\varepsilon^2);$$

$$w_1(r_1,z_1,\varepsilon)=w_1^{(0)}(r_1,z_1,\varepsilon)+\varepsilon w_1^{(1)}(r_1,z_1,\varepsilon)+\ldots=$$
$$=\varepsilon q_1(z_1)(r_1^3-2r_1)+\varepsilon^2\frac{\mathrm{Re}}{36}[q_1^2(z_1)+ \qquad (41)$$
$$+\frac{dq_1(z_1)}{dz_1}\int_0^{z_1}q_1(x)dx](-r_1^7+6r_1^5-9r_1^3+4r_1)+O(\varepsilon^3).$$

Теперь построим асимптотическое разложение для давления $p_1(r_1,z_1,\varepsilon)$ из (11)–(13).

Будем его искать в следующем виде:

$$p_1(r_1,z_1,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}p_1^{(0)}(r_1,z_1)+p_1^{(1)}(r_1,z_1)+\ldots;$$
$$(\varepsilon\to 0). \qquad (42)$$

Подставляя (40)–(42) в (11), (12), получаем

$$\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial z_1}+\varepsilon\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial z_1}+\varepsilon u_1^{(0)}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial z_1}+w_1^{(0)}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial r_1}=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1\frac{\partial(u_1^{(0)}+\varepsilon u_1^{(1)})}{\partial r_1})+O(\varepsilon^2); \qquad (43)$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial r_1}+\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial r_1}=O(\varepsilon). \qquad (44)$$

Затем в (43)–(44) приравниваем слагаемые при одинаковых степенях ε.

В результате получаем для $p_1^{(0)}(r_1,z_1,\varepsilon)$ и $p_1^{(1)}(r_1,z_1,\varepsilon)$:

$$\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial z_1}=-\frac{16}{\mathrm{Re}}H(z_1)\equiv-\frac{16}{\mathrm{Re}}\int_0^{z_1}q_1(x)dx;$$
$$\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial r_1}=0; \qquad (45)$$

$$\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial z_1}=-12q_1(z_1)H(z_1)\equiv-12q_1(z_1)\int_0^{z_1}q_1(x)dx;$$
$$\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial r_1}=0. \qquad (46)$$

В каждой из систем (45) и (46) перекрестные производные совпадают, поэтому решение задач существует с точностью до аддитивной постоянной. Оно имеет следующий вид:

$$p_1^{(0)}(r_1,z_1)=-\frac{16}{\mathrm{Re}}\int_0^{z_1}H(t)dt+Const;$$
$$p_1^{(1)}(r_1,z_1)=-12\int_0^{z_1}q_1(t)H(t)dt+Const.$$

Тогда асимптотическое разложение для давления при $\varepsilon\to 0$

$$p_1(r_1,z_1,\varepsilon)=-\varepsilon^{-1}\frac{16}{\mathrm{Re}}\int_0^{z_1}H(t)dt-$$
$$-12\int_0^{z_1}q_1(t)H(t)dt+Const+O(\varepsilon). \qquad (47)$$

Итак, построено асимптотическое разложение решения задачи (11–13) в виде (40)–(41) и (47). Искомая асимптотика (7) получается из (40)–(41) и (47) с учетом (5) и (9).

В работах [5,6] для физически родственной задачи стационарного течения несжимаемой жидкости в тонком канале (радиуса ε и единичной длины) дана оценка асимптотической сходимости для нулевых невязок скорости и давления в нормах соответствующих соболевских пространств. Асимптотическая сходимость решения задачи (11)–(13) может быть доказана схожими методами.

Литература

1. Ивановский М.Н., Сорокин В.П., Ягодкин И.В. Физические основы тепловых труб. – М.: Атомиздат, 1978, с. 41-48.
2. Быстров П.И., Каган Д.Н., Кречетова Г.А. и др. Жидкометаллические теплоносители тепловых труб и энергетических установок. – М.: Наука, 1988, с. 197-206.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986, с. 39.
4. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970.
5. Аверьянов А.Н. Осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в длинном цилиндрическом канале со вдувом (отсосом) потока на боковой поверхности. – Успехи математических наук, 1996, т.51, вып. 5, с.207.
6. Аверьянов А.Н. Асимптотическое разложение решений некоторых задач Дирихле для уравнения Навье-Стокса с малым параметром: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук – Москва, МГУ, механико-математический факультет, 1996.

Материал поступил в редакцию 20. 09. 2014 г.